جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Première année M.I.

07/11/2020

Examen d'Algèbre 2

Durée: 1h 30 mn

Exercice 1. (13 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (2x+y-z, 4x+2y-4z, 4x+y-3z).$$

01pt 1. Montrer que f est une application linéaire.

02pts 2. Déterminer $\ker f$. f est-elle injective? Surjective?

01pt 3. Donner la matrice $A = Mat(f, \mathbf{B})$ associée à f relativement à la base canonique $\mathbf{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

01pt 4. Soit $\mathbf{B}' = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,1,1))$.
Montrer que $\mathbf{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

01,5pts 5. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ dans la base $\mathbf{B}$ puis dans la base $\mathbf{B}'$.

02pts 6. Donner la matrice A_1 de f ($A_1 = Mat(f, \mathbf{B}, \mathbf{B}')$) relativement aux bases $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

01pt 7. Donner la matrice $D = Mat(f, \mathbf{B}')$ de f relativement à $\mathbf{B}'$.

01,5pts 8. Déterminer la matrice de passage P de $\mathbf{B}$ à $\mathbf{B}'$. Calculer P^{-1}.

02pts 9. Calculer le produit $P^{-1}AP$. Que peut-on déduire?

Exercice 2. (07 points)

Soient $\mathbf{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y - z = 0\}$ et $\mathbf{F} = < w = (1,2,-1) >$.

02pts 1. Montrer que $\mathbf{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

2. Soit $u = (1,1,1)$ et $v = (2,1,3)$.

02pts a) Vérifier que $u, v \in \mathbf{E}$.

01pt b) Montrer que (u, v) est une base de $\mathbf{E}$.

02pts 3. Les sous espaces $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?