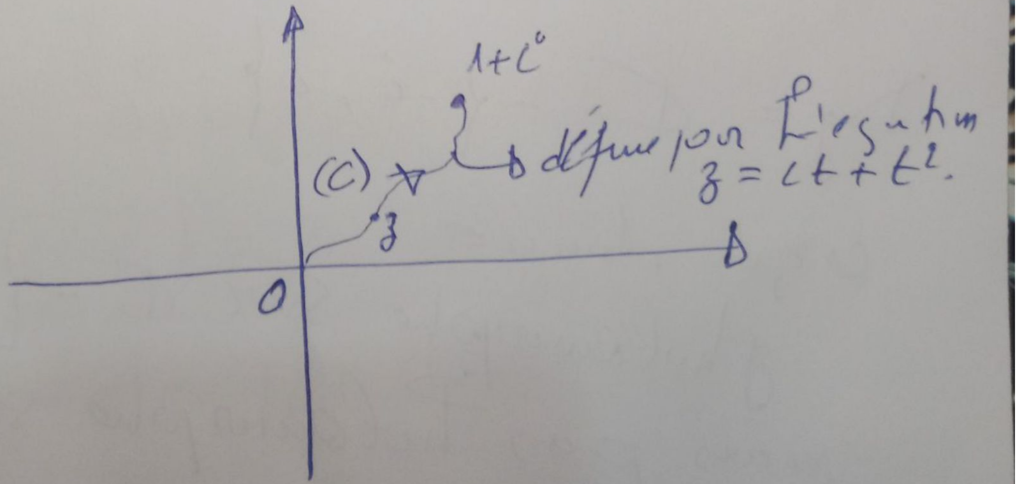
Exo2

Évaluons $\int_{0}^{1+i} i\bar{z}\,dz$ suivant (C) où (C) dans le cas a désigne le chemin orienté dans le sens positif gouverné par l'équation $z = it+t^2$.

On a

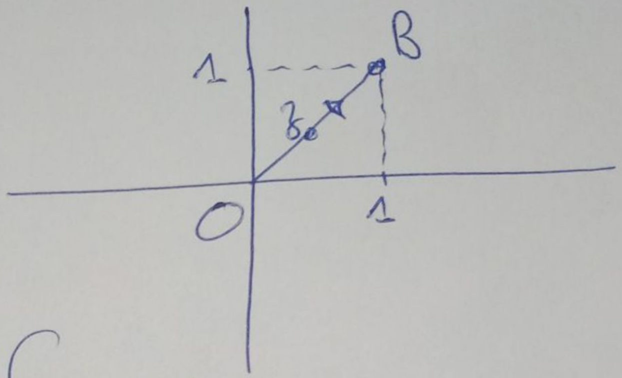
la borne 0 signifie le point (0,0)
la borne 1+i signifie le point (1,1)

dans le point z se déplace de (0,0) vers le point (1,1) suivant le chemin (C) défini par l'équation $z = it+t^2$.



Cas (C) $\int_0^{1+i} i\bar{z}\, dz$

ici le point z se déplace de 0 vers $1+i$ suivant le chemin (C) qui est le segment de droite $[O\ B]$ avec $B(1,1)$



On écrit

$$\int_0^{1+i} i\bar{z}\, dz = \int_{[OB]} i\bar{z}\, dz$$

$$z \in [OB] \iff z = z_0 + t(z_B - z_0) ; t\in[0,1].$$

avec $z_B = 1+i$

$$z = t(1+i) \Rightarrow dz = (1+i)\, dt$$

$$\bar{z} = \overline{t(1+i)} = t(1-i)$$

$$\int_{[OB]} i\bar{z}\, dz = \int_0^1 i\, t(1-i)(1+i)\, dt = i$$

Solution de l'exo2

Exo1 :

- $f(z) = iz^2 - 1 + 2i$

Cette fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$

Car c'est une fonction polynomiale.

- $$g(z) = \frac{z \longleftarrow \text{polynôme}}{z^2+1 \longleftarrow \text{polynome}}$$

$D_g = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } z^2+1 \neq 0\}$

$$\begin{aligned} z^2+1 = 0 &\iff z^2 - i^2 = 0 \\ &\iff (z-i)(z+i) = 0 \\ &\iff z = i \ , \ z = -i \end{aligned}$$

$D_g = \mathbb{C} - \{-i, i\}$

ce qui donne

g holomorphe sur $\mathbb{C} - \{-i, i\}$

mais pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$\int_0^{1+i} i\bar{z}\,dz = ?$ Page 3

ici z se déplace de $\overset{(0,0)}{\overset{\uparrow}{0}}$ vers $\overset{(1,1)}{\overset{\uparrow}{1+i}}$ suivant le chemin (C) indiqué dans la figure.

En effet

$z \in (C) \iff z = it+t^2$ (donnée)

$$\text{donc } dz = (it+t^2)'\,dt$$
$$= (i+2t)\,dt.$$

$$\bar z = \overline{it+t^2} = t^2 - it.$$

donc

$$\underbrace{\int_0^{1+i} i\bar z\,dz}_{\text{c'est une intégrale curviligne}} = \underbrace{\int_{\text{borne de } t\,?}^{\text{borne de } t\,?} i(t^2-it)(i+2t)\,dt}_{\text{c'est une intégrale simple dont la variable d'intégration est } t.}$$

Cherchons les bornes de la variable t.

on a z varie de 0 à $1+i$

$z = 0 \Rightarrow it + t^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 0 \\ \text{et} \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

$z = 1+i \Rightarrow it + t^2 = 1 + i$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2 = 1 \\ \text{et} \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

donc t varie de 0 à 1

<u>En fin</u>:

On ramène l'intégrale $\int_0^{1+i} i\bar{z}\,dz$ comme suit

$$\int_0^{1+i} i\bar{z}\,dz = \int_0^1 \underbrace{i(t^2 - it)(i+2t)\,dt}_{\text{c'est une intégrale simple à calculer.}} .$$

Cas b

cette fois-ci le point z se déplace

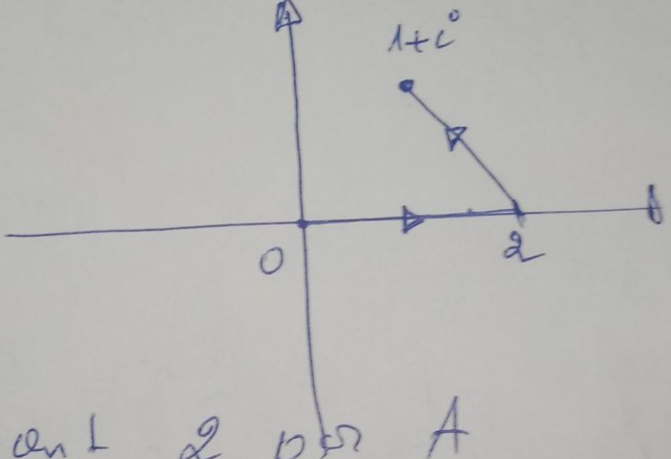
de 0 à 2 puis de 2 à $1+i$

c-à-d ↑ ↑ c-à-d ↑ ↑

$0+i0$ $2+i0$ $2+i0$ $1+i$

c-à-d ↑ ↑ c-à-d ↑

$(0,0)$ à $(2,0)$ puis de $(2,0)$ à $(1,1)$



On note le point 2 par A

" " $1+i$ par B

donc

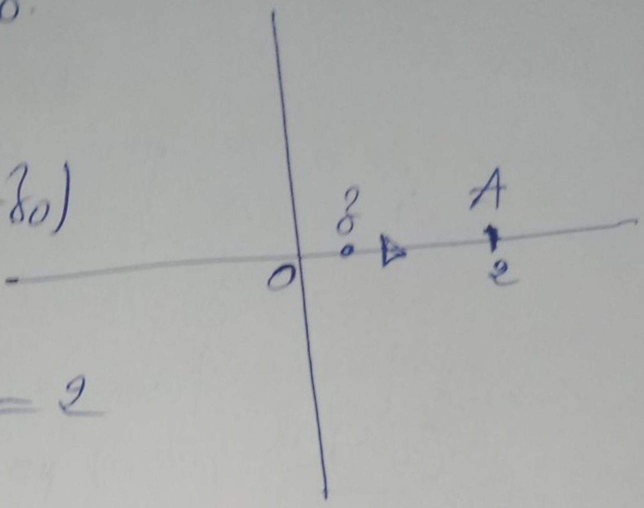
$$\int_0^{1+i} i\bar z\,dz \text{ signifie } \int_{(OAB)} i\bar z\,dz$$

c'est à dire

$$\int_0^{1+i} i\bar z\,dz = \int_{(OAB)} i\bar z\,dz = \int_{[OA]} i\bar z\,dz + \int_{[AB]} i\bar z\,dz.$$

Calculons $\int_{[OA]} i\bar{z}\,dz$.

$z \in [OA] \Leftrightarrow z = z_0 + t(z_A - z_0)$



$A(2,0) \Rightarrow z_A = 2 + 0i = 2$

$O(0,0) \Rightarrow z_0 = 0$

donc

$z \in [OA] \Leftrightarrow z = t2 \quad ; t \in [0,1]$

$\bar{z} = \overline{2t} = 2t \quad , dz = 2\,dt$

donc

$$\int_{[OA]} i\bar{z}\,dt = \int_0^1 i2t \cdot 2\,dt$$

$\int_{[AB]} i\bar{z}\,dz$ se fait de la même façon.