Université A/Mira de Béjaia
Faculté :ST
Département :GC.

Année :2020/2021
Examen de Maths 4 .

Exercice N° 1 :

Répondre par vrai ou Faux, en justifiant.

1) La fonction f définie par $f(z) = \dfrac{iz^2 + 4 - 3i}{z - 1}$ holomorphe sur $\mathbb{C} - \{1\}$.

2) La fonction g définie par $g(z) = \dfrac{2z^4 + z + 4 - 3i}{z^5 - 1}$ holomorphe sur $\mathbb{C} - \{1\}$.

4) $\displaystyle\int_{(C)} \frac{iz^2 + 4 - 3i}{z - 1} dz = 0$ où (C) désigne le cercle, orienté, de centre $(0, 0)$ de rayon 0.5.

5) $\displaystyle\int_{(\gamma)} \frac{2z^4 + z + 4 - 3i}{z^4 - 1} dz = 0$, (γ) désigne le cercle, orienté, de centre $(0, 0)$ de rayon 2.

6) $\displaystyle\int_{(\delta)} \frac{dz}{z - 2i} = \int_{(\gamma)} \frac{dz}{z - 2i} = 2\pi i;$

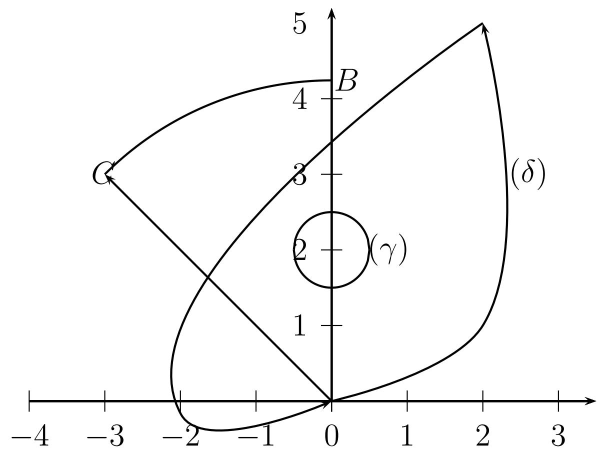
où (γ) désigne le cercle de centre $(0, 2)$ de rayon 0.5, orienté positivement.

Exercice N° 2 :

Soit $f(z) = iz^2 + |z| + \mathrm{Re}(z)$.

1) Ecrire f sous sa forme algébrique.

2) f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?



Exercice N° 3 :

Calculer les intégrales suivantes

$$1)\ \int_{[OC]} \mathrm{Arg(z)} dz, \quad 2)\ \int_{(OCB)} z\mathrm{Re(z)} dz, \quad 3)\ \int_{(\delta)} \frac{(3 + 4i)dz}{z - 2i} dz.$$

Données.

$C(-3, 3)$ $\ B(0, 3\sqrt{2})$, (CB) désigne arc du cercle de centre $(0, 0)$, orienté de C vers B.

Corrigé et Barème :

Exercice N° 1 (sur 5.25 points) :

1)--→ (Vraie) → (0.25 pt).
Reste à justifier :
Les réponses possibles

question 1) sur 1 point

Possibilité **N°** 1
Car la fonction $z \to \dfrac{iz^2+4-3i}{z-1}$ est rationnelle --→ (0.75)pt.
Possibilité **N°** 2
Df (domaine de définition de f) égale à $\mathbb{C}-\{1\}$ --→ (0.75)pt.

---

2)--→ (Faux) → (0.25 pt).
En justifiant

question 2) sur 1.25 point

Les réponses possibles
Possibilité **N°** 1
Car la fonction g définie par $g(z)=\dfrac{2z^4+z+4-3i}{z^5-1}$ est rationnelle dont $Dg \neq \mathbb{C}-\{1\}$ --→ (1)pt.
Possibilité **N°** 2
Car l'équation $z^5-1=0$ possède 5 solutions dans $\mathbb{C}$.--→ (1)pt.
Possibilité **N°** 3
Car $Dg = \mathbb{C}-\{1,a,b,c,d\}$ où a,b,c et d sont les solutions de l'équation $z^5-1=0$ --→ (1)pt.

---

4)--→ (Vrai) → (0.25 pt).

question 4) sur 1 point

En justifiant
Car la fonction sous le signe intégrale est holomorphe sur $\mathbb{C}-\{1\}$ et le point 1 se trouve à l'extérieur de (C) --→ (0.75) pt.

---

5)--→ (Vraie) → (0.25 pt).

question 5) sur 1 points

En justifiant
Car la fonction sous le signe intégrale est holomorphe sur $\mathbb{C}-\{-1,1,-i,i\}$ et les points $1,-1,-i$ et i se trouvent à l'extérieur de (C) --→ (0.75) pt.

---

6)--→ (Vrai) → (0.25 pt).

question 6) sur 1 points

En justifiant
Car la fonction sous le signe intégrale est holomorphe sur $\mathbb{C}-\{2i\}$ et le point $2i$ se trouve à l'intérieur de (δ) et (γ), le cercle de centre $2i$, se trouve à l'intérieur de (δ). --→ (0.75) pt.

Exercice N° 2 (sur 4 points) :

1)

$f(z)=f(x+iy)=i(x+iy)^2+\sqrt{x^2+y^2}+x$ --→ (0.25)

$$= ix^2 - iy^2 - 2xy + \sqrt{x^2+y^2} + x \dashrightarrow (0.25)$$

$$= \left(x + \sqrt{x^2+y^2} - 2xy\right) + i\left(x^2 - y^2\right) \dashrightarrow (0.5)$$

D'où

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(f(z)) = x + \sqrt{x^2+y^2} - 2xy \\ \mathrm{Im}(f(z)) = x^2 - y^2 \end{cases} \quad \dashrightarrow (0.5)$$

On note $\mathrm{Re}(f(z))$ par $p(x,y)$ et $\mathrm{Im}(f(z))$ par $q(x,y)$.

$$p(x,y) = x + \sqrt{x^2+y^2} - 2xy, \qquad q(x,y) = x^2 - y^2.$$

2)

Nous allons vérifier les conditions de Cauchy -Riemann.

$$f \text{ holomorphe sur } \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \text{ Les dérivées partielles de } p, q \text{ existent et continues .} \\ 2) \forall x, y \in \mathbb{R} : \dfrac{\partial p}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial q}{\partial y}(x,y) \\ 3) \forall x, y \in \mathbb{R} : \dfrac{\partial p}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \dashrightarrow (0.5)$$

Vérifiant la deuxième condition.

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = 1 - 2y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \dashrightarrow (0.5)$$

$$\frac{\partial q}{\partial y}(x,y) = -2y \dashrightarrow (0.5)$$

La deuxième condition n'est pas satisfaite par conséquent la fonction f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$ $\dashrightarrow$ (1)

Exercice N° 2 (sur 10.75 points) :

1) $\displaystyle\int_{[OC]} \mathrm{Arg(z)}dz$

$[OC]$ désigne la partie de la droite d'équation $y = -x \dashrightarrow (0.5)$.

$$z \in [OC] \Leftrightarrow z = z_O + t(z_C - z_O), \quad t \in [0,\ 1] \dashrightarrow (0.25)$$

Ce qui donne

$$z = t(-3+3i) \dashrightarrow (0.25)$$
$$dz = (-3+3i)dt \dashrightarrow (0.25)$$

En fin

$$\int_{[OC]} \mathrm{Arg(z)}dz = \int_0^1 \frac{3\pi}{4}(-3+3i)dt \dashrightarrow (1.25)$$
$$= \frac{3\pi}{4}(-3+3i). \dashrightarrow (0.25)$$

2) $\displaystyle\int_{(OCB)} z\mathrm{Re(z)}dz$

On a

$$\int_{(OCB)} z\text{Re(z)}dz = \int_{[OC]} z\text{Re(z)}dz + \int_{(CB)} z\text{Re(z)}dz \dashrightarrow (0.5)$$

Calculons l'intégrale curviligne le long $[OC]$.

$$z \in [OC] \Leftrightarrow z = t(-3+3i) \dashrightarrow (0.25)$$
$$dz = (-3+3i)dt \dashrightarrow (0.25)$$

Ici $\text{Re(z)} = -3t$.

$$\int_{[OC]} z\text{Re(z)}dz = \int_0^1 -3(-3+3i)^2 t^2 dt \dashrightarrow (1.25)$$
$$= \frac{-3(-3+3i)^2}{3} \dashrightarrow (0.25)$$

Calculons l'intégrale curviligne le long $[CB]$.

$$z \in [CB] \Leftrightarrow z = z_O + Re^{i\theta}, \dashrightarrow (0.25)$$
$$\theta \text{ varie de } \frac{3\pi}{4} \text{ à } \frac{\pi}{2} \dashrightarrow (1)$$

Ce qui donne

$$z \in [CB] \Leftrightarrow z = 3\sqrt{2}e^{i\theta}, \quad \dashrightarrow (0.75)$$
$$dz = 3\sqrt{2}ie^{i\theta}d\theta. \dashrightarrow (0.5)$$

Ici $\text{Re(z)} = 3\sqrt{2}\cos\theta$.
En fin

$$z\text{Re(z)}dz = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 54\sqrt{2}e^{i2\theta}\cos\theta d\theta. \dashrightarrow (0.75)$$

$$= 54\sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \cos\theta d\theta + i54\sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\cos\theta d\theta$$

Pour les calculs, l'intégration par partie deux fois.

3)

Calculons $\displaystyle\int_{(\delta)} \frac{(3+4i)dz}{z-2i}dz$.

On a

$$\int_{(\delta)} \frac{(3+4i)dz}{z-2i}dz = \int_{(\gamma)} \frac{(3+4i)dz}{z-2i}dz = (3+4i)\int_{(\delta)} \frac{dz}{z-2i}dz \dashrightarrow (0.5)$$

$$z \in (\delta) \Leftrightarrow z = 2i + 0.5e^{i\theta} \dashrightarrow (0.5)$$

Par conséquent

$$dz = 0.5ie^{i\theta}d\theta \dashrightarrow (0.5)$$

En fin

$$(3+4i)\int_{(\delta)} \frac{dz}{z-2i}dz = (3+4i)\int_0^{2\pi} id\theta = (3+4i)2\pi i \dashrightarrow (0.75)$$