



République Algérienne Démocratique et Populaire



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira - Bejaia

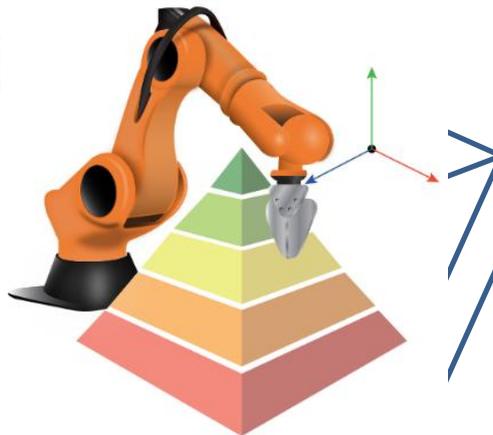
Faculté de Technologie

Département Génie mécanique

Polycopié du cours

Robotique Industrielle

Spécialité : Fabrication Mécanique & Productique



Réalisé par –

BOUTAANI Mohamed Said

2018/2019

Intitulé de la matière : Robotique
Semestre : 1

Code : Rob

Unité d'Enseignement : UEF1
Enseignant responsable de la matière : Boutaani Mohamed Said

Nombre d'heures d'enseignement :

Cours : 1h30
TD : 1h30
TP : 00h

Nombre d'heures de travail personnel pour l'étudiant : 01

Nombre de crédits : 04
Coefficient de la Matière : 02

Objectifs de l'enseignement :

Acquisition des outils de description et de modélisation mécanique pour la robotique en considérant des systèmes en chaîne ouverte et des systèmes à cycles cinématiques.

Connaissances préalables recommandées :

- Théorie des mécanismes ;
- Dessin assisté par ordinateur (DAO) ;
- Mécanique rationnelle ;
- Construction mécanique ;
- Technologie générale.

Contenu de la matière :

Chapitre 1 : Introduction à la robotique

Chapitre 2 : Modélisation des robots a chaînes ouvertes (en séries)

Chapitre 3 : Mouvement d'un corps rigide & transformations homogènes

Chapitre 4 : Modèles cinématiques directs et inverses

Table des matières

<i>Table des matières</i>	<i>i</i>
<i>Liste des figures</i>	<i>v</i>
<i>Liste des tableaux</i>	<i>viii</i>
1. Introduction à la robotique	2
1.1. Introduction	2
1.2. Hystorique	2
1.3. Définitions préliminaires	5
1.4. Classification des Robots.....	7
1.4.1. Classification par domaine	7
1.4.2. Classification par fonctionnalité.....	7
1.4.3. Classification mécanique.....	8
1.5. Caractéristique des Robots	9
1.6. Applications (Utilisation) de des Robots.....	11
1.7. Constituants et morphologie des robots manipulateurs	14
1.8. Architecture des systèmes robotiques.....	16
1.8.1. Système Mécanique Articulé (S.M.A.)	16
1.8.2. Eléments de technologie.....	17
1.8.3. Les composants mécaniques	18
1.8.4. Les transmissions mécaniques	20
1.8.5. Technologies des moteurs et des actionneurs.....	21
1.8.6. Les capteurs.....	25
1.8.7. Les effecteurs (Actionneurs de type pince).....	26
1.8.8. Avantages & Inconvénients des robots industriels	26
2. Modélisation des robots à chaînes simples ouvertes	28
2.1. Introduction	28

2.2. Rappels sur la théorie des mécanismes.....	28
2.2.1. Définitions préliminaires.....	28
2.2.2. Hypothèses et limites de l'étude.....	28
2.2.3. Modélisation des mécanismes.....	29
2.3. Description des chaînes cinématiques simples et ouvertes.....	34
2.3.1. Modélisation d'un Bras robot.....	34
2.3.1.1. Le bras mécanique.....	34
2.3.1.2. Types d'articulations.....	34
2.3.2. Configuration de robot industriel.....	35
2.3.3. Mobilité d'un mécanisme ou d'un robot manipulateur.....	42
2.3.4. Applications :.....	43
2.4. Modélisation de la chaîne cinématique simple ouverte (en série).....	44
2.4.1. Chaîne simple ouverte (en série).....	44
2.4.2. Etude cinématique des chaînes simples ouvertes (en séries).....	45
2.4.3. Etude statique des chaînes simples ouvertes (en séries).....	46
2.4.4. Applications :.....	47
3. Mouvements d'un corps rigide et transformations homogènes.....	48
3.1. Introduction.....	48
3.2. Systèmes de coordonnées à trois dimensions.....	48
3.3. Rotation.....	50
3.3.1. Composition de rotation.....	52
3.3.2. Angles d'Euler.....	55
3.3.3. Angles RPY.....	55
3.4. Transformations homogènes.....	56
3.4.1. Représentations homogènes.....	57
3.4.2. Matrices de base de transformation homogène.....	59
3.4.3. Composition de transformations homogènes.....	60

3.4.4. Applications	61
4. Modèles cinématiques directs et inverses	64
4.1. Introduction	64
4.2. Chaînes cinématiques	64
4.3. Convention pour les liens, les articulations et les systèmes de coordonnées	65
4.4. Obtention des équations de la cinématique directe	67
4.5. Représentation de Denavit-Hertenberg (DH)	68
4.5.1. Description des articulations	68
4.5.2. Description de liaisons (articulations) entre éléments.....	68
4.5.3. Convention d'attachement des repères aux liens du robot.....	68
4.5.4. Etape de Denavit-Hartenberg (DH).....	69
4.6. La cinématique inverse de position	73
4.6.1. Introduction	73
4.6.2. Modèle géométrique inverse (MGI) des robots	74
4.6.3. Position du problème.....	74
4.6.4. Calcul du modèle géométrique inverse	75
4.7. Applications.....	77
Bibliographie	81

Liste des figures

Figure 1. 1 Estimation de l'offre annuelle mondiale de robots industriels	5
Figure 1. 2 Classification par fonctionnalité	8
Figure 1. 3 Les robots de troisième millénaire	8
Figure 1. 4 Volume de travail des différents robots	10
Figure 1. 5 Différents secteurs industriels.....	12
Figure 1. 6 Constituants d'un robot.....	14
Figure 1. 7 Structure de robot à poignet de type rotule correspond à celle des robots Stäubli RX-90 et FANUC ARC ou LR	14
Figure 1. 8. 12 morphologies possibles de porteur	15
Figure 1. 9 Types de poignets	15
Figure 1. 10 Architecture des systèmes robotiques.....	16
Figure 1. 11 Système Mécanique Articulé (S.M.A.).....	17
Figure 1. 12 Coussinets	18
Figure 1. 13 Les roulements à billes, à rouleaux ou à aiguilles	18
Figure 1. 14 Les butées à billes et à rouleaux	18
Figure 1. 15 La douille à billes.....	19
Figure 1. 16 Vis à billes	19
Figure 1. 17 Guidage à billes et sur rail	19
Figure 1. 18 Les rotules lisses	19
Figure 1. 19 Transmission par obstacle : Engrenages	20
Figure 1. 20 Transmission par obstacle : Pignon crémaillère	20
Figure 1. 21 Transmission par obstacle : Roue et vis sans fin	20
Figure 1. 22 Transmission par lien flexible : pignons-chaîne	21
Figure 1. 23 Transmission par lien flexible : poulies-courroie	21
Figure 1. 24 Positionnement des capteurs	25
Figure 1. 25 les différentes pinces pour les robots.....	26
Figure 2. 1 Type de contact entre deux solides	29
Figure 2. 2 Paramétrage de la position d'un solide S_1	31
Figure 2. 3 Paramétrage d'une position	31

Figure 2. 4 Système bielle manivelle	32
Figure 2. 5 Schémas cinématique d'un robot cartésien.....	32
Figure 2. 6 Graphe des liaisons	33
Figure 2. 7 Robot ERICC 3.....	33
Figure 2. 8 Vérin électrique.....	33
Figure 2. 9 Positionneur 6 axes	33
Figure 2. 10 Articulations prismatiques – Robot cartésien 3P.....	35
Figure 2. 11 Articulation pivot– Robot industriel 6R	35
Figure 2. 12 Articulation à rotule – équivalence d'une articulation à rotule.....	35
Figure 2. 13 Structure d'un robot cartésien	36
Figure 2. 14 Volume de travail du robot cartésien	36
Figure 2. 15 Structure d'un robot cylindrique.....	37
Figure 2. 16 Volume de travail du robot cylindrique.....	37
Figure 2. 17 Structure d'un robot sphérique	38
Figure 2. 18 Volume de travail du robot sphérique.....	38
Figure 2. 19 Structure d'un robot SCARA	39
Figure 2. 20 Volume de travail du robot SCARA.....	39
Figure 2. 21 Structure d'un robot articulé.....	40
Figure 2. 22 Volume de travail du robot articulé	40
Figure 2. 23 Structure d'un robot parallèle	41
Figure 2. 24 Chaines cinématiques.....	42
Figure 2. 25 Exemple des robots en 2D	43
Figure 2. 26 Robot avec une chaîne simple ouverte	44
Figure 2. 27 Chaîne simple ouverte	45
Figure 2. 28 Graphe d'une chaîne simple ouverte	46
Figure 2. 29 Robots à chaînes ouverts.....	47
Figure 3. 1	48
Figure 3. 2 Règle de la main droite pour la formation de systèmes de coordonnées 3D. Le pouce correspond à l'axe des z, l'indicateur à l'axe des x et le majeur à l'axe des y.	49
Figure 3. 3 Règle de la main droite : la direction des doigts qui se ferment dans la main indique le sens positif de l'angle de rotation.	49
Figure 3. 4 Le point p décrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de base orthonormée dans le système R_0 . Les vecteurs en rouge représentent x_0 , y_0 et z_0	49

Figure 3. 5 Point p est décrit comme la combinaison linéaire des vecteurs de base orthonormée dans R_1	50
Figure 3. 6 Résultat de la composition $R = R_y \cdot \phi R_z \cdot \theta$	54
Figure 3. 7 Résultat de la composition $R' = R_z \cdot \theta R_y \cdot \phi$	54
Figure 3. 8 Translation pure entre les systèmes R_0 et R_1 . (x_1 est // à x_0 , y_1 est // à y_0 et z_1 est // à z_0).....	56
Figure 3. 9 Le point p représenté par rapport au système R_1	56
Figure 3. 10 Le point p est représenté par rapport au système R_1 (vecteur rouge) et au système R_0 (vecteur vert).	56
Figure 3. 11 Composition de translation et de rotation.	57
Figure 3. 12 Trois systèmes de coordonnées dans l'espace cartésien tridimensionnel.	60
Figure 4. 1 Robot Scara (Adept Cobra s600)	65
Figure 4. 2 Schémas cinématiques du robot Scara	65
Figure 4. 3 Convention pour membres, articulations et systèmes de coordonnées.....	66
Figure 4. 4 Robot à chaîne ouverte simple	68
Figure 4. 5 Représentation DH.....	70
Figure 4. 6 Système d'organe final	72
Figure 4. 7 Robot avec ces référentiels	74

Liste des tableaux

1. Introduction à la robotique

1.1. Introduction

Un robot est une machine utilisée pour exécuter certaines fonctions délicates et ponctuelles (précises et sensibles) qu'un être humain ne peut exécuter en raison de l'indisponibilité du lieu ou de la grande précision requise par ces tâches. Le robot a remplacé les humains dans de nombreux domaines et a pu remplir plusieurs fonctions. Par exemple, le robot était une alternative à l'homme pour les interventions chirurgicales complexes (la médecine) est également utilisé pour l'enlèvement et le démantèlement des mines posées pendant les guerres et les périodes coloniales, est aussi utilisé dans la recherche de ressources naturelles. Il a aussi accompli des missions militaires, dans la réalisation de tâches d'espionnage, et dans l'industrie, en particulier dans les usines produisant des produits délicats, sensibles et dangereux dans des environnements inadaptés à la nature humaine. Sans citer ses utilisations dans le domaine de la robotique de service (loisirs, éducation, sécurité, assistance). Il est également intéressant de noter qu'il existe une spécialité en ingénierie appelée mécatronique (mechatronic), qui examine le développement des robots et leur fabrication pour répondre à tous les besoins et exigences de l'homme.

Depuis la nuit des temps, l'homme faisait toutes les tâches en utilisant ses mains, il faisait, le filage, le tissage, l'agriculture et la récolte, la construction et le commerce. Avec les progrès de la science au fil des années, et la multiplication des fonctions qui sont devenues un devoir à faire pour garder l'épanouissement humain, le travail manuel est devenu parfois difficile, en raison de la difficulté du travail à effectuer ou de la grande précision qui n'est parfois pas disponible dans le travail manuel, l'homme devait donc réfléchir à des moyens de se passer de sa présence pour effectuer ces travaux. Il a inventé les machines et les outils qui l'aident, mais il reste parfois incapable de travailler avec ses mains ou ses machines qui a inventé, Ainsi il a fait recours à des machines intelligentes qui peut les contrôler à distance ou programmer pour effectuer des tâches précises et sensibles.

1.2. Hystorique

Les racines du robot moderne remontent à des machines inventées dans le passé lointain appelées machines automotrices. À l'ère des Pharaons, vers **1500 av. J.-C.**, l'homme créa une statue du roi MAMNOUN qui émettait de beaux sons musicaux tous les matins. En Grèce - au **IVe siècle av. J.-C.**, - le mathématicien ARQUITAS a inventé, un pigeon motorisé capable de voler. Au **troisième siècle av. J.-C.**, STESIBIUS a inventé une variété de dispositifs automatiques, y compris un instrument de

musique semblable à l'orgue et une montre, qui n'était pas la première de l'histoire, qui fonctionnent avec de l'eau. La montre de Stesbius s'est caractérisée par le niveau d'eau fixe et fonctionne de la même manière que la pièce flottante du véhicule automobile moderne.

HERON d'Alexandrie (10-70 ap. J.-C.) est l'un des inventeurs les plus inimitables dans le domaine de la robotique, il a inventé des machines fonctionnant avec un débit d'eau élevé et même avec de la vapeur. L'une de ses plus importantes inventions est une machine qui est actuellement la première forme de turbine à vapeur, *The Holy Water*, et un oiseau capable de voler, de boire et de gazouiller, ainsi qu'un théâtre automatisé et une statue d'Héraclius en mouvement combattant le dragon, à travers le flux d'eau qu'il contient. Héron Alexander a expliqué la fonction de la plupart de ces machines dans son livre "automatopoietica". Au cours des siècles suivants, de grandes inventions sont apparues en Extrême-Orient et au Moyen-Orient, en Chine, en Inde, au Japon et dans la péninsule arabique. Dans la lettre d'*AL-JAZRI*, qui contient un récit des machines inventées par les Arabes - une description de l'un de ces dispositifs, la "fontaine du paon", qui était utilisée pour le lavage à la main en fournissant de l'eau, du savon et une serviette d'une façon automatisée. En raison de cette invention, AL-JAZRI est appelé le "le père de la robotique".

En Europe, l'idée des robots capables de faciliter la vie humaine a été découverte au Moyen Âge lorsque les philosophes *Albert Vagnos* et *Roger Bacon* ont étudié et fabriqué certaines machines automotrices. L'invention de l'horloge automatique à la fin du *XIIIe siècle* a conduit à la fourniture de machines automotrices dotées de la force mécanique nécessaire, ce qui permet d'inventer l'horloge qui sonne les cloches. Au *dix-huitième siècle*, les meneurs de jeu fabriquèrent un grand nombre de machines de fabrication autopropulsées, capables de parler, de jouer de la musique, d'écrire et même de jouer aux échecs. L'un des inventeurs les plus célèbres de ces jouets est un Français nommé Jacques de Vaucanson, concepteur de fils textiles automatiques, utilisé en 1801 par un autre inventeur français, Joseph Marie Jacquard, pour fabriquer des fils textiles qui contrôlent un jeu de cartes perforées. Au dix-huitième siècle, deux autres machines ont été utilisées, conformément au principe de feed-back, qui est une condition préalable aux systèmes d'autosurveillance automatiques. L'un de ces dispositifs est le ventilateur de l'éolienne qui maintient les plumes au vent et dont l'éolienne continue de tourner, le deuxième étant le régulateur et la commande du moteur de la machine à vapeur, qui la fait tourner à une vitesse constante.

Ci-dessous, un aperçu de l'histoire de l'émergence des robots.

Année	Signification et importance	Nom du robot	Inventeur
I^{er} siècle av. J.-C et avant	Description de plus de 100 machines fixes et automatiques, y compris le moteur à combustion, l'organe à commande pneumatique, le moteur à vapeur dans les œuvres de l'inventeur Héron Alexander.		Catsippe grec, Philo byzantin, H. d'Alexandrin
1206	L'émergence des premières machines automatiques.	Serveuse à thé	Ibn El Jazari
Vers 1495	Le premier design d'un robot de forme humaine.	Chevalier mécanique	Leonardo da Vinci
1738	La création d'un canard mécanique capable de manipuler, battre des ailes et évacuer les déchets.	Canard digérateur	Jacques de Vaucanson
le XIX^e siècle	L'invention des jeux de machine japonais capables de faire du thé, de lancer des flèches et de peindre.	Poupées karakuri	Tanaka Hisachigi
1921	L'émergence des premières machines auto-motivantes sous le nom de "Robots" dans une pièce : Rossum's Universal Robots.	Rossum's Universal Robots	Karel Capek
1928	La conception d'un robot humanoïde, basée sur la conception d'un bouclier avec des moteurs électriques, a été présentée à l'exposition annuelle de la Société d'ingénierie de modèle à Londres.	Eric	Captain William Richards
1930	1 ^{er} exposition mondial d'un robot humanoïde (1939 - 1940).	Elektro (robot humanoïde)	Westinghouse Electric Corporation
1948	Robots simples présentant un comportement biochimique.	Tortues (Elsie et Elmer)	William Gray Walter
1956	Le lancement du premier robot à usage commercial de la société, fondé par George Devol et Joseph Engelberger, est basé sur un design Devol.	Unimate	George Devol
1961	Utilisation d'un robot industriel, commercialisé par la société Unimation (USA).	Unimate	George Devol
1963	Première plate-forme mobile.	Palatisseur	Fuji Yusoki Kogyo
1973	Le premier robot électromécanique industriel à six axes.	Famulus	Kuka Systems
1975	Le premier bras programmable conçu pour manipuler divers objets durs, produit par Unimachen	Puma	Victor Scheinman

Au début du troisième millénaire, l'industrie des robots s'est développée et des entreprises du monde entier ont produit d'énormes quantités de ces robots. La production a atteint plus de 1.7 million au cours de l'année 2020, comme l'illustre la tendance suivante.

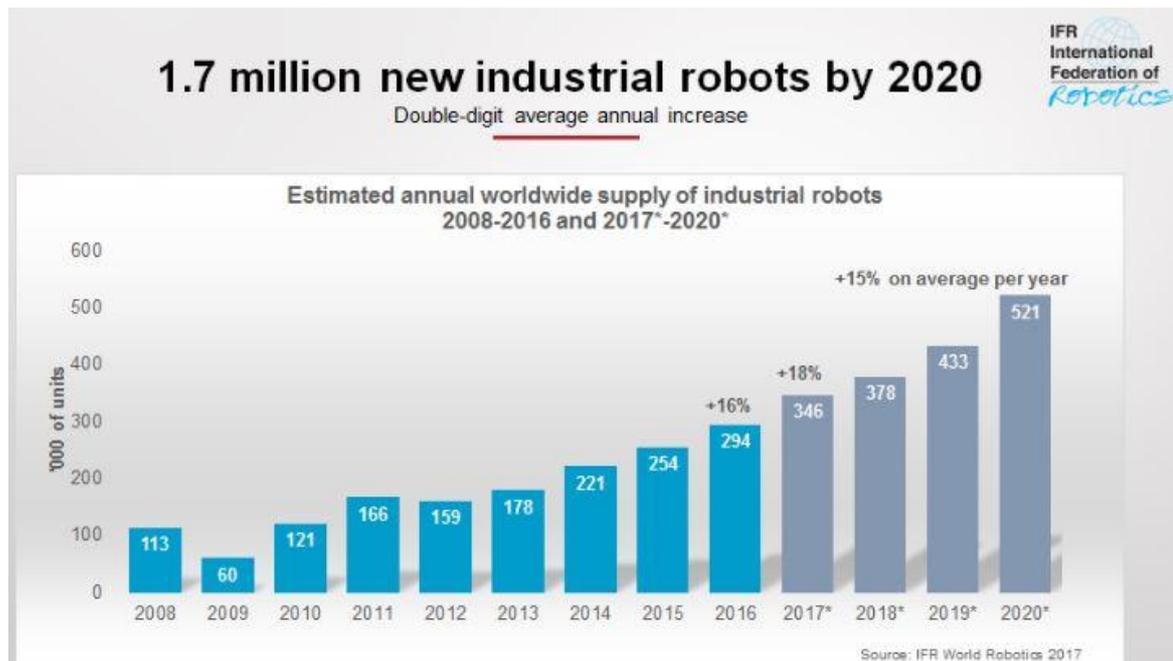


Figure 1. 1 Estimation de l'offre annuelle mondiale de robots industriels

Les robots les plus importants qui ont émergés en ce millénaire sont résumés dans le tableau suivant :

Année	Signification et importance	Nom du robot	Inventeur
2000	La société Honda met au point le premier robot humanoïde Asimo	Asimo	Société Honda
2001	Le robot chirurgical qui a entrée dans les opérations chirurgicales et qui permet aussi la vision 3D.	Le robot chirurgical	
2013	Un robot fabriqué à partir de bactéries a été introduit dans l'organisme d'un animal pour détruire des cellules cancéreuses.	Un nano robot	En Corée du sud
2015	Le robot Hadrian peut construire les murs de briques d'une maison en deux jours.	Hadrian	

Connaissant l'historique de l'apparition des machines et en particulier l'appareil reprogrammable, ainsi que la date de l'apparition des robots, nous pouvons par la suite donner quelques définitions de cette machine appelée robot.

1.3. Définitions préliminaires

Introduction :

La **robotique** est l'ensemble des techniques permettant la conception, la réalisation de machines automatiques ou de **robots**.

Qu'est-ce qu'un robot ?

Les robots sont aujourd'hui utilisés dans une grande variété d'applications industrielles. La plupart des robots industriels sont des bras mécaniques attachés à une base fixe, avec une forme de commande programmable pour l'exécution automatique du mouvement.

Il existe diverses définitions de robot industriel, dont deux sont les suivantes :

Définition I

Un **robot** est un manipulateur multifonction reprogrammable conçu pour déplacer des pièces matérielles, des outils ou des dispositifs spécialisés, au moyen de mouvements programmés variables, pour l'exécution de diverses tâches.

(*Robotic Institute of America, 1979*)

Définition II

Un robot industriel est un appareil reprogrammable conçu pour manipuler et transporter des pièces, des outils ou des outils de fabrication spécialisés au moyen de mouvements programmés variables afin d'exécuter des tâches de fabrication spécifiques.

(*British Robots Association*)

Un robot est un appareil/une machine mécanique capable d'effectuer un travail préprogrammé, avec un signal direct et une commande provenant d'un humain (ex. la pelle) ou un signal provenant d'un programme informatique. Le travail du robot est souvent effectué sous la forme de travaux industriels précis ou pénibles tels que le transport de charges lourdes, les travaux dangereux ou précis, et la recherche de mines et l'élimination de déchets radioactifs.

La robotique est la science et la technologie des robots, ainsi que leur conception, leur fabrication, leur application et leur disposition structurelle. Cela nécessite une connaissance pratique de l'électronique, de la mécanique et des logiciels.

Le mot "robot" est apparu en 1921 mais n'était pas un terme technique. Il a été utilisé par le dramaturge tchèque Karel Capek dans une pièce satirique intitulée "Robots universels de Rossums" pour décrire les travailleurs esclaves dont l'âme avait été retirée pour les forcer à travailler plus fort. En 1942, Isaac Asimov écrivit une courte histoire de science-fiction dans laquelle le mot «robotique» était utilisé pour la première fois et présentait **3 lois de la robotique**.

1. Les robots ne doivent pas blesser les humains
2. Les robots doivent obéir aux ordres
3. Les robots doivent protéger leur propre existence

Problèmes d'utilisation des robots industriels

Comment aborder les problèmes de relation industrielle !

La RIA (Robotics Industries Association) a promis aux opposants de l'utilisation du robot dans l'industrie de :

- ✓ Ne pas remplacer les travailleurs, seulement remplacer l'équipement.
- ✓ Utilisez uniquement pour les tâches dangereuses, les ennuyeuses, démoralisantes et répétitives.

Seulement si cela peut entraîner une semaine de travail plus courte, des salaires plus élevés et de meilleures conditions de travail pour les humains.

Pour être qualifié de robot, une machine doit pouvoir :

- a) Détection et perception : obtenir des informations sur son environnement.
- b) Effectuer différentes tâches : locomotion ou manipulation, faire quelque chose
Physique : déplacer ou manipuler des objets
- c) Reprogrammable : peut faire différentes choses
- d) fonctionner de manière autonome et/ou interagir avec des êtres humains.

Pourquoi utiliser des robots?!

Il y a de nombreuses raisons d'utiliser un robot, mais les principales sont :

Environnements d'application 4D

- Dangereux (exploration à l'intérieur d'un volcan)
- Sale
- Terne (comme le ménage)
- Difficile (nettoyage de l'intérieur d'un long tuyau et missions spatiales)

Tâches 4A

- Automatisation
- Augmentation
- Assistance
- Autonome

Limites de la robotique

- Ne sont pas créatifs ou novateurs.
- Ne peut pas penser de façon indépendante
- Ne peuvent pas prendre des décisions compliquées.
- Ne peuvent pas apprendre des erreurs
- Ne peuvent pas s'adapter rapidement aux changements de leur environnement.

1.4. Classification des Robots

Il existe différentes classification, permet ces classification on trouve :

1.4.1. Classification par domaine

La robotique moderne trouve des applications dans différents domaines (liste non exhaustive) :

- La robotique industrielle
- La robotique de service
- La robotique médicale
- La robotique militaire
- La robotique scientifique
- La robotique de transport

1.4.2. Classification par fonctionnalité

Cette classification divise les robots en deux catégories : Industriels et services

Les robots industriels sont les robots qu'on peut trouver dans les zones industriels comme les robots manipulateurs et d'usinage, et aussi qu'on trouve dans les hôpitaux.

Les robots de services : robots autonomes et robots humanoïdes.

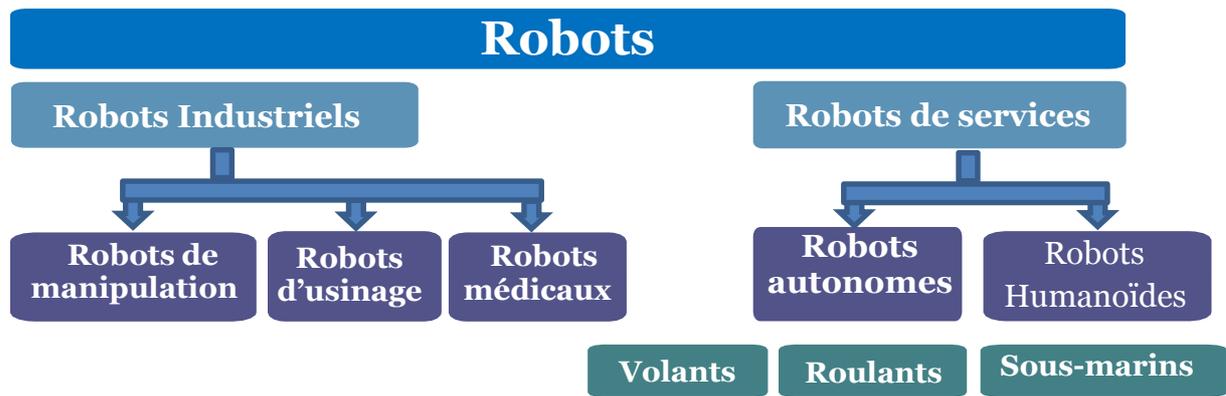


Figure 1. 2 Classification par fonctionnalité

Dans ce cours, seuls les robots industriels (manipulateurs) qu'on va étudier dans les chapitres suivantes.

Quelques exemples des différents robots.

Robot Manipulateurs



Aerial Robots



Manipulateurs mobiles



Humanoid



Underwater robots



Figure 1. 3 Les robots de troisième millénaire

1.4.3. Classification mécanique

On retiendra pour notre part 3 types de robots :

- **Les manipulateurs**
 - Les trajectoires sont non quelconques dans l'espace,
 - Les positions sont discrètes avec 2 ou 3 valeurs par axe,
 - La commande est séquentielle.
- **Les télémanipulateurs**

Appareils de manipulation à distance (pelle mécanique, pont roulant), apparus vers 1945 aux USA:

- Les trajectoires peuvent être quelconques dans l'espace,

- Les trajectoires sont définies de manière instantanée par l'opérateur, généralement à partir d'un pupitre de commande (*joystick*).

- **Les robots :**
 - Les trajectoires peuvent être quelconques dans l'espace,
 - L'exécution est automatique,
 - Les informations extéroceptives peuvent modifier le comportement du robot.

Les robots sont caractérisés par leur utilisation en trois catégories :

1. Les *robots manipulateurs industriels*, chargés de manipuler, soient :
 - Des pièces : Stockage – déstockage,
Palettisation – dépalettisation,
Chargement – déchargement de machine-outil, Manipulation d'éprouvettes,
Assemblage de pièces, ...
 - Des outils : Soudure en continu ou par points,
Peinture, Collage, Ebavurage, ...
2. Les *robots didactiques*, qui sont des versions au format réduit des précédents robots. La technologie est différente, de même que les constructeurs. Ils ont un rôle de formation et d'enseignement, ils peuvent aussi être utilisés pour effectuer des tests de faisabilité d'un poste robotisé.
3. Les *robots mobiles autonomes* : Les possibilités sont plus vastes, du fait de leur mobilité. Notamment, ils peuvent être utilisés en zone dangereuse (nucléaire, incendie, sécurité civile, déminage), inaccessible (océanographie, spatial). De tels robots font appel à des capteurs et à des logiciels sophistiqués. On peut distinguer 2 types de locomotion : Les robots *marcheurs* qui imitent la démarche humaine, et les robots *mobiles* qui ressemblent plus à des véhicules.

1.5. Caractéristique des Robots

Un robot doit être choisi en *fonction de l'application* qu'on lui réserve.

Voici quelques paramètres à prendre, éventuellement, en compte :

- La **charge maximale transportable** (de quelques kilos à quelques tonnes), à déterminer dans les conditions les plus défavorables (c'est-à-dire, en *élongation maximale*)
- L'**architecture du S.M.A.** : le choix est guidé par la tâche à réaliser. Par exemple, robots à structure rigide vs. robots avec segments et/ou articulations flexibles
- Le **volume** ou **espace de travail** ("*workspace*" en anglais), défini comme l'ensemble des points atteignables par l'organe terminal du robot
- **Volume accessible**
 - Volume de travail du robot, difficile à représenter pour 6DDL
 - Il dépend de : la cinématique du robot, la longueur des segments, les butées articulaires
 - Graphiquement, on donne le volume accessible d'un point (centre outil, centre poignet) pour au moins une orientation.

Exemples de volume de travail

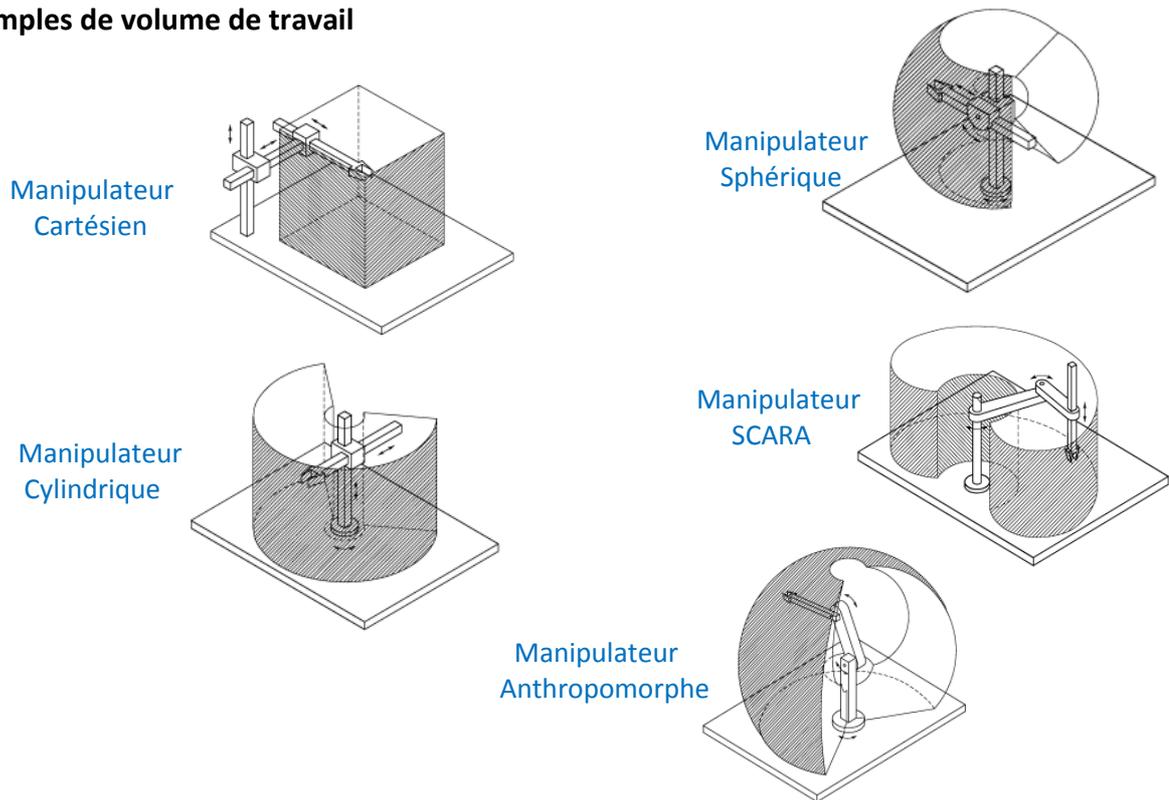


Figure 1. 4 Volume de travail des différents robots

- L'**exactitude de positionnement**, définie par une position et une orientation dans l'espace cartésien
- La **répétabilité**. Ce paramètre caractérise la capacité que le robot à retourner vers un point (position et orientation) donné. En général, la répétabilité est de l'ordre de 0.05 mm
- La **vitesse** de déplacement (vitesse maximale en élongation maximale), l'**accélération**
- La **masse** du robot (de quelques centaines de kilos à quelques tonnes)
- Le **coût** du robot
- La **maintenance** du robot (difficile pour les robots qui travaillent dans des environnements hostiles/dangereux, ex. chambre froide)

1.6. Applications (Utilisation) de des Robots

Historiquement, il y a eu deux courants principaux pour le développement de la robotique. L'un des domaines d'application est le robot industriel traditionnel, utilisé pour des tâches de chaîne de montage telles que le soudage, la peinture et la manipulation de matériaux. L'autre domaine d'application est la téléportation dans des environnements dangereux, tels que la manipulation de matières nucléaires. Plus récemment, le domaine d'application de la robotique s'est élargi. Voici les plus 10 applications de robots industriels :

- Manutention.
- Polissage.
- Poinçonnage.
- Soudage.
- Palettisation.
- Assemblage.
- Découpe au laser.
- Peinture au pistolet.
- Inspection.
- Ébavurage.



Les pourcentages d'utilisations de robots industriels dans le monde sont (60% de soudage et de peinture, 20% de choix et d'emplacement et 20% d'autres).

La grande majorité des robots est utilisée pour des *tâches simples et répétitives*

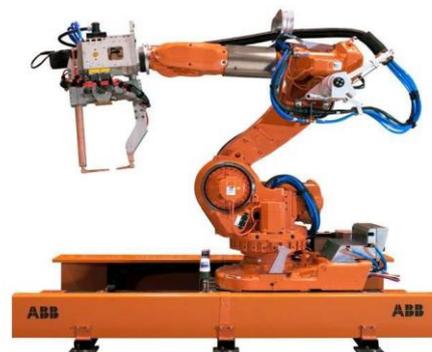
- Les robots sont programmés *une fois pour toute* au cours de la procédure d'apprentissage
- Critères de choix de la solution robotique :
 - La tâche est *assez simple* pour être robotisée
 - Les *critères de qualité* sur la tâche sont importants, par ex. peinture d'une voiture : uniformité de couleur
 - Pénibilité/*dangerosité* de la tâche (charge lourde, soudage, environnement hostile, etc.)

Secteurs d'activités : milieu industriel

Robots soudeurs



Soudage à l'arc ("continu")



Soudage par points ("discret")

Robots de palettisation



Figure 1. 5 Différents secteurs industriels

aussi... découpage au laser, collage, pliage, scellement, etc...

Robotique chirurgicale non invasive (laparoscopie)

- Robot chirurgien *Da Vinci* de Intuitive Surgical



Assistance aux personnes handicapées



Prothèses robotiques



Robot sculpteur (usinage)



Robot pompiste ("Tankpitstop")



1.7. Constituants et morphologie des robots manipulateurs

Les robots manipulateurs sont constitués généralement par les éléments suivantes (figure 1.7) :

- Actionneur (moteur)
- Corps (segment)
- Base (socle)
- Axe (articulation)
- Organe terminale (outil)

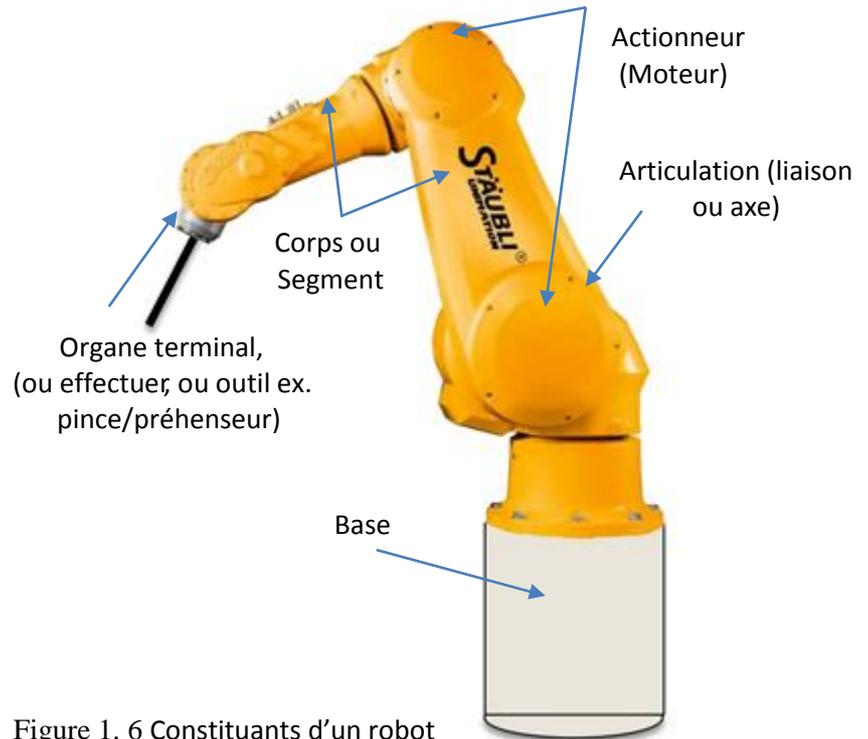


Figure 1. 6 Constituants d'un robot

- Le **porteur** a pour rôle de fixer la position du point d'intersection, noté P , des axes des 3 dernières articulations (centre du poignet) ; cette position (P) ne dépend que de la configuration des solides (corps) 1, 2 et 3 (*i.e.*, du porteur),
- Le **poignet** est destiné à l'orientation de l'organe terminal (pince, outil).

On convient d'appeler les 3 premiers *d.d.l.* le **porteur du robot**. Les *d.d.l.* résiduels forment le **poignet**, caractérisé par des dimensions beaucoup plus petites et une plus faible masse.

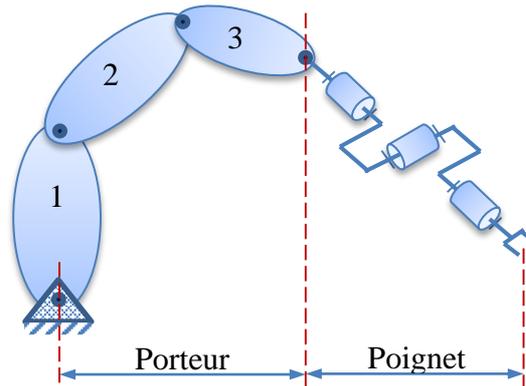


Figure 1. 7 Structure de robot à poignet de type rotule correspond à celle des robots Staubli RX-90 et FANUC ARC ou LR

Concernant la morphologie de ces robots, il existe différents représentations schématiques, permet ces représentations, 12 morphologies possibles de porteur (ces morphologies sont non redondantes (on élimine *a priori* les structures limitant les mouvements du porteur à des déplacements linéaires ou planaires : 3 liaisons prismatiques d'axes parallèles, par exemple, ou 3 liaisons rotoïdes d'axes parallèles)).

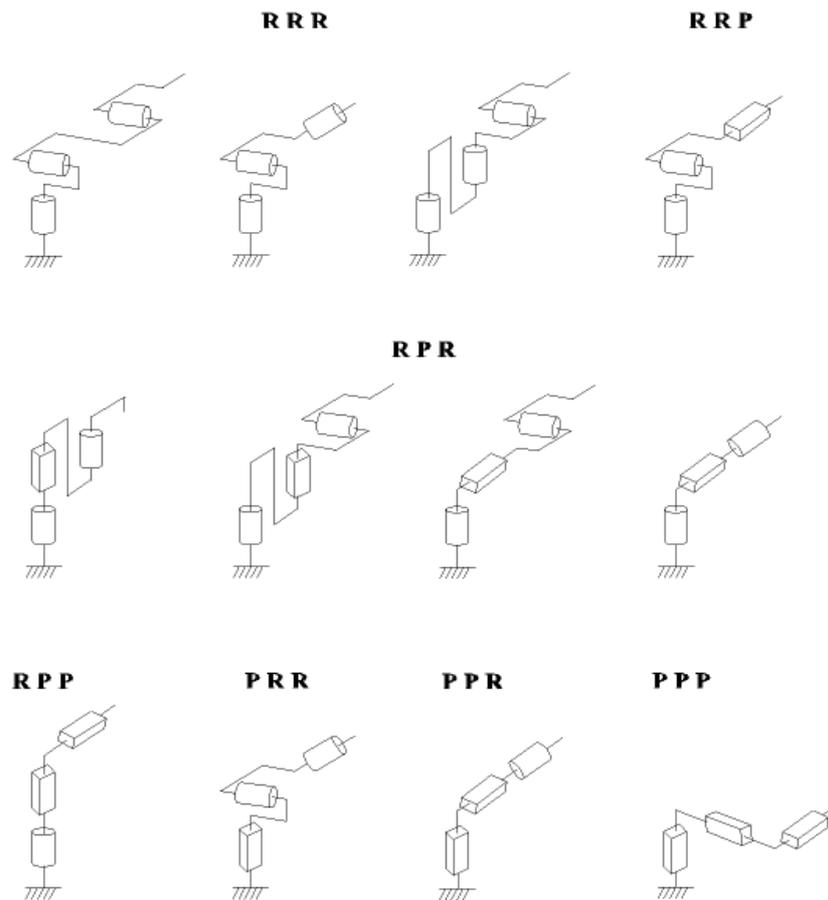


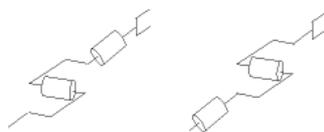
Figure 1. 8. 12 morphologies possibles de porteur

Dans la pratique, le *poignet* de type rotule est très répandu. Le robot, obtenu en lui associant un porteur à 3 ddl, est la structure la plus classique à 6 ddl. Elle permet d'assurer un découplage entre la position et l'orientation de l'organe terminal :

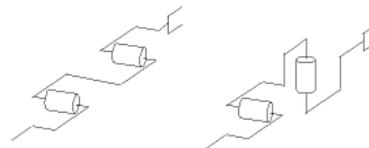
poignet à 1 axe



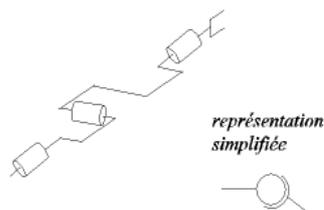
poignet à 2 axes concourants



poignet à 2 axes non concourants



poignet à 3 axes concourants (rotule)



poignet à 3 axes non concourants

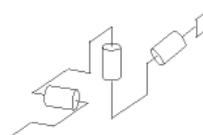


Figure 1. 9 Types de poignets

1.8. Architecture des systèmes robotiques

Un robot industriel contient plusieurs composants mécaniques et électriques agissant ensemble en tant que système. Le contrôleur contient un système d'exploitation et un logiciel qui dictent le fonctionnement et la communication du système. Les capteurs travaillent ensemble pour collecter des informations (localisation et positionnement).

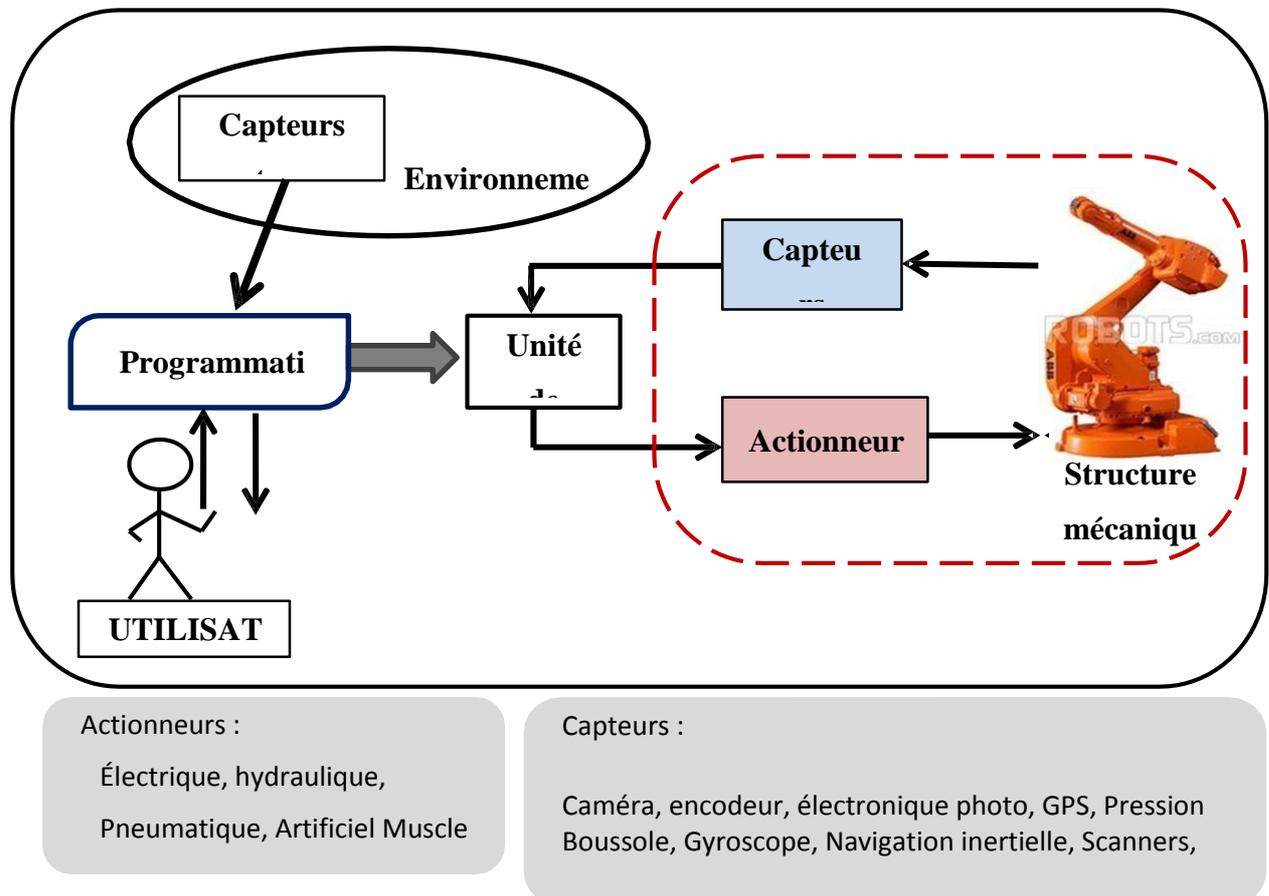


Figure 1. 10 Architecture des systèmes robotiques

1.8.1. Système Mécanique Articulé (S.M.A.)

Un mécanisme ayant une structure plus ou moins proche de celle du *bras humain*. Il permet de remplacer, ou de prolonger, son action.

Son *rôle* est d'amener l'organe terminal dans une pose (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération données.

Son *architecture* est une chaîne cinématique de corps, généralement rigides (ou supposés comme tels) reliés par des liaisons appelées articulations.

Sa *motorisation* est réalisée par des actionneurs électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux articulations par des systèmes appropriés (ex. réducteurs).

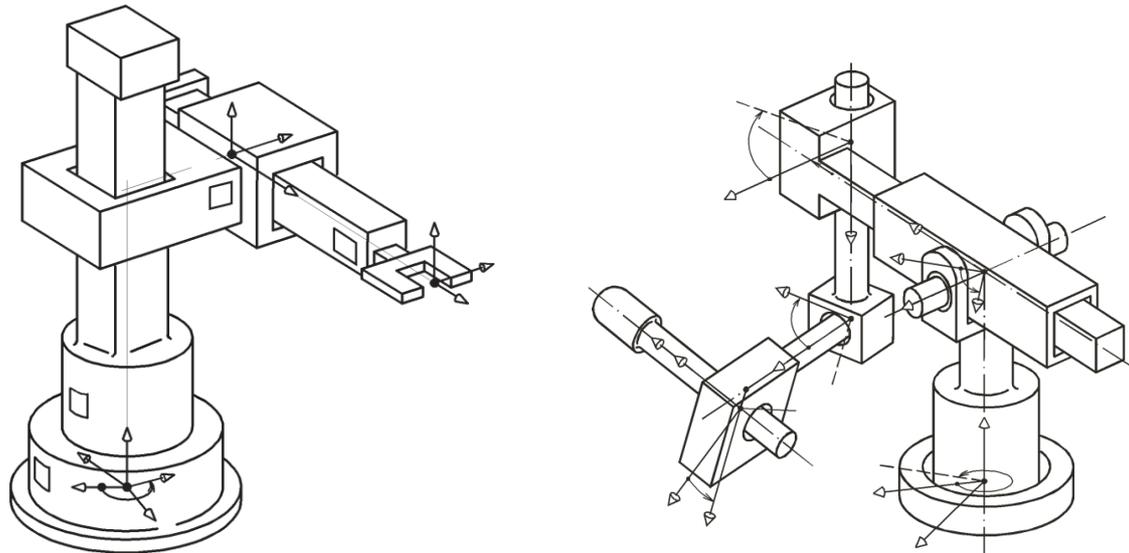


Figure 1. 11 Système Mécanique Articulé (S.M.A.)

1.8.2. Eléments de technologie

Les robots manipulateurs sont constitués par des éléments de guidage et des éléments de transmission qui lient entre les éléments (links) du robot. Les éléments de transmission sont actionnés par des actionneurs, les limites de tâches sont delimitées par des capteurs.

Les principaux éléments pour le fonctionnement d'un robot sont :

- Actionneurs
- Guidage et transmission
- Capteurs
- Interfaçage avec un contrôleur

Guidage et transmission

- Guidage = ce qui sert à contraindre le mouvement d'une pièce à une autre.
- Transmission = ce qui sert à transmettre la puissance mécanique de l'actionneur à la charge qu'il anime.
- Robot avec guidage et sans transmission = les corps du robot sont articulés mais le robot est passif, il n'a pas de capacités de se mouvoir.

Les problèmes du guidage

- Précision (jeu, déformations).
- Frottements que l'on peut limiter
 - En diminuant le coefficient de frottement des pièces qui glissent les unes sur les autres (choix des matériaux, états de surface, lubrification)
 - En évitant le glissement et en privilégiant le roulement sans glissement
- Résistance aux charges selon les directions Perpendiculaires aux mouvements.

1.8.3. Les composants mécaniques

Certaines liaisons dans les mécanismes n'utilisent pas le principe de contact direct entre les deux solides.

Grâce à l'interposition d'*éléments glissants* ou *roulants* entre les solides, il est possible d'obtenir des mouvements relatifs plus performants d'un point de vue énergétique.

a. Les coussinets

Ils permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison **pivot** ou **pivot glissant**.



Figure 1. 12 Coussinets

b. Les roulements à billes, à rouleaux ou à aiguilles

La modélisation du roulement seul sera développé plus tard, pour le moment nous considérerons que lorsque les roulements sont au moins au nombre de **deux** entre les deux solides qu'ils sont modélisables par une liaison **pivot**.

Exemple d'éléments roulants

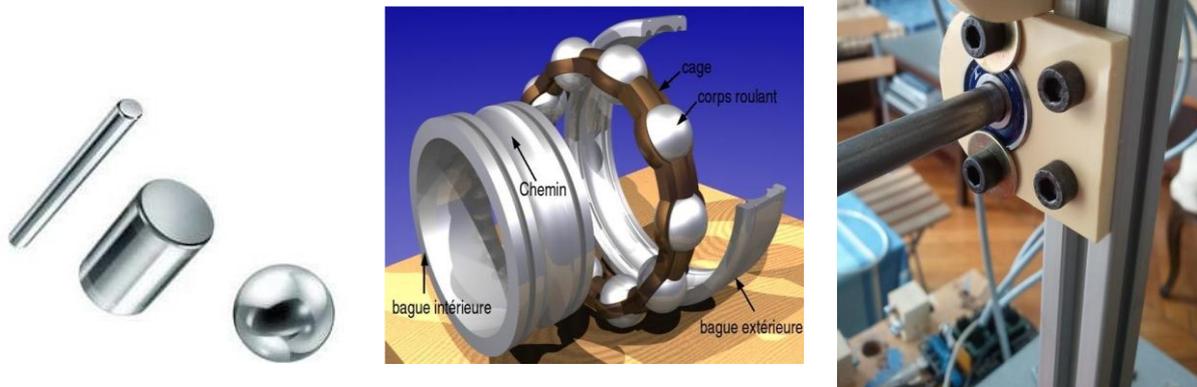
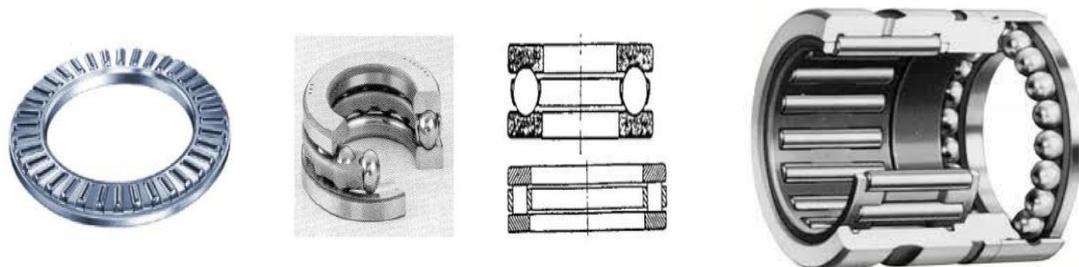


Figure 1. 13 Les roulements à billes, à rouleaux ou à aiguilles

c. Les butées à billes et à rouleaux

Elles permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison **pivot**.



Butées à billes et à rouleaux

Combinaison butée à billes et roulement à aiguilles

Figure 1. 14 Les butées à billes et à rouleaux

De très nombreuses variantes (Roulements à billes, à rouleaux, à aiguilles, à rotule, butées à billes, etc...)

d. Les douilles à billes ou à rouleaux

Elles permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison pivot glissant.



Figure 1. 15 La douille à billes

e. Les vis à billes

Elles permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison hélicoïdale.



Figure 1. 16 Vis à billes

f. Les guidages linéaires (à billes ou à rouleaux sur rails)

Ils permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison glissière.

- Pour des mouvements de translation.
- Mêmes principes de diminution des frottements.
- Rails de guidage lisses ou à billes
- Problèmes de porte-à-faux.

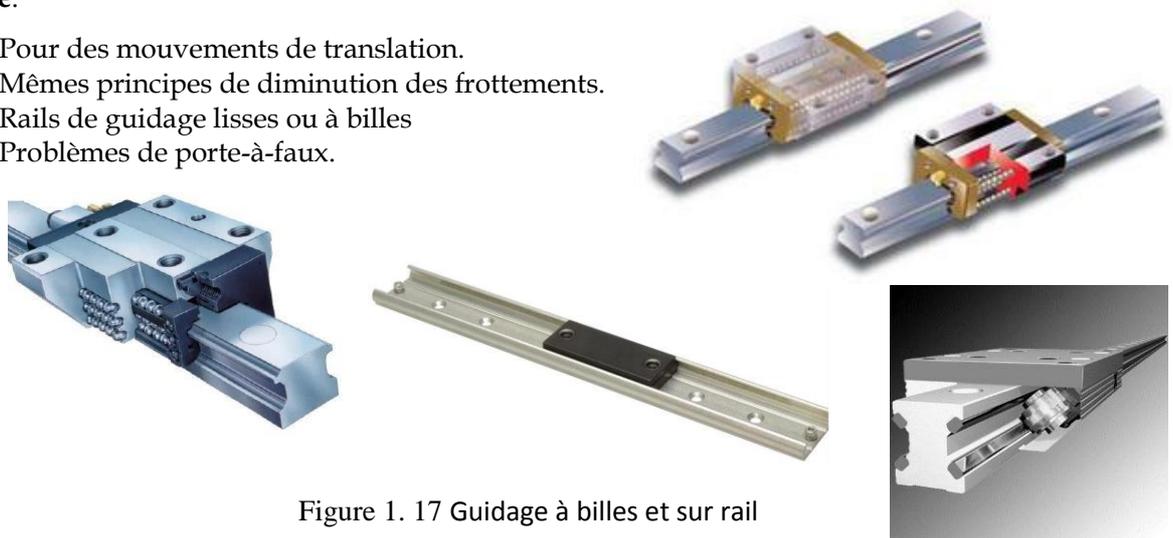


Figure 1. 17 Guidage à billes et sur rail

g. Les rotules lisses

Elles permettent d'obtenir un mouvement relatif entre deux solides modélisable par une liaison sphérique.



Figure 1. 18 Les rotules lisses

1.8.4. Les transmissions mécaniques

a. Transmission par obstacle : Engrenages

Utilisation :

Transmissions de faible et forte puissances.

Caractéristiques géométriques :

Les rayons primitifs des roues dentées : R_1 et R_2

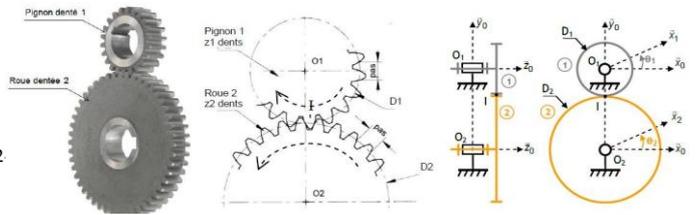


Figure 1. 19 Transmission par obstacle : Engrenages

b. Transmission par obstacles : Pignon crémaillère

Utilisation :

Transmissions de faible et forte puissances. Applications : direction de voiture.

Caractéristiques géométriques :

Le rayon primitif de la roue dentée : R .

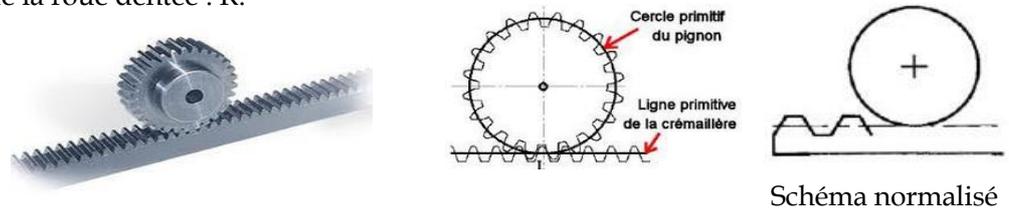


Figure 1. 20 Transmission par obstacle : Pignon crémaillère

c. Transmission par obstacles : Roue et vis sans fin

Utilisation :

Transmission entre arbres à axes non concourants. Irréversibilité possible → sécurité anti-retour (utile quand le récepteur peut devenir moteur : exemple : appareils de levage). Grand rapport de réduction (entre 5 et 150).

Inconvénient :

L'engrènement se fait avec beaucoup de glissement entre les dentures, donc usure, et rendement faible (60%). La vis supporte un effort axial important.

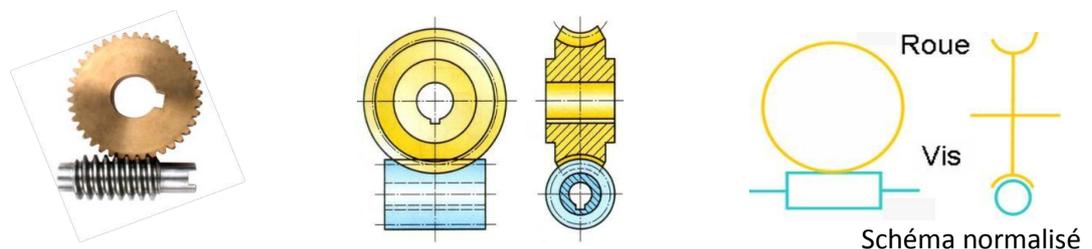


Figure 1. 21 Transmission par obstacle : Roue et vis sans fin

d. Transmission par lien flexible : pignons-chaîne

- Les liens flexibles sont particulièrement avantageux lorsqu'il s'agit de transmettre un mouvement de rotation entre deux axes parallèles très distants.
- Attention les roues ou poulies tournent dans le même sens (contrairement aux engrenages à contact extérieur).

Avantages : Transmission de couples très importants.

- Aucun glissement.

Inconvénients : Bruyant et nécessite une lubrification.



Schéma normalisé :

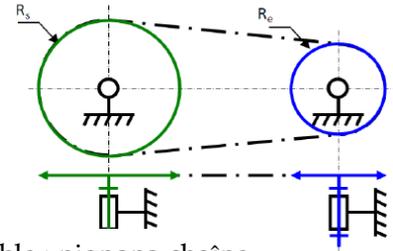


Figure 1. 22 Transmission par lien flexible : pignons-chaîne

e. Transmission par lien flexible : poulies-courroie

- La transmission de puissance par poulies-courroie se fait par l'intermédiaire de l'adhérence entre la courroie et les poulies.

Avantages :

- Rigidité en torsion assez faible, ceci permet leur utilisation lorsque les axes des poulies ne sont pas parallèles (possibilité d'utiliser des galets intermédiaires).
- Solution économique.
- Fonctionnement silencieux.
- Amortissement des à-coups grâce à l'élasticité des courroies.

Inconvénients :

- Matériaux des courroies non adaptés à des conditions difficiles (température élevée par exemple).
- Durée de vie limitée.
- Nécessite une surveillance périodique en vue du remplacement de la courroie.
- Glissement (sauf pour courroie crantée).

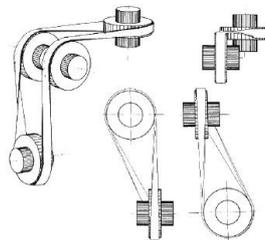


Schéma normalisé :

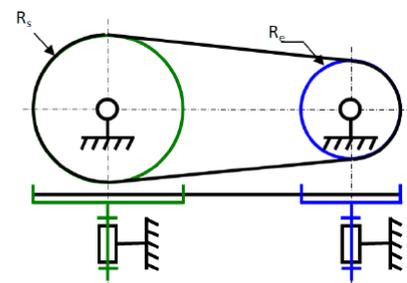


Figure 1. 23 Transmission par lien flexible : poulies-courroie

1.8.5. Technologies des moteurs et des actionneurs

Les actionneurs et les moteurs sont des dispositifs qui font fonctionner le robot "le muscle du robot". Pour la plupart des robots industriels, les actionneurs sont couplés aux liens de robot correspondante via un train d'engrenages. L'effet de la réduction de vitesse est en grande partie de découpler le système en réduisant le couplage entre les joints. Cependant, le présent des engrenages introduit des frictions, des contrecoups et une transmission conformité.

Les Actionneurs

Les articulations robotisées sont entraînées par des actionneurs :

- **Électriques** - sont les plus utilisés dans l'industrie, principalement par la disponibilité de l'énergie électrique et la facilité de contrôle
- **Hydrauliques** - utilisés lorsque des efforts importants sont nécessaires ; plus grand robots
- **Pneumatiques** - ne sont applicables que dans les opérations de manipulation où il n'y a pas besoin d'une grande précision en raison de la compression de l'air.

Actionneurs électriques

Les robots de petite et moyenne taille sont généralement alimentés par des actionneurs électriques via des trains d'engrenages utilisant des servomoteurs et des moteurs pas à pas. Les moteurs à courant continu sont les plus couramment utilisés, bien que pour les robots plus grands, des moteurs à courant alternatif puissent être utilisés. Une nouvelle conception basée sur des entraînements directs (sans train d'engrenages) est en cours de développement.

Avantages :

- ✓ Meilleure précision et répétabilité
- ✓ Nécessite moins d'espace au sol
- ✓ Plus vers des travaux précis tels que des applications d'assemblage

Inconvénients :

- Généralement pas aussi rapide et puissant que les robots hydrauliques
- Cher pour les gros et puissants robots, peut devenir un risque d'incendie

Moteurs brushless Maxon™



Moteur asynchrone
Siemens Simotic™
Commande vectorielle



Actionneurs hydrauliques

Les plus gros robots sont généralement alimentés par des actionneurs hydrauliques. Le système d'entraînement hydraulique peut fournir un mouvement de rotation (actionneurs à palettes rotatifs) et un mouvement linéaire (pistons hydrauliques).

Avantages :

- ✓ Plus de ratio poids/résistance
- ✓ Peut aussi actionner à une vitesse supérieure

Inconvénients :

- Exiger une grande espace de travail
- Tendance à la fuite d'huile

Exemple

Schilling TITAN 4TM
Charge utile : 450kg
Masse du robot : 100kg



Actionneurs pneumatiques

Généralement utilisé pour les robots plus petits qui possèdent moins de degrés de liberté (2 à 4 mouvements articulaires). Ils sont limités aux tâches de sélection avec des cycles rapides. Le système d'entraînement pneumatique peut être appliqué à l'actionnement de dispositifs à piston pour fournir des mouvements linéaires. Les mouvements de rotation peuvent être obtenus par des actionneurs rotatifs.

Avantages :

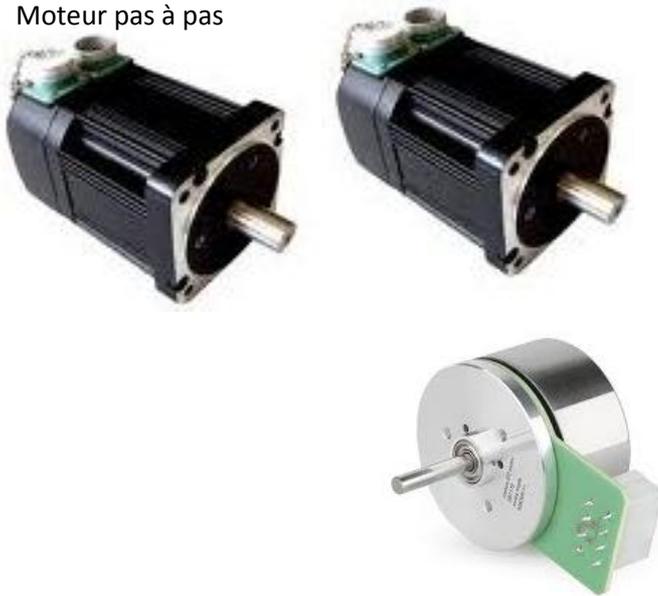
- ✓ Options technologiques moins chères et plus basses pour le contrôle de la vitesse.
- ✓ Sûr à utiliser et léger

Inconvénients :

- Exiger une grande espace de travail
- Tendance à la fuite d'huile

Exemple : Positionnement des moteurs d'un robot à 3ddl.

Moteur pas à pas



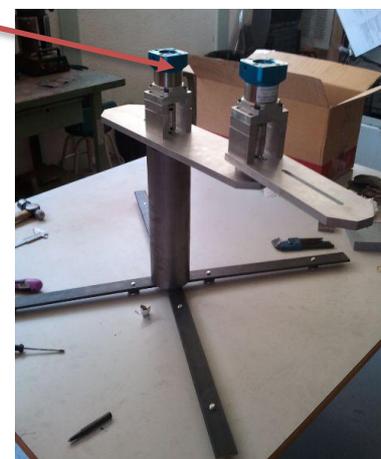
Moteur



Conception et mise en œuvre d'un bras de robot SCARA à 3ddl

Assemblage du robot Scara à 3ddl

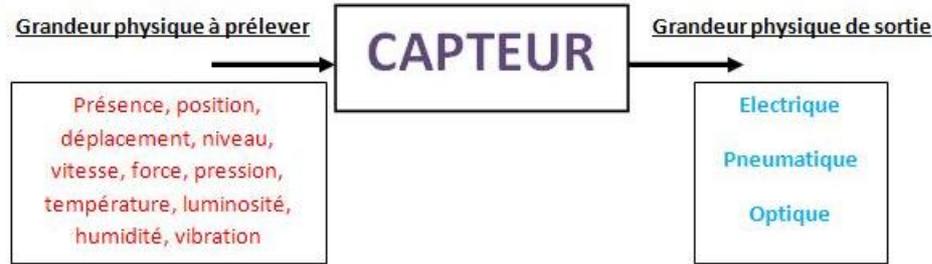
- Deuxième articulation ajustée
- Ajouter des nervures aux pieds
- Changement de roulement en premier lieu par contact angulaire fixe
- Conception du système de transport par câble
- Assembler le bras de robot



Les deux premières articulations

1.8.6. Les capteurs

Les capteurs et les transducteurs sont des outils très importants dans la conception d'un robot. Grâce à eux, le robot peut percevoir la dimension physique de son environnement afin d'effectuer certains



mouvements ou actions et prendre des mesures exactes.

D'une manière générale, les capteurs peuvent être classés en trois catégories selon leur fonction et leur utilisation :

- **Capteurs thermiques (chaleur)**

Un **capteur de température** sert à détecter des symptômes caractéristiques de l'évolution de la température dans un espace ou une dimension spécifique. Ce genre de capteurs inclut les **thermistances**, les thermocouples, les phototransistors, les photodiodes, les **photomultiplicateurs** (tube qui détecte les photons), les **hygromètres** (servant à mesurer l'humidité), les pyromètres infrarouge (mieux connus sous le nom de thermomètres laser), etc.

- **Capteurs mécaniques**

Un **capteur mécanique** détecte les changements de mouvement mécanique, tels que le déplacement ou le changement de position, le mouvement rectiligne et circulaire, la pression, le débit, le niveau, etc. Par exemple, le potentiomètre sert notamment à contrôler le volume sur une radio, le **Tube de Bourdon** mesure la pression, etc.

- **Capteurs optiques (lumière)**

Un **capteur optique** ou de lumière détecte les variations de lumière provenant de la source lumineuse, la réflexion de la lumière ou sa réfraction lorsqu'elle touche un objet. Parmi les exemples, on peut citer la cellule photoélectrique (mesurant une intensité lumineuse), le phototransistor, la photodiode (qui détecte le rayonnement optique), le photomultiplicateur, et le pyromètre infrarouge (mesurant la température d'un objet à distance).

Exemple : Positionnement des capteurs dans un robot.

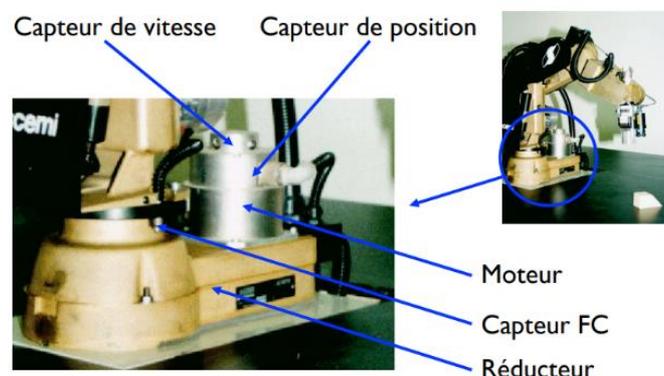
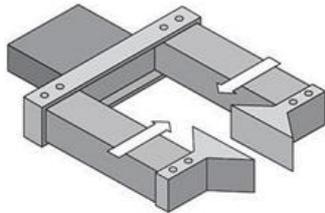


Figure 1. 24 Positionnement des capteurs

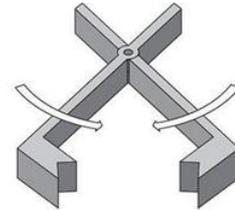
1.8.7. Les effecteurs (Actionneurs de type pince)

L'effecteur (mâchoire, poignet, torche de soudage, ou autre appareil) d'un robot est comparable à la main humaine. Cependant, il n'est pas en mesure de simuler ses mouvements, ce qui les limite à une gamme d'opérations. La forte demande a conduit au développement de griffes capables de manipuler des objets de différentes tailles, formes et matériaux. Ces griffes sont divisées en plusieurs types de classes :

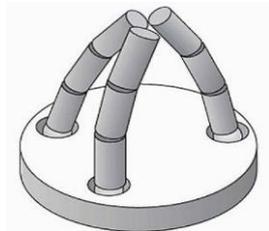
- Pince (griffe) à deux doigts ;
- Pince à trois doigts ;
- Pince pour objets cylindriques ;
- Pince pour objets fragiles ;
- Pince articulée ;
- Pince électromagnétique,
- Adaptateur de griffe automatique.



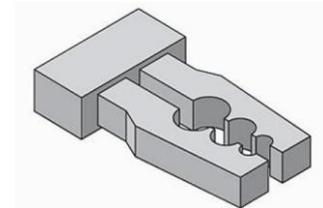
Pince à mouvement parallèle



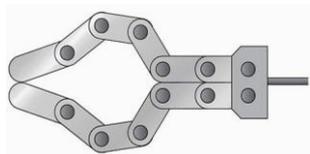
Pince à mouvement pivot



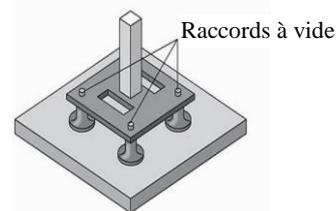
Pince à trois doigts



Pince pour objets cylindriques



Pince articulée



Pince de contact

Figure 1. 25 les différentes pinces pour les robots

1.8.8. Avantages & Inconvénients des robots industriels

Avantages :

- Augmentation des taux de production.
- Amélioration de la qualité du produit.
- Réduction du gaspillage de matériel.
- Réduction des accidents.
- Faible taux d'emploi (réduite de la main-d'œuvre).
- Plus grande flexibilité et programmabilité (d'évolutivité).

Inconvénients :

- Remplacement du travail humain.
- Les robots représentent un coût initial coûteux.
- Ne peut faire que ce qui lui est demandé ; ni plus ni moins.
- Plus grand chômage.

2. Modélisation des robots à chaînes simples ouvertes

2.1. Introduction

Les **robots manipulateurs** sont en général des mécanismes à chaîne ouverte, qui possèdent un ou plusieurs degrés de mobilité. Pour l'analyse cinématique, statique ou dynamique de ces systèmes, La théorie des mécanismes doit être étudiée car c'est la base de l'étude et dimensionnement des mécanismes.

La conception d'un mécanisme ou d'un robot en vue de sa réalisation industrielle comporte plusieurs étapes. Avant d'aboutir à la maquette numérique du produit définitif, il est nécessaire d'effectuer une analyse de la théorie des mécanismes, qui s'appuie sur une représentation du réel appelée Modélisation. La modélisation d'un mécanisme qui s'intéresse à la représentation et l'étude cinématique et statique de ce mécanisme. Dans ce chapitre, l'étude est composée en deux parties, l'une est des rappels généraux sur la théorie des mécanismes, et l'autre, consiste à la modélisation des robots sériels, dont on se base sur l'étude de types des robots ainsi l'analyse géométrique et cinématique de ce dernier.

2.2. Rappels sur la théorie des mécanismes

Théorie des mécanismes (TMM) est un ensemble de méthodes qui permettent d'étudier les mécanismes et les structures, en vue de les comprendre, de les améliorer ou de les concevoir. Ces méthodes reposent essentiellement sur deux branches de la **mécanique**, la **statique** et la **cinématique**, et ce chapitre n'en abordera que les principaux aspects.

2.2.1. Définitions préliminaires

- On appelle **pièce** tout sous-ensemble rigide faisant partie d'un mécanisme ou d'une structure, quelle que soit sa réalisation.
- Une **liaison** résulte de la mise en contact de deux pièces par l'intermédiaire de **surfaces fonctionnelles** appropriées. On attend d'une liaison qu'elle transmette certains efforts d'une pièce à l'autre, ou qu'elle interdise certains mouvements d'une pièce par rapport à l'autre. On dit bien « interdise » et non pas « autorise ».
- Les **mécanismes** et les **structures** résultent de l'agencement d'éléments rigides liés les uns aux autres ; ils comportent donc un nombre entier de pièces et un autre nombre entier, généralement différent, de liaisons.
- Dans un mécanisme formé de $n + 1$ pièces, on appelle généralement **socle** ou **bâti** celle qui sert de référence pour étudier, par la **statique** ou la **cinématique**, le comportement des n autres pièces.

2.2.2. Hypothèses et limites de l'étude

- Les **pièces** sont parfaitement indéformables : la distance de deux points quelconques A et B appartenant à une même pièce est donc rigoureusement invariable. On **néglige ici l'élasticité**, en déduisant immédiatement qu'un ressort ne doit jamais être considéré comme une pièce.
- Les **surfaces fonctionnelles** par lesquelles les pièces viennent en **contact** sont **géométriquement parfaites**. On néglige cette fois les **tolérances de forme** et d'**état de surface**.
- Les **liaisons** créées entre les pièces sont parfaites, c'est-à-dire qu'elles sont réalisées **sans jeu, ni serrage, ni frottement**. Les **ajustements** et l'**usure** sont **exclus de l'étude**.

2.2.3. Modélisation des mécanismes

La modélisation d'un mécanisme ou manipulateur consiste à passer d'un mécanisme réel ou de sa représentation réelle (plan, schéma...) à un schéma cinématique simplifié dans lequel est représenté :

- Chaque classe d'équivalence par un ou plusieurs traits.
- Chaque liaison entre pièce par une liaison normalisée.

A partir d'un mécanisme réel, il faut donc:

- Identifier les différentes **classes d'équivalence**
- Identifier les **liaisons** entre ces **classes d'équivalence**
- Modéliser le **mécanisme** à l'aide d'un **schéma cinématique**

a) Classes d'équivalence

Une **classe d'équivalence** est un ensemble de pièces cinématiquement équivalentes, c'est à dire qui peuvent être représentées toutes ensemble par une seule et même pièce équivalente appelée **classe d'équivalence**.

b) Modélisation des liaisons mécaniques

Liaisons normalisées

Les **liaisons normalisées** découlent des contacts entre les différentes **classes d'équivalence**. Les différents **types de contact** réalisés sont:

- Plan sur plan
- Cylindre sur plan ou sur cylindre
- Sphère sur sphère quelconque.

L'identification des **surfaces en contact** entre les **classes d'équivalence** doit conduire à la détermination des degrés de liberté (DDL), c'est à dire les **mouvements possibles** entre les deux **pièces** suivant **six directions de l'espace** (**3 en translation** et **3 en rotation**).

A partir de cette analyse, on propose un modèle de la **liaison** parmi les **liaisons normalisées**. Ce modèle représente le réel. Les hypothèses qui lui sont associées sont les suivantes:

- Pas de jeu dans les liaisons
- Contacts supposés maintenus,

c) Caractéristiques géométriques des contacts :

Les deux solides en contact sont supposés indéformables.

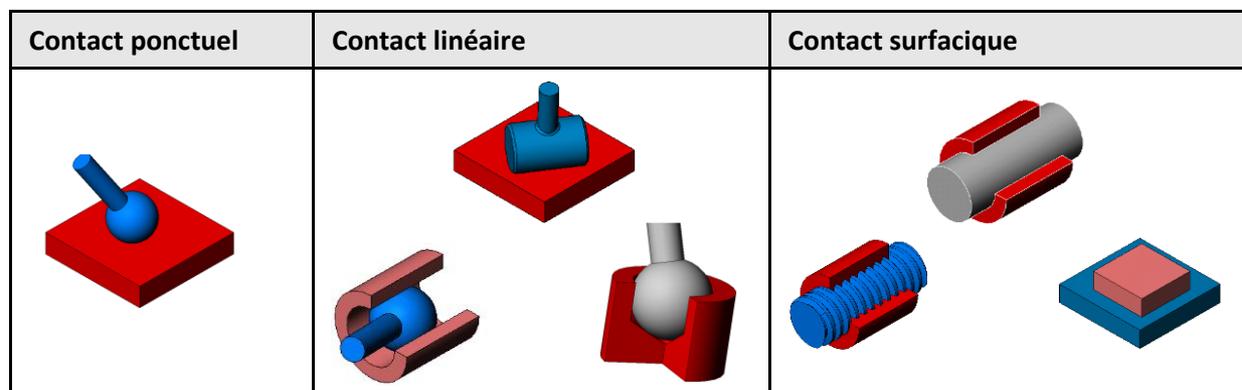
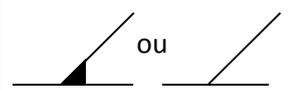
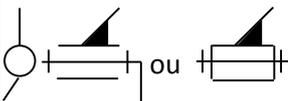
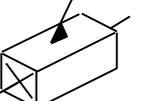
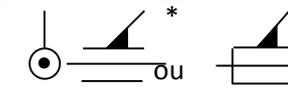
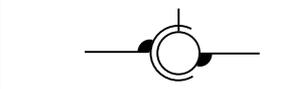
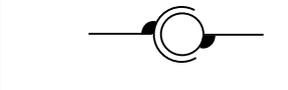
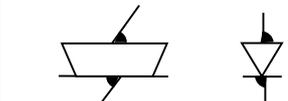
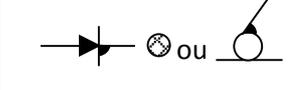
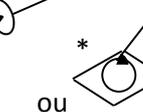


Figure 2. 1 Type de contact entre deux solides

Tableau des liaisons normalisées.

LES LIAISONS MECANQUES ELEMENTAIRES

Nature liaison et repère associé	Schématisation plane	Schématisation spatiale	Torseur cinématique	Torseur des actions mécaniques
encastrement			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = 0 \\ \vec{V}(A) = 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$
liaison pivot d'axe (A, x)			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$
liaison glissière d'axe (A, x)			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = 0 \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$
liaison hélicoïdale d'axe (A, x)			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \end{Bmatrix}_A$ $u = k p$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$ $L = -k X$
liaison pivot glissant d'axe (A, x)			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$
liaison sphérique à doigt d'axe (A, x)			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} \\ \vec{V}(A) = 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$
liaison appui plan de normale (A, x)			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} \\ \vec{V}(A) = v\vec{y} + w\vec{z} \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} \\ \vec{M}(A) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$
liaison sphérique de centre A			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ \vec{V}(A) = 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = 0 \end{Bmatrix}_A$
liaison linéaire rectiligne de normale (A, x)			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} \\ \vec{V}(A) = v\vec{y} + w\vec{z} \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} \\ \vec{M}(A) = N\vec{z} \end{Bmatrix}_A$
liaison linéaire annulaire d'axe (A, x)			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ \vec{V}(A) = u\vec{x} \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = 0 \end{Bmatrix}_A$
liaison ponctuelle de normale (A, x)			$\begin{Bmatrix} \vec{\omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ \vec{V}(A) = v\vec{y} + w\vec{z} \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} \vec{R} = X\vec{x} \\ \vec{M}(A) = 0 \end{Bmatrix}_A$

A est le point caractéristique de la liaison. R(x,y,z) est le repère caractéristique de la liaison.

* : nouvelle normalisation

d) Etapes de la modélisation

Pour modéliser un mécanisme, après avoir identifié les classes d'équivalence et les liaisons entre elles, on procède dans l'ordre suivant :

- Dessiner un repère
- Placer les éléments géométriques des liaisons entre les classes d'équivalence
- Dessiner les liaisons normalisées
- Dessiner les classes d'équivalence

Les classes d'équivalence sont représentées à l'aide d'un trait ou d'un ensemble de traits reliés entre eux.

Dans le cas d'un bâti, il est possible de ne pas représenter la classe d'équivalence d'un seul tenant. Dans ce cas, chaque portion du bâti devra contenir le symbole de fixation associé.



Les traits doivent être liés aux lieux géométriques des liaisons entre la classe d'équivalence étudiée et les autres classes d'équivalence du mécanisme.

▪ **Modélisation des liaisons**

Lorsque chaque classe d'équivalence est modélisée, les lieux géométriques des liaisons avec les autres pièces du mécanisme sont normalement positionnés, il reste alors à ajouter le modèle de chaque liaison usuelle.

▪ **Paramétrage de la position d'un solide (pièce)**

Soit un solide S_1 est lié au repère $R_1(O_1x_1y_1z_1)$.

Pour définir la position de ce solide par rapport à un repère de référence $R_0(O_0x_0y_0z_0)$, il faut connaître :

- La position de l'origine O_1 dans R ,

L'orientation de la base $(Ox_1y_1z_1)$ dans la base $(O_0x_0y_0z_0)$

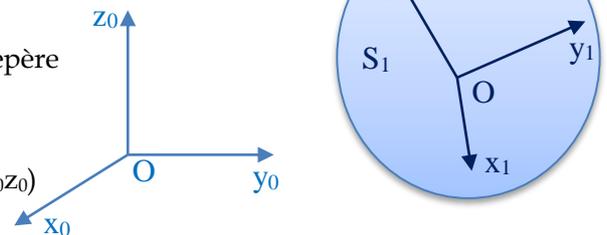


Figure 2. 2 Paramétrage de la position d'un solide S_1

Note : Tous les repères sont orthonormés directs.

Position de l'origine O_1

Selon ce problème, on utilisera les coordonnées cartésiennes ou cylindriques.

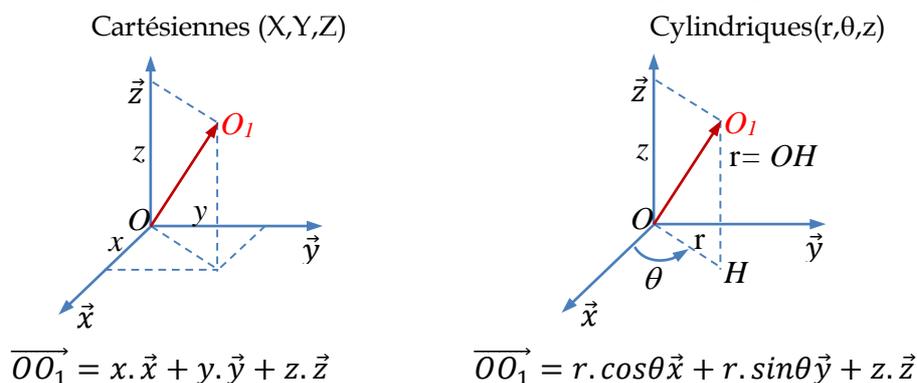


Figure 2. 3 Paramétrage d'une position

Paramétrage d'un mécanisme

Pour pouvoir analyser la structure d'un mécanisme, il est nécessaire de comprendre la description géométrique qui en est donnée, la plupart du temps, sous forme de schémas plus ou moins détaillés.

Définition :

On appelle «**paramétrer**» l'activité qui consiste à définir variables et invariants.

D'une manière générale, l'évaluation des variations s'apprécie au cours du temps et il n'est pas inutile de préciser la définition précédente :

- Les **variables** sont des quantités qui peuvent varier au cours du temps ;
- Les **invariants** sont des quantités qui restent constantes au cours du temps.

Pour paramétrer un mécanisme (plan/3D), il faut définir :

- Les points des pièces (A, B, C,...)
- Les numéros des pièces (0, 1, 2, 3, ...)
- Les repères liés à chaque pièces ($\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i$)
- Les longueurs fixes
- Les angles variables θ_{ij} associés à chaque liaison pivot et leurs flèches orientées
- Les longueurs variables λ_{ij} avec la convention de signe définie en posant la définition associé : $\vec{AB} = \lambda_{ij}\vec{x}_k$

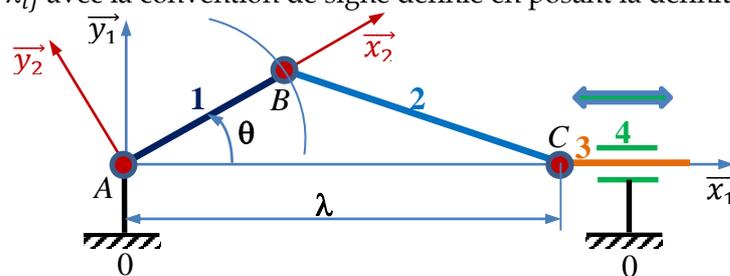


Figure 2. 4 Système bielle manivelle

▪ Schéma cinématique :

Le schéma cinématique doit permettre la compréhension des différents mouvements des mécanismes.

Pour établir ce schéma, il faut :

- A partir du plan d'ensemble, déterminer les classes d'équivalences cinématique (groupes de pièces liées entre elles par encastrement). Choisir un repère par solide
- Analyser les liaisons et la nature des surfaces en contact
- Positionner les liaisons schématisées selon l'orientation qu'elles ont sur le dessin d'ensemble.
- Paramétrer la position angulaire des différents solides.

Exemple: schéma cinématique 2D/3D d'un robot cartésien

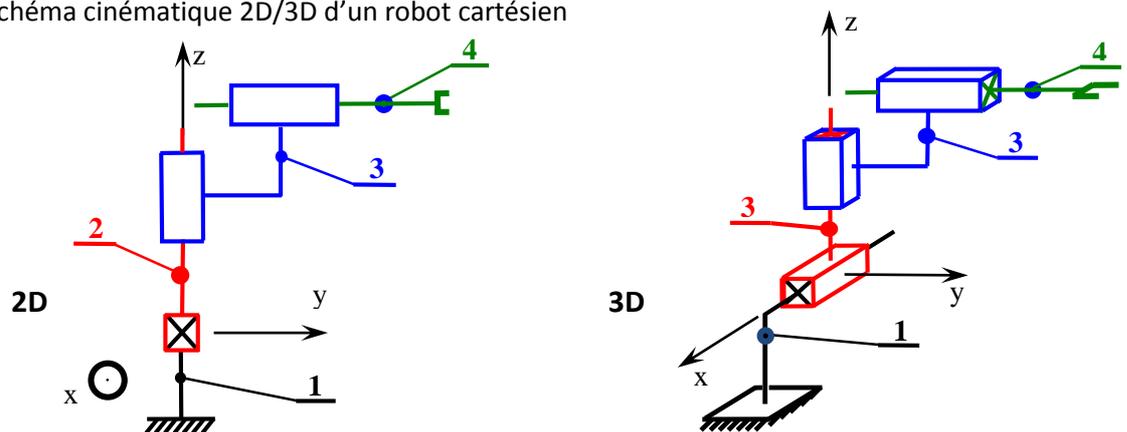


Figure 2. 5 Schémas cinématique d'un robot cartésien

▪ **Graphe des liaisons**

Dans le **graphe des liaisons**, les **classes d'équivalence cinématiques** sont représentées par des **nœuds**. Les **liaisons** sont représentées par des **arcs**. Son but est d'analyser la **structure du mécanisme**.

Le **graphe des liaisons**, ou graph de structure, est un outil indispensable pour la modélisation des **mécanismes ou robots**. Il permet d'élaborer des stratégies de résolution des systèmes.

On définit 3 types de graphes caractéristiques :

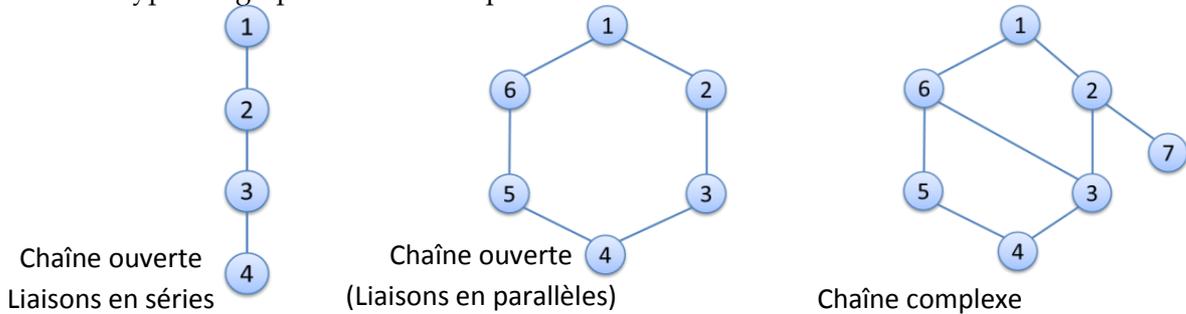


Figure 2. 6 Graphe des liaisons

Exemple de chaîne ouverte continue : Figure 2.7. Robot ERICC 3

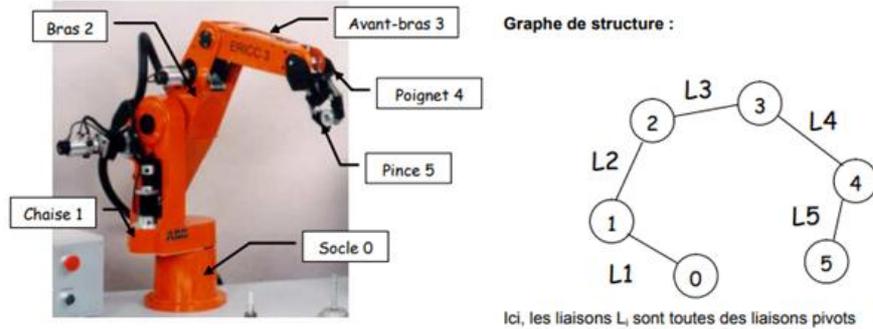


Figure 2. 7 Robot ERICC 3

Exemple de chaîne fermée simple : Figure 2.8. Vérin électrique

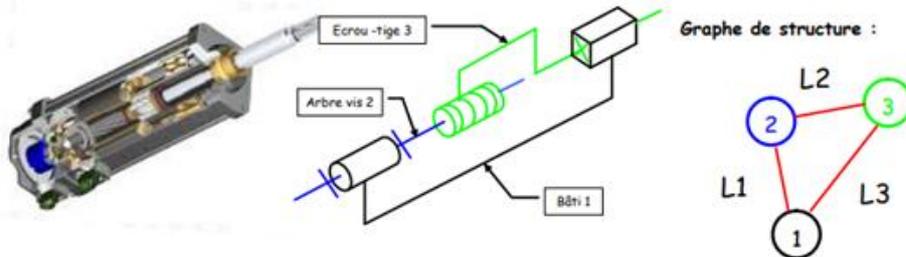


Figure 2. 8 Vérin électrique

Exemple de chaîne fermée complexe : Figure 2.9. Positionneur 6 axes

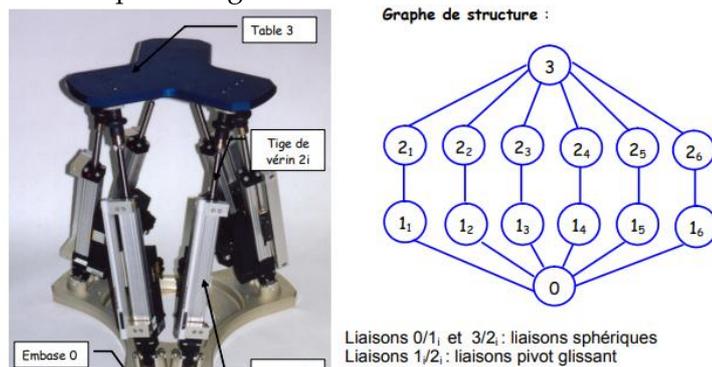


Figure 2. 9 Positionneur 6 axes

▪ Modélisation des liaisons mécaniques

Torseurs associés à une liaison élémentaire

On suppose que les liaisons entre solides sont parfaites, c'est-à-dire que :

- les surfaces en contact sont géométriquement parfaites
- il n'y a pas de frottement
- le contact est supposé bilatéral

Chaque liaison élémentaire autorise un comportement mécanique de l'un des solides par rapport à l'autre. Des torseurs traduisent ce comportement :

Le torseur statique associé :

$$\{\mathcal{T}_{S(i/i-1) A,R}\} = \begin{Bmatrix} X_{(i/i-1)} & L_{(i/i-1)} \\ Y_{(i/i-1)} & M_{(i/i-1)} \\ Z_{(i/i-1)} & N_{(i/i-1)} \end{Bmatrix}_{A,R}$$

Le torseur cinématique associé :

$$\{\mathcal{T}_{C(i/i-1) A,R}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{(i/i-1)} & U_{(i/i-1)} \\ \beta_{(i/i-1)} & V_{(i/i-1)} \\ \gamma_{(i/i-1)} & W_{(i/i-1)} \end{Bmatrix}_{A,R}$$

Exemple de Liaison $L_{i-1,i}$ pivot d'axe (A,x)

Le torseur cinématique associé :

$$\{\mathcal{T}_{C(i/i-1) A,R}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{(i/i-1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R}$$

Le torseur statique associé :

$$\{\mathcal{T}_{S(i/i-1) A,R}\} = \begin{Bmatrix} X_{(i/i-1)} & 0 \\ Y_{(i/i-1)} & M_{(i/i-1)} \\ Z_{(i/i-1)} & N_{(i/i-1)} \end{Bmatrix}_{A,R}$$

2.3. Description des chaînes cinématiques simples et ouvertes

- Seules les deux liaisons simples utilisées : **Pivot** et **Glissière**
- Description effectuée à partir de la **base du manipulateur (bâti 0)**
- Chaque **solide S_i** est attaché à S_{i-1} par la **paire cinématique L_i** et au solide S_{i+1} par la **paire L_{i+1}**

2.3.1. Modélisation d'un Bras robot

2.3.1.1. Le bras mécanique

Le bras du robot effectue des mouvements dans l'espace en transférant des objets et des outils d'un point à un autre, chargé par le contrôleur et informé de l'environnement par des capteurs. Au bout du bras se trouve un actionneur utilisé par le robot pour effectuer ses tâches.

- Chaque bras de robot est composé d'une série de **liens** et d'**articulations**, l'articulation reliant deux liens permettant le mouvement relatif entre elles,
- Chaque robot a une **base fixe** et le premier lien est attaché à cette base
- La mobilité des robots dépend du nombre de liens et d'articulations dont ils disposent.

2.3.1.2. Types d'articulations

La plupart des bras du robot sont constitués par des articulations pivots et glissantes, bien que certains incluent une rotule.

Les trois principaux types d'articulations sont :

- Articulations prismatiques (P) ;
- Articulations rotoïdes (R) ;
- Articulations à rotule.

- **Articulations prismatiques**

Ce type d'articulation permet un mouvement linéaire entre deux liens. Il est composé de deux liens alignés l'un dans l'autre, un lien interne glissant à travers l'extérieur créant un mouvement linéaire.

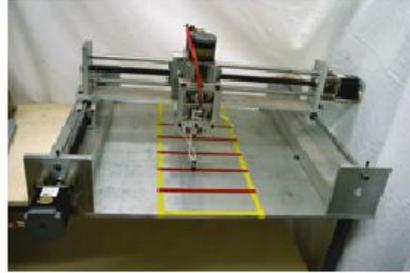
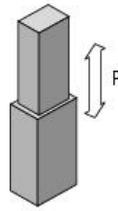


Figure 2. 10 Articulations prismatiques – Robot cartésien 3P.

- **Articulations Pivot**

Cette articulation permet des mouvements de rotation entre deux liens. Ces deux liens sont reliés par une charnière commune, une partie se déplaçant dans un mouvement par rapport à l'autre, comme illustré à la figure. Les articulations pivots sont utilisés dans de nombreux outils et appareils, tels que les ciseaux, les essuie-glaces et le casse-noix.

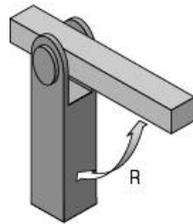


Figure 2. 11 Articulation pivot– Robot industriel 6R

- **Articulations à rotule**

Cette connexion se comporte comme une combinaison de trois articulations en rotation, permettant des mouvements de rotation autour des trois axes.

Ces articulations sont utilisées sur un petit nombre de robots, en raison de la difficulté d'activation. Cependant, pour avoir les performances d'une articulation à rotule, de nombreux robots incluent trois articulations rotatives distinctes dont les axes de mouvement se coupent en un point, comme illustré à la figure ci-contre.

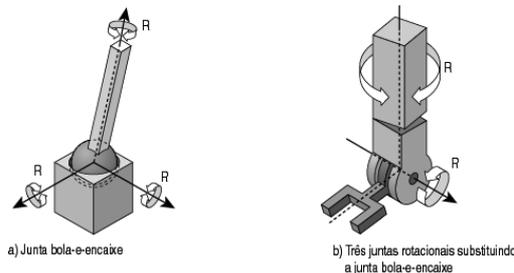


Figure 2. 12 Articulation à rotule – équivalence d'une articulation à rotule

2.3.2. Configuration de robot industriel

Au fil des années, les fabricants de robots ont mis au point de nombreux types de robots de configurations et de conceptions différentes, afin de fournir une variété de configurations spatiales et de volumes de travail. La majorité de ces manipulateurs se trouvent dans l'une des sept configurations suivantes : cartésien (PPP), cylindrique (RPP), sphérique (PRP), SCARA (RRP), Articulate/Revolute (RRR) et robot. L'enveloppe de travail ou le volume de travail est défini comme l'espace dans lequel le robot peut manipuler l'extrémité de son poignet. La forme du volume de travail est déterminée par le type de configuration du robot.

Ci-dessous, nous allons expliquer chacun de ces robots séparément :

1- Configuration de type cartésien (PPP) (X Y Z)

Il comporte trois articulations prismatiques (PPP), ce qui donne un mouvement composé de trois translations dont les axes de mouvement coïncident avec le système de coordonnées de référence cartésien (X, Y, Z). (L'alternative à ce type) Une variante de ce type de robot est la configuration de type Portique. Le volume de travail généré est un parallélépipède.

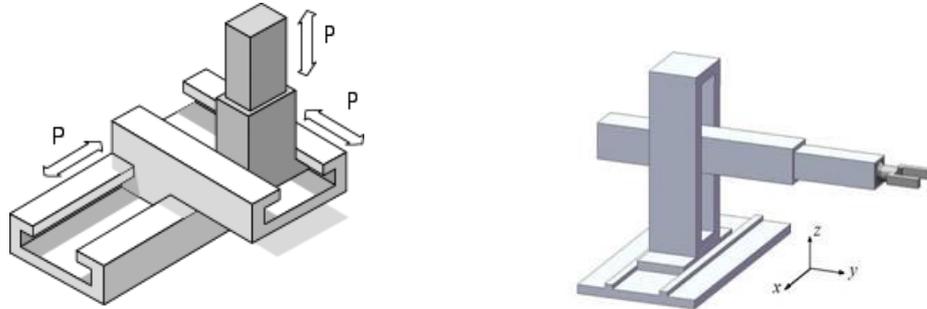


Figure 2. 13 Structure d'un robot cartésien

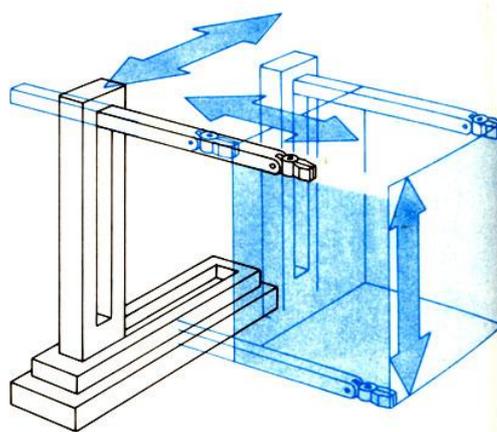


Figure 2. 14 Volume de travail du robot cartésien

Avantages :

- ✓ 3 axes linéaires
- ✓ Facile à visualiser
- ✓ Structure rigide
- ✓ Facile à programmer hors ligne

Inconvénients :

- Permet atteindre que les objets en face de lui.
- Nécessite un grand espace dans la zone de travail
- Les axes sont difficiles à sceller

2- Configuration de type cylindrique (RPP) (θ r Z)

Dans cette configuration, les axes de mouvement peuvent être décrits dans le système de coordonnées de référence cylindrique. Il est formé de deux articulations prismatiques et d'une articulation pivot (PPR), composant les mouvements de deux translations et d'une rotation. Le volume de travail généré est cylindrique.

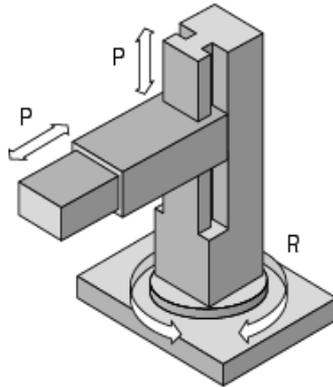


Figure 2. 15 Structure d'un robot cylindrique

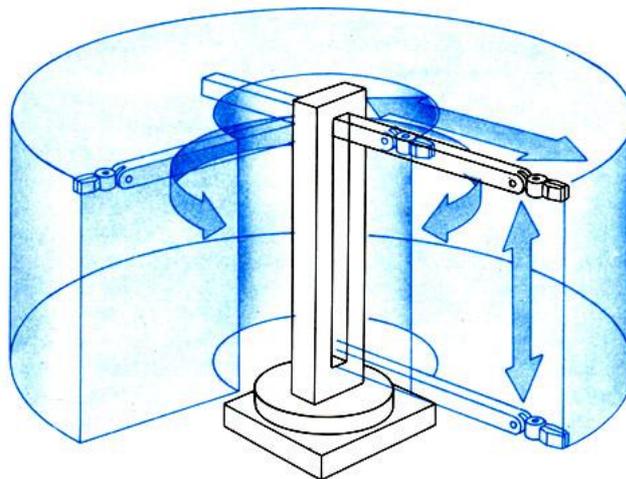


Figure 2. 16 Volume de travail du robot cylindrique

Avantages :

- ✓ 2 axes linéaires, 1 'axe de rotation
- ✓ Peut atteindre tout autour de lui-même
- ✓ Portée et hauteur des axes rigides

Inconvénients :

- Ne peut pas atteindre au-dessus de lui-même
- L'axe de rotation de la base est moins rigide qu'un axe linéaire
- Ne sera pas atteindre les obstacles

3- Configuration de type sphérique (RRP), ($\theta \beta Z$)

Dans cette configuration, les axes de mouvement forment un système de coordonnées de référence polaires, par l'intermédiaire d'une articulation prismatique et de deux articulations rotatives (PRR), formant des mouvements d'une translation et de deux rotations. Le volume de travail généré est approximativement sphérique.



Figure 2. 17 Structure d'un robot sphérique

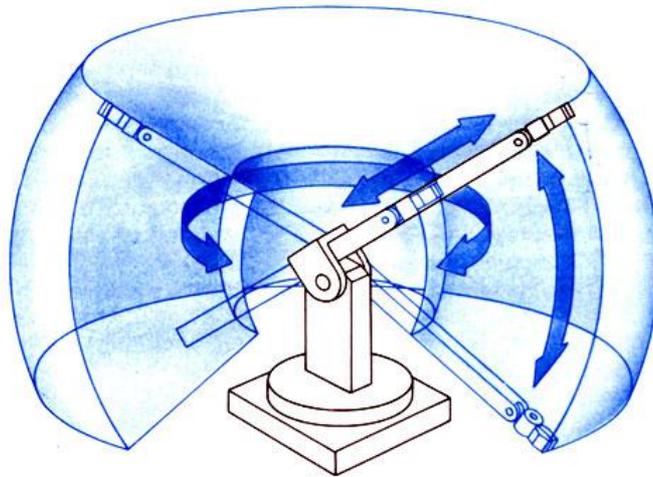


Figure 2. 18 Volume de travail du robot sphérique

Avantages :

- ✓ 1 axe linéaire, 2 axes de rotation
- ✓ Longue portée horizontale

Inconvénients :

- Ne peut pas contourner les obstacles
- Généralement une portée verticale courte

4- Configuration de type SCARA (RRP ou PRR), ($\theta \ \varphi \ Z$)

Dans cette configuration, le robot comporte deux articulations pivot (R) disposées en parallèle. Pour obtenir un mouvement dans un plan et une articulation prismatique (P), perpendiculaire à ce plan (PRR), présentant ainsi une translation et deux rotations. Il est généralement utilisé dans des tâches d'assemblage automatisées. Le volume de travail est approximativement cylindrique.

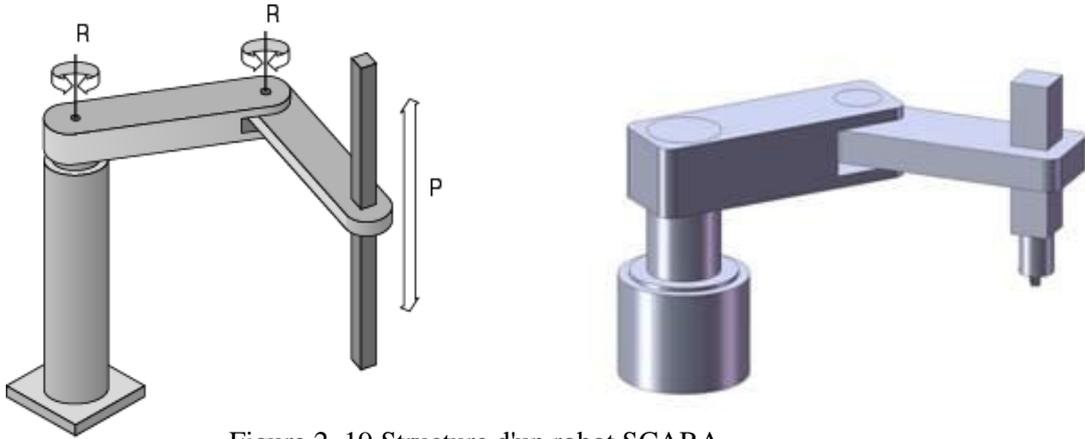


Figure 2. 19 Structure d'un robot SCARA

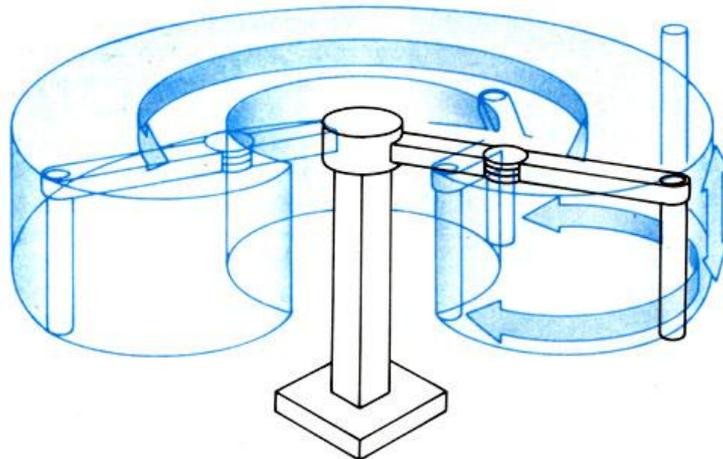


Figure 2. 20 Volume de travail du robot SCARA

Avantages :

- ✓ 1 axe linéaire, 2 axes de rotation
- ✓ L'axe de la hauteur est rigide
- ✓ Grand espace de travail
- ✓ Peut atteindre les obstacles
- ✓ Deux façons d'atteindre un point

Inconvénients :

- Difficile de programmer hors ligne
- Bras très complexe

5- Configuration de type révolution (RRR), ($\theta \beta \alpha$)

Aussi appelé manipulateur articulé (polaire) qui ressemble à un bras avec au moins trois articulations pivot. Ils sont utilisés pour le soudage et la peinture ; les systèmes de portique et de convoyage déplacent les pièces dans les usines.



Figure 2. 21 Structure d'un robot articulé

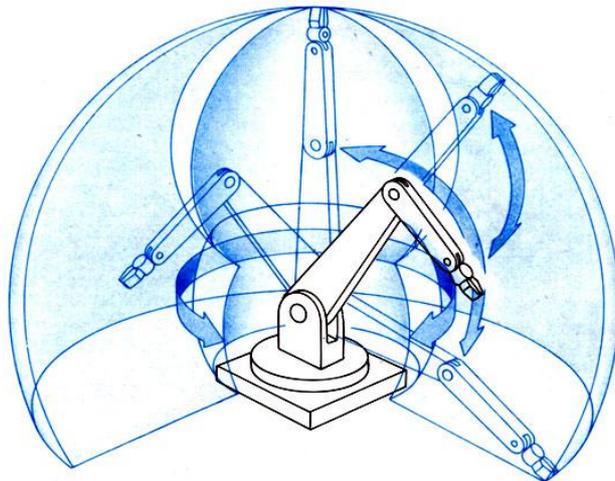


Figure 2. 22 Volume de travail du robot articulé

Avantages :

- ✓ 3 axes de rotation,
- ✓ Peut atteindre au-dessus ou au-dessous des obstacles
- ✓ Plus grand espace de travail pour moins d'espace de travail
- ✓ Deux ou quatre façons d'atteindre un point

Inconvénients :

- Difficile de programmer hors ligne
- Bras très complexe

6- Configuration de type parallèle (RRR), ($\theta \beta \alpha$)

Il présente une configuration de type de plate-forme et des mécanismes sous la forme d'une chaîne cinématique fermée. Il comporte trois articulations prismatiques (PPP) ou rotatifs (RRR). Le volume de travail est approximativement sphérique.

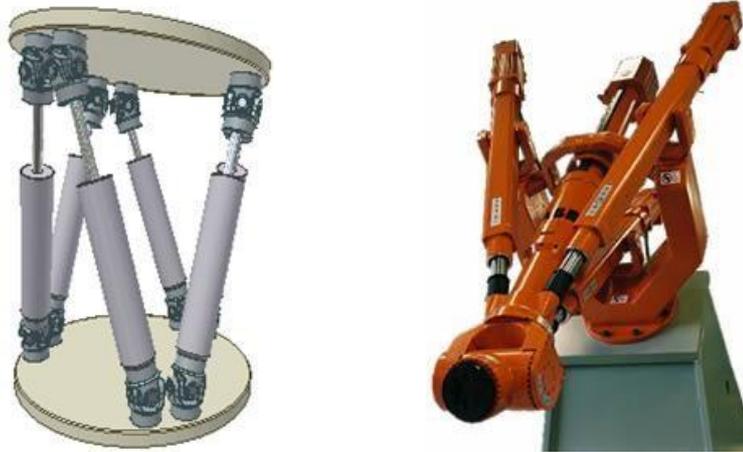


Figure 2. 23 Structure d'un robot parallèle

Avantages :

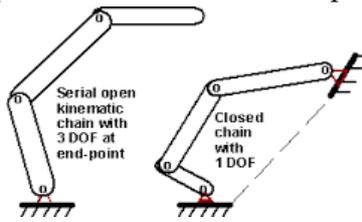
- ✓ Les moteurs peuvent être proximaux :
- ✓ bande passante plus élevée,
- ✓ plus facile à contrôler

Inconvénients :

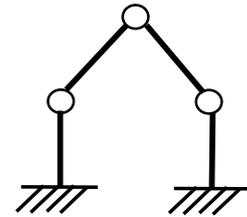
- Généralement moins de mouvement
- la cinématique peut être difficile

2.3.3. Mobilité d'un mécanisme ou d'un robot manipulateur

- La mobilité d'un manipulateur est assurée par la présence des *articulations*,
- La liaison entre deux segments consécutifs d'un robot peut être réalisée avec une : Articulation rotoïde R, Articulation prismatique (P),
- Dans une *chaîne cinématique ouverte*, chaque articulation rotoïde ou prismatique, donne au système *un seul DDL*,
- Les *articulations rotoïdes* sont généralement préférées aux articulations prismatiques en vue de leur *compacité* et *fiabilité*,
- Dans une chaîne cinématique fermée, le nombre de DDL est *inférieur* au nombre d'articulations, compte tenu des contraintes imposées par la boucle.



Chaîne ouverte 3ddl Chaîne fermée 1ddl



Chaîne fermée 0ddl

Figure 2. 24 Chaines cinématiques

Degré de mobilité (m)

Nombre de degrés de mobilité d'un robot Manipulateur - est le nombre de **variables de position indépendantes** qui devront être spécifiées pour localiser toutes les parties du robot - habituellement le nombre d'articulations est égal au nombre de degrés de liberté.

- Chaque **articulation** interconnecte deux **corps** L_i et L_{i+1}
- L'axe de rotation ou de translation est désigné par un axe d'articulation z_i
- Si l'**articulation** i interconnecte les **membres** i et $i + 1$, les variables des **articulations** sont désignées par θ_i , si l'**articulation** est en **rotation**, ou d_i , si l'**articulation** est **glissière**.
- Le nombre d'**articulation (joints)** détermine le **nombre de degrés de mobilité (m)** du manipulateur

La mobilité d'un robot sériel (à chaîne cinématique ouverte) est égale à la somme des mobilités des articulations : c'est donc le nombre d'articulations (car chaque articulation possède 1 ddl).

La mobilité d'un robot parallèle est calculée grâce à la formule de Grübler ou celle des boucles. Soient respectivement :

Pour un mécanisme spatial : $\lambda = 6$

$$m = \lambda(n - n_j - 1) + \sum_{i=1}^{n_j} f_i \quad (2.1)$$

Pour un mécanisme plan : $\lambda = 3$

où : **m** : Nombre de degrés de mobilité

n : Nombre total des corps (y compris le Bâti)

n_j : Nombre total de liaisons (articulation) (Avec et sans moteurs)

f_i : degré de liaisons i

Chaque articulation n_j possède une **mobilité f_i** (Un pivot possède un **1 ddl** & le ddl d'une rotule est 3).

2.3.4. Applications :

Exercice 1 :

Soit les robots suivants. Pour chaque cas, donnez les ddl et la mobilité du robot.

Explicitez et cochez si vous êtes d'accord.

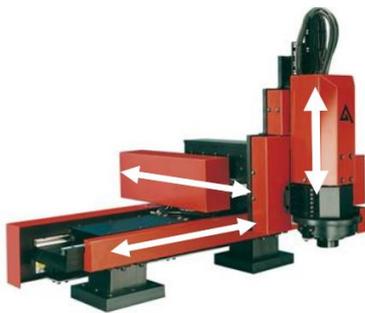


Adept S650

ddl =
 Lesquels ?.....

Mobilité =
 Lesquels =

Sériel
 Cartésien
 Anthropomorphe
 Parallèle



ddl =
 Lesquels ?.....

Mobilité =
 Lesquels =

Sériel
 Cartésien
 Anthropomorphe
 Parallèle



ddl =
 Lesquels ?.....

Mobilité =
 Lesquels =

Sériel
 Cartésien
 Anthropomorphe
 Parallèle

Exercice 2 :

Déterminer le degré de mobilité pour les robots suivants

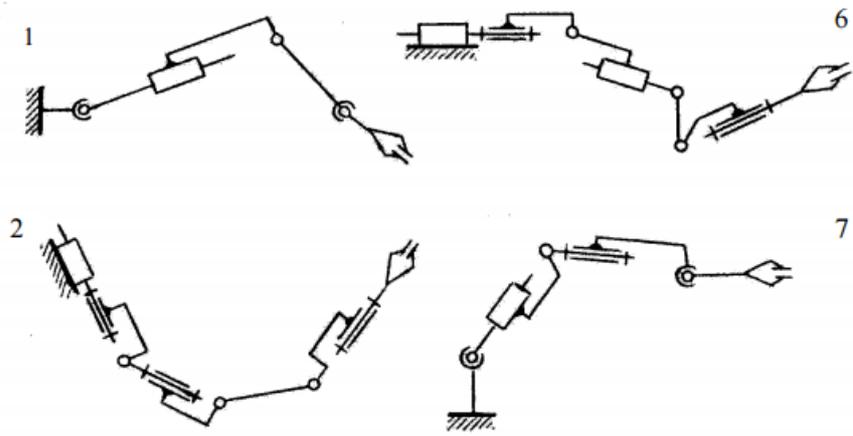


Figure 2. 25 Exemple des robots en 2D

2.4. Modélisation de la chaîne cinématique simple ouverte (en série)

2.4.1. Chaîne simple ouverte (en série)

Une chaîne cinématique simple ouverte est une succession de solides placés en série et liés entre eux un à un par des liaisons simples. Autrement dit lorsque une n -pièce est liée par l'intermédiaire de $n-1$ pièces placées en série et si : $n-1$ pièces sont liées entre eux par des liaisons simples alors ces n pièces et n liaisons constituent une chaîne cinématique simple ouverte ou des liaisons en série.

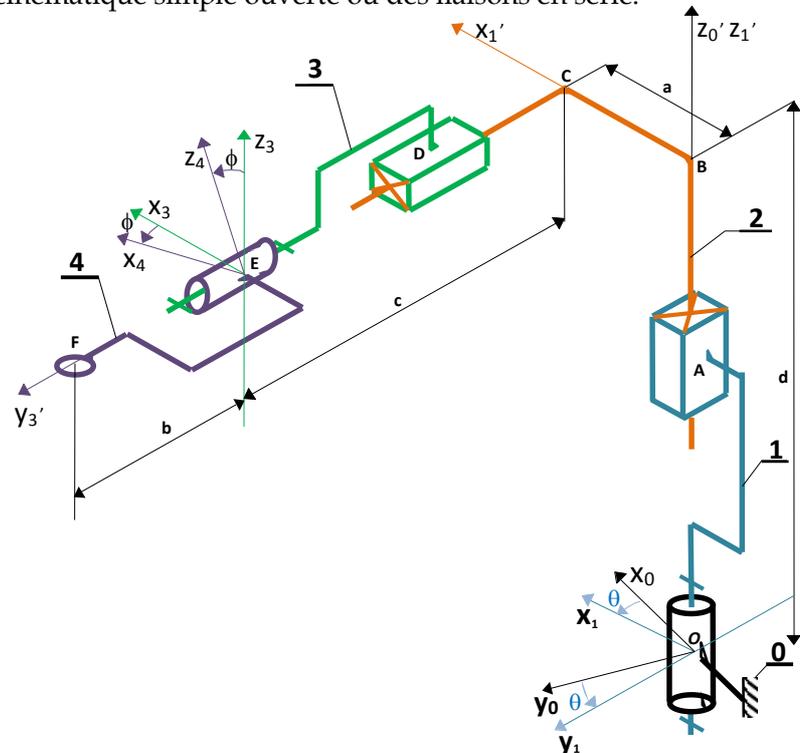


Figure 2. 26 Robot avec une chaîne simple ouverte

La plupart des robots industriels construits à ce jour est de type sériel, c'est-à-dire que leur structure mobile est une chaîne ouverte formée d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons à un degré de liberté. Chaque articulation est commandée par un actionneur situé à l'endroit de l'articulation ou sur un des segments précédents.

Les robots à chaîne cinématique série ont pour avantage de disposer d'un grand volume de travail et d'être relativement simples sur le plan des calculs liés à leur commande. Leurs principaux défauts sont :

- Inertie élevée due aux masses réparties sur toute la chaîne cinématique (actionneurs, organes de transmission)
- Manque de rigidité par la mise en série d'éléments élastiques
- Fatigue et usure des liaisons de puissance assurant l'alimentation des actionneurs (câbles, tuyaux flexibles)
- Fatigue et usure des liaisons assurant la circulation des informations entre les capteurs et la commande, sur le plan sécurité, ce point est essentiel puisqu'une erreur de transmission peut avoir des conséquences désastreuses sur les mouvements du robot.

2.4.2. Etude cinématique des chaînes simples ouvertes (en séries)

Soit les deux repères :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti fixe (0), O est le centre de la liaison L_{10}

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à la pièce (1), A est le centre de la liaison L_{12}

L'étude cinématique des chaînes cinématiques simples ouvertes consiste dans la recherche du torseur cinématique équivalent $\{Tc^{eq}(n/0)\}$ exprimé dans le référentiel de base $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, ce torseur définit le mouvement général de l'organe terminal en fonction des mouvements élémentaires $\{Tc(i/i-1)\}$ autorisés par les liaisons intermédiaires $L_{i,i-1}$ ($i=1,2,\dots,n$)

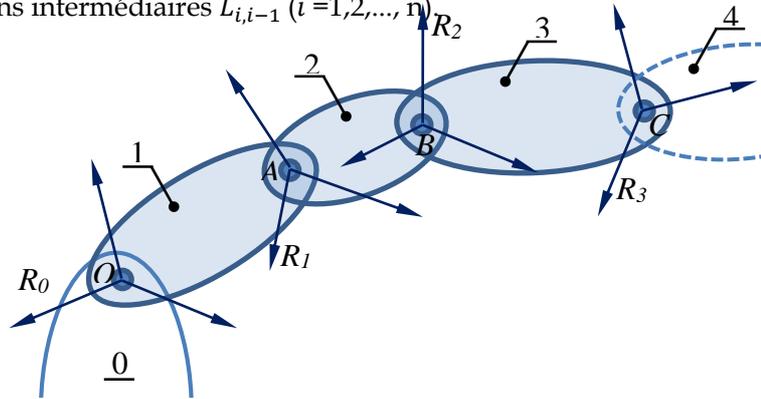


Figure 2. 27 Chaîne simple ouverte

Pour effectuer l'étude cinématique on applique la loi de la composition des mouvements.

$$\sum_{i=1}^n \{Tc(i/i-1)\} = \{Tc^{eq}(n/0)\} \tag{2.2}$$

$$\{Tc(n/n-1)\} + \{Tc(n-1/n-2)\} + \dots + \{Tc(2/1)\} + \{Tc(1/0)\} = \{Tc^{eq}(n/0)\}$$

Il est très important de noter que l'écriture de (2.2) doit se faire dans le **même point** et le **même repère**.

La solution de (2.2) permet de trouver le $\{Tc^{eq}(n/0)\}$ et par la suite déduire la nature de la liaison $L_{n,0}^{eq}$

Etude de la mobilité de la chaîne

1. La mobilité cinématique :

$$d_c = \sum_{i=1}^n n_{ci} = N_c \tag{2.3}$$

2. La mobilité interne d_{ci} :

Elle est égale aux degrés de liberté qui existent entre les différentes pièces de la chaîne lorsque la pièce n est immobilisée par rapport au bâti 0.

3. La mobilité utile d_{cu} :

Elle est égale au nombre de composantes non nulles du $\{Tc^{eq}(n/0)\}$ trouvées par l'étude cinématique.

Relation entre les mobilités cinématiques :

$$d_c = d_{ci} + d_{cu} \tag{2.4}$$

2.4.3. Etude statique des chaînes simples ouvertes (en séries)

Considérons une chaîne continue ouverte du bâti O à la pièce d'extrémité n

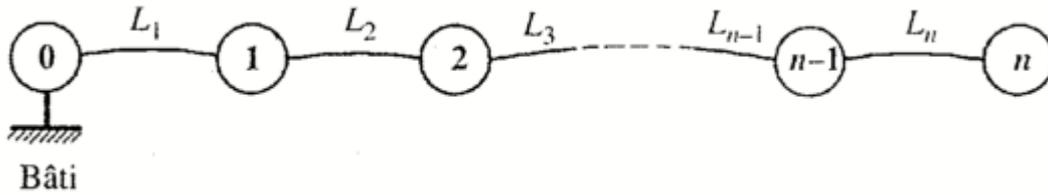


Figure 2. 28 Graphe d'une chaîne simple ouverte

Soit $\{Ts(e/n)\}$ le torseur d'action mécanique extérieure agissant sur n et soit $\{Ts(i-1/i)\}$ le **torseur des actions mécaniques transmissibles (T.A.M.T)** que la pièce i - 1 exerce sur la pièce i par l'intermédiaire de la liaison simple L_i .

On écrira :

$$\{Ts(i/i-1)\} = \{Ts(e/n)\} \quad \text{Pour } 1 \leq i \leq n \quad (2.5)$$

$\{Ts(e/n)\}$ est égal au T.A.M.T par la **liaison équivalente** $L_{0,n}$

La relation (2) ci-dessus permet l'écriture de $6n$ équations dont les seconds membres seront toujours les 6 composantes de $\{Ts(e/n)\}$.

Nous exprimerons ces composantes en un même point et dans le même repère, en général $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti 0.

Soit $N_s = \sum_i^n N_{si}$ le nombre d'inconnues statiques indépendantes des n liaisons simples.

Pour une valeur donnée de i

$$\{Ts(i/i-1)\} = \{Ts(e/n)\} \quad (2.6)$$

Permet l'écriture de six équations algébriques d'équilibre comportant N_{si} inconnues statiques indépendantes de liaison. Ces six équations constituent un système linéaire de N_{si} équations principales de rang $r_{si} = N_{si}$ et $6 - N_{si}$ équations supplémentaires ; ces équations sont caractérisées soit par un premier membre nul soit par un premier membre introduisant une relation entre les composantes du torseur d'action extérieure $\{Ts(e/n)\}$.

Quand i varie de 1 à n

Le système des $6n$ équations d'équilibre comporte N_s équations principales de rang $r_s = N_s$ et $6 - N_s$ équations supplémentaires permettant soit de trouver les zéros, soit de trouver des relations entre les composantes du torseur d'action extérieure.

Notons que ces dernières relations permettent également la détermination géométrique de la configuration d'équilibre.

2.4.4. Applications :

Exercice 01 :

Tracer le schéma cinématique 2D et 3D des robots : PRR, RRR, RPR

Quel est la différence entre les deux robots : Robot cylindre et robot SCARA

Exercice 02 :

Soit les deux robots représentent ci-dessous. Les éléments de ces robots sont nommés avec les numéros (0,1,2....).

- Tracer le schéma cinématique 3D de ces deux robots
- Déterminer le degré de mobilité de ces deux robots en utilisant l'équation de Tchebychev-Gruber

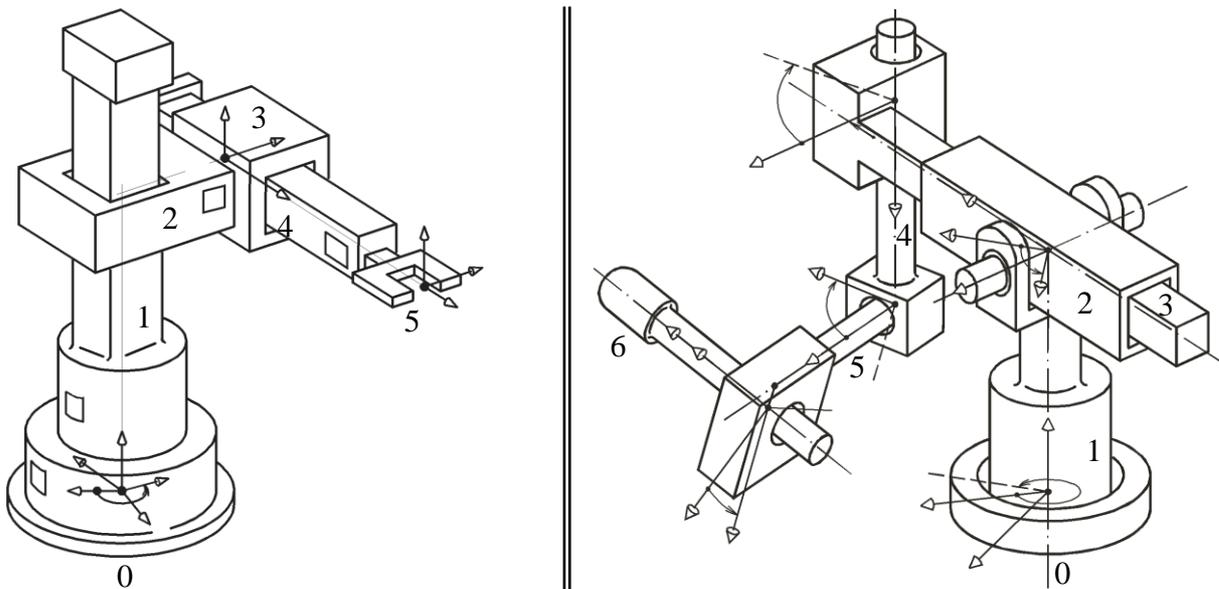


Figure 2. 29 Robots à chaînes ouverts

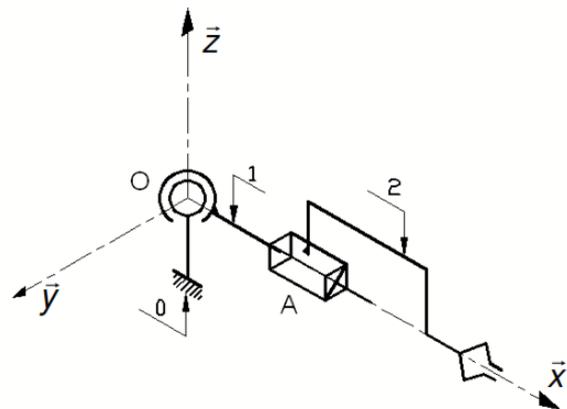
Exemple 03 :

Considérons un robot à deux liaisons en série entre les solides (1), (2) et le bâti (0), soit $R(O,x,y,z)$ le repère lié au centre de la liaison rotule à doigt (le doigt est suivant l'axe z).

Les torseurs cinématique associées aux liaisons sont :

$$Tc(1/0) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{10} & 0 \\ \gamma_{10} & 0 \end{Bmatrix}_O ; Tc(2/1) = \begin{Bmatrix} 0 & u_{10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

1. Déterminer le degré de mobilité d_c de ce robot.
2. Déterminer par une étude cinématique le torseur de la liaison équivalente aux deux liaisons en séries -
Déduire le degré de mobilité utile d_u
3. Déterminer le degré de mobilité interne.



3. Mouvements d'un corps rigide et transformations homogènes

homogènes

3.1. Introduction

Pour le développement des équations cinématiques du robot manipulateur, il est nécessaire d'établir plusieurs systèmes de coordonnées pour représenter les positions et les orientations de corps rigides. Il est également nécessaire de connaître les transformations de coordonnées entre ces systèmes, afin que les vecteurs représentant des positions, des vitesses et des accélérations, donnés dans un système de coordonnées donné, puissent être représentés dans d'autres systèmes de coordonnées.

Dans ce chapitre, nous étudierons les opérations de rotation et de translation entre systèmes de coordonnées tridimensionnelles, en introduisant le concept de transformations homogènes.

3.2. Systèmes de coordonnées à trois dimensions

Définition :

Un système de coordonnées tridimensionnel $O_n x_n y_n z_n$ est décrit par son origine O_n et par les trois axes cartésiens : x_n , y_n et z_n . Ces axes sont perpendiculaires les uns aux autres.

Ce système de coordonnées est associé à une base orthonormée, formée par les vecteurs dans, x_0 , y_0 et z_0 , respectivement dans la direction de x_n , y_n et z_n (figure 3.1). Chaque vecteur a une dimension unitaire et peut être écrit sous la forme suivante :

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

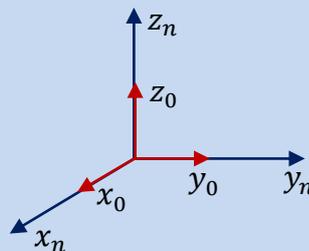


Figure 3.1. Les vecteurs x_n , y_n et z_n qui forment la base orthonormée.

L'ordre relatif des axes est donné par la règle de la main droite, illustrée à la figure 3.2. Le sens positif de l'angle de rotation est également donné par la même règle (Figure 3.3).

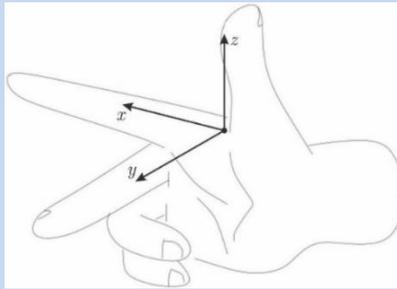


Figure 3. 2 Règle de la main droite pour la formation de systèmes de coordonnées 3D. Le pouce correspond à l'axe des z, l'indicateur à l'axe des x et le majeur à l'axe des y.

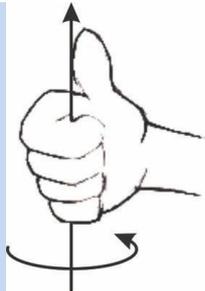


Figure 3. 3 Règle de la main droite : la direction des doigts qui se ferment dans la main indique le sens positif de l'angle de rotation.

Un point $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ d'un corps rigide, appartenant à l'espace cartésien tridimensionnel, peut être représenté par un vecteur à partir de l'origine du système de coordonnées. Ainsi, dans un système $O_0x_0y_0z_0$, \mathbf{p} est décrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de base orthonormés $\{i_0, j_0, k_0\}$ (figure 3.4) :

$$\mathbf{p}_0 = p_{0x} \cdot x_0 + p_{0y} \cdot y_0 + p_{0z} \cdot z_0 \quad (3.1)$$

où, sous forme vectorielle,

$${}^0\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

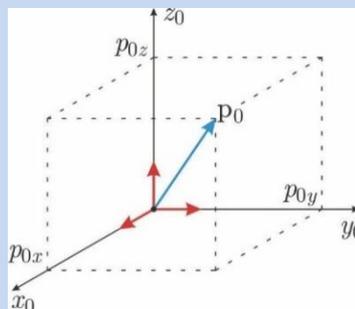


Figure 3. 4 Le point \mathbf{p} décrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de base orthonormée dans le système R_0 . Les vecteurs en rouge représentent x_0 , y_0 et z_0 .

L'indice associé au nom du vecteur indique par rapport à quel système de coordonnées le point est représenté. Ainsi, ${}^0\mathbf{p}$ est la représentation du point \mathbf{p} par rapport au système $O_0x_0y_0z_0$. De même, \mathbf{p}_1 représente \mathbf{p} par rapport à un système $O_1x_1y_1z_1$, \mathbf{p}_2 représente \mathbf{p} par rapport à un système $O_2x_2y_2z_2$, etc.

Dans l'expression (3.2), la composante p_{0x} est la projection du vecteur p_0 sur l'axe x_0 . Cette projection peut être représentée mathématiquement à travers le produit scalaire :

$$p_{0x} = p_0 \cdot x_0 \quad (3.3)$$

L'opérateur (\cdot) indique le produit scalaire entre deux vecteurs :

$$p_0 \cdot x_0 = \|p_0\| \|x_0\| \cos\theta \quad (3.4)$$

où, k_{p_0} représente le module vectoriel p_0 : $\|p_0\| = \sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2 + p_{0z}^2}$, et θ est l'angle entre p_0 et i_0 .

Puisque i_0 a une unité de grandeur, l'expression (3.4) est résumée par $p_0 \cdot i_0 = k_{p_0} \cos \theta$.

$$p_{0y} = p_0 \cdot y_0 \quad (3.5)$$

$$p_{0z} = p_0 \cdot z_0 \quad (3.6)$$

3.3. Rotation

Considérons maintenant l'existence d'un deuxième système de coordonnées $O_1x_1y_1z_1$ (ou simplement le système R_1) dont l'origine coïncide avec l'origine du système R_0 ($O_0 = O_1$). De manière similaire à celle précédemment développée, le point p peut être décrit par la combinaison linéaire des vecteurs de la base orthonormée du système R_1 :

$$p_1 = p_{1x} \cdot x_1 + p_{1y} \cdot y_1 + p_{1z} \cdot z_1 \quad (3.7)$$

où, sous forme vectorielle,

$${}^1 p = p_1 = \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

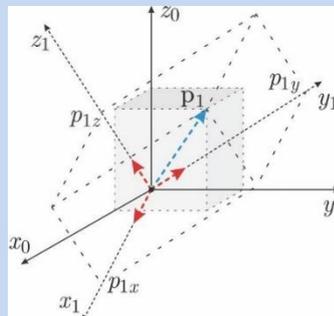


Figure 3.5 Point p est décrit comme la combinaison linéaire des vecteurs de base orthonormée dans R_1

Ou, sous forme vectorielle, ${}^1 p = [p_{1x} \ p_{1y} \ p_{1z}]^T$. On constate que les vecteurs p_0 et p_1 décrivent le même point dans l'espace tridimensionnel, ils sont représentés dans des systèmes de coordonnées différents, comme le montre la figure 3.5. Ainsi, en remplaçant p_0 par p_1 dans les expressions (3.3) à (3.6) :

$$p_{0x} = p_1 \cdot x_0$$

$$p_{0y} = p_1 \cdot y_0$$

$$p_{0z} = p_1 \cdot z_0$$

En substituant ${}^1 p$ de l'équation (3.7) dans les trois expressions ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned} p_{0x} &= p_1 \cdot x_0 \\ &= (p_{1x}x_1 + p_{1y}y_1 + p_{1z}z_1) \cdot x_0 \\ &= p_{1x}(x_1 \cdot x_0) + p_{1y}(y_1 \cdot x_0) + p_{1z}(z_1 \cdot x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{0y} &= p_1 \cdot y_0 \\
 &= (p_{1x}x_1 + p_{1y}y_1 + p_{1z}z_1) \cdot y_0 \\
 &= p_{1x}(x_1 \cdot y_0) + p_{1y}(y_1 \cdot y_0) + p_{1z}(z_1 \cdot y_0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{0x} &= p_1 \cdot z_0 \\
 &= (p_{1x}x_1 + p_{1y}y_1 + p_{1z}z_1) \cdot z_0 \\
 &= p_{1x}(x_1 \cdot z_0) + p_{1y}(y_1 \cdot z_0) + p_{1z}(z_1 \cdot z_0)
 \end{aligned}$$

Nous avons alors l'ensemble suivant de trois équations :

$$\begin{cases}
 p_{0x} = p_{1x}(x_1 \cdot x_0) + p_{1y}(y_1 \cdot x_0) + p_{1z}(z_1 \cdot x_0) \\
 p_{0y} = p_{1x}(x_1 \cdot y_0) + p_{1y}(y_1 \cdot y_0) + p_{1z}(z_1 \cdot y_0) \\
 p_{0z} = p_{1x}(x_1 \cdot z_0) + p_{1y}(y_1 \cdot z_0) + p_{1z}(z_1 \cdot z_0)
 \end{cases} \quad (3.9)$$

Les expressions (3.9) peuvent également être réécrites sous forme matricielle de la manière suivante :

$${}^0 \mathbf{p} = {}^0 \mathbf{R}_1 \cdot {}^1 \mathbf{p} \quad (3.10)$$

avec :

$${}^0 \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{bmatrix}, \quad {}^1 \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix}$$

$${}^0 \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

La matrice ${}^0 \mathbf{R}_1$ s'appelle la matrice de rotation. Elle représente la rotation du système de coordonnées R_1 par rapport au système R_0 .

La même déduction peut être faite si nous considérons le système de coordonnées R_1 comme référence, c'est-à-dire que nous pouvons déterminer la rotation du système R_0 par rapport au système 1, à travers la matrice de rotation ${}^1 \mathbf{R}_0$. En rappelant que ${}^0 \mathbf{p} = {}^1 \mathbf{p}$ et que $p_{1x} = p_1 \cdot x_1$, $p_{1y} = p_1 \cdot y_1$ et $p_{1z} = p_1 \cdot z_1$ nous avons que :

$$\begin{aligned}
 p_{1x} &= p_0 \cdot x_1 \\
 &= (p_{0x} \cdot x_0 + p_{0y} \cdot y_0 + p_{0z} \cdot z_0) \cdot x_1 \\
 &= p_{0x}x_0 \cdot x_1 + p_{0y}y_0 \cdot x_1 + p_{0z}z_0 \cdot x_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{1y} &= p_0 \cdot y_1 \\
 &= (p_{0x} \cdot x_0 + p_{0y} \cdot y_0 + p_{0z} \cdot z_0) \cdot y_1 \\
 &= p_{0x}x_0 \cdot y_1 + p_{0y}y_0 \cdot y_1 + p_{0z}z_0 \cdot y_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{1z} &= p_0 \cdot z_1 \\
 &= (p_{0x} \cdot x_0 + p_{0y} \cdot y_0 + p_{0z} \cdot z_0) \cdot z_1 \\
 &= p_{0x}x_0 \cdot z_1 + p_{0y}y_0 \cdot z_1 + p_{0z}z_0 \cdot z_1
 \end{aligned}$$

Les expressions ci-dessus peuvent être écrites sous forme de matrice :

$${}^1 \mathbf{p} = {}^1 \mathbf{R}_0 \cdot {}^0 \mathbf{p} \quad (3.12)$$

où,

$${}^1 \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \cdot x_1 & y_0 \cdot x_1 & z_0 \cdot x_1 \\ x_0 \cdot y_1 & y_0 \cdot y_1 & z_0 \cdot y_1 \\ x_0 \cdot z_1 & y_0 \cdot z_1 & z_0 \cdot z_1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

L'expression (3.12) peut être obtenue à partir de (3.10). Soit une matrice d'identité \mathbf{I} et sachant que pour toute matrice \mathbf{M} , $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} = \mathbf{I}$ et que pour un vecteur \mathbf{a} , $\mathbf{I} \mathbf{a} = \mathbf{a}$, on a ceci :

$$\begin{aligned} {}^0 \mathbf{p} &= {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \mathbf{p} \\ ({}^0 \mathbf{R}_1)^{-1} {}^0 \mathbf{p} &= ({}^0 \mathbf{R}_1)^{-1} {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \mathbf{p} \\ ({}^0 \mathbf{R}_1)^{-1} {}^0 \mathbf{p} &= \mathbf{I} {}^1 \mathbf{p} \\ ({}^0 \mathbf{R}_1)^{-1} {}^0 \mathbf{p} &= {}^1 \mathbf{p} \end{aligned}$$

On peut alors dire que ${}^1 \mathbf{R}_0 = ({}^0 \mathbf{R}_1)^{-1}$, c'est-à-dire :

$${}^1 \mathbf{p} = ({}^0 \mathbf{R}_1)^{-1} \cdot {}^0 \mathbf{p}$$

Aussi, en comparant les matrices ${}^0 \mathbf{R}_1$ et ${}^1 \mathbf{R}_0$ (expressions (3.11) et (2.13)), et en considérant que le produit scalaire est commutatif ($x_0 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_0$), on constate que la matrice inverse est égale à la transposition :

$${}^1 \mathbf{R}_0 = ({}^0 \mathbf{R}_1)^{-1} = ({}^0 \mathbf{R}_1)^T$$

Une matrice où la condition ci-dessus est satisfaite est dite orthogonale. Cette propriété est valable pour toutes les matrices représentant la rotation entre deux systèmes de coordonnées cartésiennes.

Une autre propriété importante qui découle des systèmes de coordonnées cartésiennes tridimensionnelles est que le déterminant d'une matrice de rotation sera toujours unitaire. Dans le cas des systèmes décrits par la règle de la main droite (figure 3.2), le déterminant sera positif.

Propriété 3.1 : Une matrice \mathbf{R} qui représente la rotation entre deux systèmes de coordonnées cartésiennes est orthogonale, c'est-à-dire que la matrice inverse d'une matrice de rotation est égale à sa transposée :

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

Propriété 3.2 : Le déterminant d'une matrice de rotation \mathbf{R} pour les systèmes de coordonnées cartésiens décrit par la règle de la main droite est toujours positif et unitaire :

$$\det(\mathbf{R}) = 1$$

puisque le module de toute ligne ou colonne de \mathbf{R} est toujours positif et unitaire.

3.3.1. Composition de rotation

Dans les sections précédentes, les rotations d'un système de coordonnées mobiles par rapport à un système fixe ont été discutées. Ainsi, la matrice ${}^0 \mathbf{R}_1$ représente la rotation du système $O_1x_1y_1z_1$ par rapport au système $O_0x_0y_0z_0$. Nous considérons maintenant l'existence d'un troisième système de coordonnées $O_2x_2y_2z_2$ (ou simplement le système R_2) et que les origines des trois systèmes coïncident. Un point donné \mathbf{p} dans l'espace cartésien tridimensionnel peut être représenté dans les trois systèmes, où il est appelé ${}^0 \mathbf{p}$, ${}^1 \mathbf{p}$ ou ${}^2 \mathbf{p}$. La relation de \mathbf{p} entre les trois systèmes est donnée par :

$${}^0 \mathbf{p} = {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \mathbf{p} \tag{3.14}$$

$${}^0 \mathbf{p} = {}^0 \mathbf{R}_2 {}^2 \mathbf{p} \tag{3.15}$$

$${}^1 \mathbf{p} = {}^1 \mathbf{R}_2 {}^2 \mathbf{p} \tag{3.16}$$

Les matrices ${}^0 \mathbf{R}_1$ et ${}^0 \mathbf{R}_2$ représentent les rotations relatives des systèmes R_1 et R_2 par rapport au système R_0 , par contre la matrice ${}^1 \mathbf{R}_2$ représente la rotation du système R_2 par rapport au système R_1 , substituons la relation (3.16) par la relation (3.14), on obtient :

$${}^0 \mathbf{p} = {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \mathbf{R}_2 {}^2 \mathbf{p} \quad (3.17)$$

En comparant (3.15) et (3.17), on a l'identité suivante :

$${}^0 \mathbf{R}_2 = {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \mathbf{R}_2 \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) représente la règle pour la composition des rotations. Il en résulte que, pour transformer les coordonnées de \mathbf{p} de sa représentation dans le système R_2 (${}^2 \mathbf{p}$) pour la représentation dans le système R_0 (${}^0 \mathbf{p}$), nous devons d'abord transformer ${}^2 \mathbf{p}$ en systèmes R_1 à ${}^1 \mathbf{R}_2$ et ensuite transformer ${}^1 \mathbf{p}$ en ${}^0 \mathbf{p}$ à travers ${}^0 \mathbf{R}_1$.

On peut aussi interpréter l'équation (3.17) comme suit : On considère initialement que les trois systèmes de coordonnées coïncident. Ensuite, le système R_1 est mis en rotation par rapport au système R_0 conformément à ${}^0 \mathbf{R}_1$. Ensuite, le système R_2 tourne par rapport au système R_1 conforme à ${}^1 \mathbf{R}_2$. Dans ce type d'opération - lorsque les rotations se succèdent, le nom de la rotation dans les systèmes actuels est donné.

Exemple 3.1 : Déterminez la matrice de rotation totale R' qui représente une rotation ϕ autour de l'axe y , puis une rotation θ autour de l'axe z .

$$\begin{aligned} R &= R_{y,\phi} R_{z,\theta} \\ &= \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\phi c\theta & -c\phi s\theta & s\phi \\ s\theta & c\theta & 0 \\ -s\phi c\theta & s\phi s\theta & c\phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 3.2 : Déterminez la matrice de rotation totale R' qui représente une rotation θ autour de l'axe z , puis une rotation ϕ autour de l'axe y .

$$\begin{aligned} R' &= R_{z,\theta} R_{y,\phi} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\phi c\theta & -s\theta & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta & c\theta & s\phi s\theta \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'après les exemples précédents, il est clair que $R \neq R'$, ce qui est encore plus évident grâce à l'analyse des figures 2.6 et 2.7.

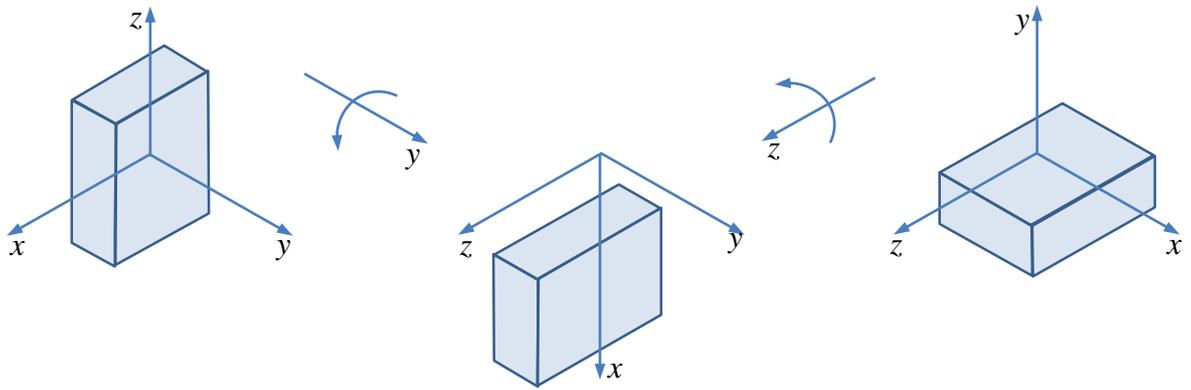


Figure 3. 6 Résultat de la composition $R = R_{y,\phi}R_{z,\theta}$

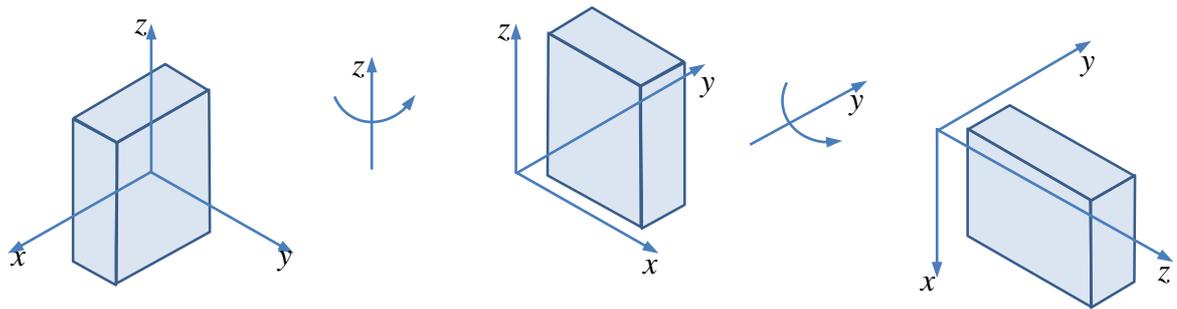


Figure 3. 7 Résultat de la composition $R' = R_{z,\theta}R_{y,\phi}$

Ainsi, en règle générale, dans les systèmes actuels, nous aurons :

$${}^n R_m = {}^m R_{m+1} \cdot {}^{m+1} R_{m+2} \dots \cdot {}^{i-1} R_i \dots \cdot {}^n R_{n+1} \cdot {}^{n-1} R_n \quad (3.19)$$

où, $n > m$.

Exemple 3.3 : Calculez la matrice de rotation ${}^0 R_2$ résultant de la séquence de deux rotations, ${}^0 R_1 = R_{z,30^\circ}$ et ${}^1 R_2 = R_{y,60^\circ}$. Considérons (a) les systèmes actuels et (b) les systèmes fixes.

a) Pour les systèmes standard, il est connu que ${}^0 R_2 = {}^0 R_1 {}^1 R_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} {}^0 R_2 &= {}^0 R_1 {}^1 R_2 \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.43 & -0.5 & 0.75 \\ 0.25 & 0.87 & 0.43 \\ -0.87 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) Pour les systèmes fixes, ${}^0 R_2 = {}^1 R_2 {}^0 R_1$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.43 & -0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0.87 & 0.43 \\ -0.75 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comme prévu, les résultats (a) et (b) sont différents.

3.3.2. Angles d'Euler

La méthode des angles d'Euler a été introduite par le mathématicien Leonhard Euler. Grâce à cette méthode, il est possible de décrire la rotation d'un corps rigide dans l'espace tridimensionnel grâce à la composition de trois grandeurs (angles) indépendantes.

Étant donné un système fixe R_0 et un système mobile R_1 , on peut décrire la rotation de R_1 par rapport à R_0 à travers trois rotations successives, comme suit : rotation α autour de l'axe z , puis rotation θ autour de l'axe y , et enfin rotation ϕ autour de l'axe z . C'est la combinaison ZYZ. Il y a d'autres combinaisons possibles, mais c'est la plus utilisée en robotique (comme on le verra dans l'étude de la cinématique inverse).

La matrice de rotation résultante pour la combinaison ZYZ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 {}^0 R_1 &= R_{z,\alpha} R_{y,\theta} R_{z,\phi} \\
 &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} cac\theta c\phi - sas\phi & -cac\theta s\phi - sac\phi & cas\theta \\ sac\theta c\phi - cas\phi & -sac\theta s\phi + cac\phi & sas\theta \\ -s\theta c\phi & s\theta s\phi & c\theta \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.3.3. Angles RPY

Les axes du système fixé : x_0 , y_0 et z_0 . Ces rotations sont appelées respectivement lacet, tangage et roulis.

Les rotations se produisent dans l'ordre suivant : une rotation α autour de x_0 , suivie de θ autour de y_0 et enfin ϕ autour de z_0 . Considérant que les rotations sont toujours obtenues par rapport à un système fixe, la matrice résultante est dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 {}^0 R_1 &= R_{z,\alpha} R_{y,\theta} R_{z,\phi} \\
 &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} cac\theta & -sas\phi - cas\theta s\phi & sas\phi + cas\theta c\phi \\ sac\theta & cac\phi + sas\theta s\phi & -cas\phi + sas\theta c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Évidemment, à part la matrice de rotation RPY de l'expression (3.21), le même résultat pourrait être obtenu en considérant une matrice YPR par rapport aux systèmes actuels, ou même par le biais de d'angles d'Euler ZYX.

3.4. Transformations homogènes

Jusqu'à présent, la composition de plusieurs systèmes de coordonnées était réalisée de telle sorte que ces origines toujours coïncident ($O_0 = O_1 = O_2 \dots$).

Nous considérons maintenant deux systèmes ($O_0x_0y_0z_0$) et ($O_1x_1y_1z_1$). On dit que les deux systèmes sont parallèles l'un à l'autre, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de rotation relative entre eux. Une translation est ensuite ajoutée entre les deux origines, de sorte que O_1 ne coïncide plus avec O_0 . Cette transformation est illustrée à la figure 3.8 et la distance entre O_0 et O_1 donne le nom 0d_1 .

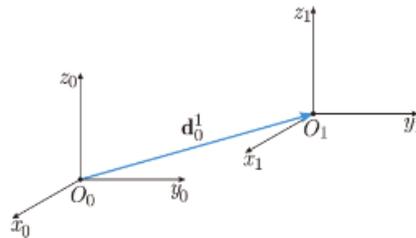


Figure 3. 8 Translation pure entre les systèmes R_0 et R_1 . (x_1 est // à x_0 , y_1 est // à y_0 et z_1 est // à z_0).

0d_1 est un vecteur de l'origine O_0 à l'origine O_1 , exprimé par rapport au système de coordonnées R_0 . La même chose peut aussi être écrite sous la forme ${}^0d_1 = [dx \ dy \ dz]^T$, où dx , dy et dz sont respectivement des composantes de 0d_1 dans les axes x_0 , y_0 et z_0 . Un point p est maintenant considéré dans le système de coordonnées tridimensionnel. La figure 3.9 montre ce point décrit par rapport au système R_1 avec le vecteur 1p .

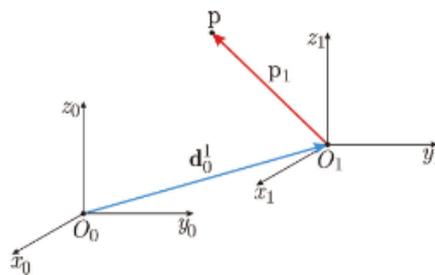


Figure 3. 9 Le point p représenté par rapport au système R_1 .

Puisque les deux systèmes de coordonnées sont parallèles (il n'y a pas de rotation entre eux), on peut obtenir p par rapport au système R_0 par une simple somme vectorielle, soit :

$${}^0p = {}^0d_1 + {}^1p \tag{3.22}$$

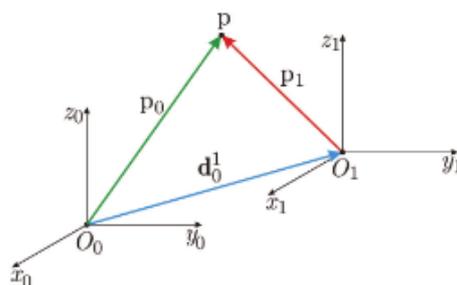


Figure 3. 10 Le point p est représenté par rapport au système R_1 (1p) et au système R_0 (0p).

Lorsqu'il y a une rotation entre les deux systèmes, la somme vectorielle de l'expression (3.22) ne peut pas être effectuée directement. Au lieu de cela, nous devons multiplier ${}^1\mathbf{p}$ par la matrice de rotation entre les deux systèmes, puis effectuer la somme. En d'autres termes,

$${}^0\mathbf{p} = {}^0d_1 + {}^0R_1 \cdot {}^1\mathbf{p} \quad (3.23)$$

Cette transformation est représentée à la figure 3.11. L'expression (3.23) représente la combinaison d'une rotation pure et d'une translation pure, et constitue le cas le plus général du mouvement du corps rigide.

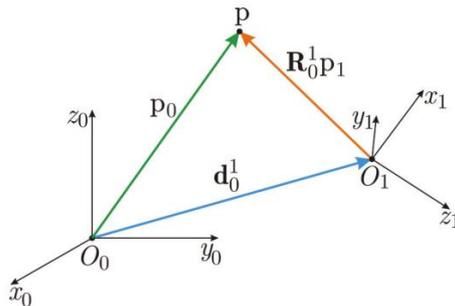


Figure 3. 11 Composition de translation et de rotation.

La multiplication par 0R_1 fait que la représentation du vecteur ${}^1\mathbf{p}$ devient parallèle au système R_0 , de sorte qu'il peut être ajouté à 0d_1 comme dans (3.22).

Exemple 3.4 : Données 0d_1 , ${}^1\mathbf{p}$ et 0R_1 ci-dessous, calculez ${}^0\mathbf{p}$.

$${}^1\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0d_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^0R_1 = R_{y,-30^\circ}$$

En substituant les données ci-dessus à (3.30), nous obtenons :

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{p} &= {}^0d_1 + {}^0R_1 \cdot {}^1\mathbf{p} \\ {}^0\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.87 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^0\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} 2.11 \\ 6 \\ 7.37 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.4.1. Représentations homogènes

Il est courant d'utiliser la représentation suivante : $\mathbf{p}'_0 = {}^0\mathbf{H}_1\mathbf{p}'_1$

où,

$${}^0\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_0 = \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_1 = \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^0\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chapitre 3 : Mouvements d'un corps rigide et transformations homogènes

Les vecteurs ${}^0\mathbf{p}'$ et ${}^1\mathbf{p}'$ sont des représentations homogènes des vecteurs ${}^0\mathbf{p}$ et ${}^1\mathbf{p}$, obtenues simplement en augmentant la dimension du vecteur dans une ligne avec l'élément égal à 1. ${}^0\mathbf{H}_1$ est la **matrice dite de transformation homogène**, et peut être réécrit comme :

$${}^0\mathbf{T}_1 = = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & {}^0\mathbf{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Matrice de transformation homogène

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{d}_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les deux transformations de base (translation ${}^0\mathbf{d}_1$ et rotation ${}^0\mathbf{R}_1$) sont contenues dans la matrice ${}^0\mathbf{T}_1$. La dernière ligne d'une matrice de transformation homogène est toujours composée de [0 0 1 1].

Afin de simplifier la notation, l'*apostrophe* dans le nom du vecteur sera éliminé et la représentation homogène du vecteur sera utilisée chaque fois que nécessaire dans une expression de type ${}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{T}_1 \mathbf{p}$.

Ainsi, la matrice ${}^0\mathbf{T}_1$ représente la transformation homogène du système de coordonnées R_1 par rapport au système R_0 . Après la notation, nous concluons que :

$${}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{T}_0 {}^0\mathbf{p}$$

où, ${}^1\mathbf{T}_0$ est la **matrice de transformation homogène** du système R_0 par rapport au système R_1 . Ainsi,

$${}^1\mathbf{T}_0 = = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{R}_0 & {}^1\mathbf{d}_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où, ${}^1\mathbf{R}_0$ et ${}^1\mathbf{d}_0$ sont respectivement la rotation et la translation du système R_0 par rapport au système R_1 . ${}^1\mathbf{T}_0$ peut également être obtenu par la matrice inverse de ${}^0\mathbf{T}_1$.

$${}^1\mathbf{T}_0 = ({}^0\mathbf{T}_1)^{-1}$$

La propriété 3.1 indique que $R^{-1} = R^T$. Donc :

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{H}_0 &= \begin{bmatrix} ({}^0\mathbf{R}_1)^{-1} & -({}^0\mathbf{R}_1)^{-1} \cdot {}^0\mathbf{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ({}^0\mathbf{R}_1)^T & -({}^0\mathbf{R}_1)^T \cdot {}^0\mathbf{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{R}_0 & {}^1\mathbf{d}_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

De l'expression (3.25), nous concluons que

$${}^1\mathbf{d}_0 = -({}^0\mathbf{R}_1)^T \cdot {}^0\mathbf{d}_1 \quad (3.26)$$

En regardant l'expression (3.26), il est intéressant de voir ce que cela signifie. Le *signe négatif* indique que la distance ${}^0\mathbf{d}_1$ doit être inversée pour obtenir ${}^1\mathbf{d}_0$, mais avant cela, cette grandeur doit être écrite en relation avec le système R_1 , donc la multiplication par la transposée de ${}^0\mathbf{R}_1$ qui est égal à ${}^1\mathbf{R}_0$.

Exemple 3.5 : Par transformations homogènes, calculez 0p , étant donné :

$${}^1p = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^1R_0 = R_{y,-30^\circ}$$

On sait par (3.32) que ${}^0d_1 = -({}^1R_0)^T \cdot {}^1d_0$

$${}^0d_1 = \begin{bmatrix} 0.87 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 4.05 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^0p &= {}^0H_1 \cdot {}^1p = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & {}^0d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.87 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0.5 & 0 & 0.87 & 4.05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^0p &= \begin{bmatrix} 2.01 \\ 6 \\ 6.42 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De même, contrairement aux matrices de rotation, l'inverse d'une matrice de transformation homogène ne correspond pas à sa transposée, c'est-à-dire $({}^0T_1)^{-1} \neq ({}^1T_0)^T$.

Exemple 3.6

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son inverse est :

$$({}^0T_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notez que la 'dernière ligne de la matrice' est $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$, qui ne pourrait pas dépasser $({}^0T_1)^{-1} = {}^1T_0$, qui est toujours une matrice de transformation homogène. En calculant la transposée de 0T_1 , on arrive à :

$$({}^0T_1)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors, $({}^0T_1)^{-1} \neq ({}^0T_1)^T$. De plus, la dernière ligne de $({}^0T_1)^T$ est différente de $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$, il ne s'agit donc pas d'une matrice de transformation homogène.

3.4.2. Matrices de base de transformation homogène

Dans la section 3.3, nous avons vu les matrices de rotation de base, c'est-à-dire les matrices représentant des rotations autour de l'un des trois axes cartésiens. On voit dans (3.31) que, pour les matrices de transformation homogènes, il existe deux opérations (rotation et translation) qui peuvent chacune se produire dans l'un des axes cartésiens. Le nombre total de matrices représentant les opérations de base est donc de six (trois pour la rotation et trois pour la translation).

Ainsi, les matrices de base de la transformation homogène qui représentent chacune des rotations sont:

$$Rot_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rot_{y,\theta} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rot_{z,\theta} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et les matrices de base qui représentent chacune des translations :

$$Trans_{x,d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Trans_{y,d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Trans_{z,d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notez que, pour $Rot_{x,\theta}$, $Rot_{y,\theta}$ et $Rot_{z,\theta}$, le vecteur de translation est nul et que pour $Trans_{x,d}$, $Trans_{y,d}$ et $Trans_{z,d}$ la matrice de rotation est égale à la matrice d'identité.

3.4.3. Composition de transformations homogènes

Soit trois systèmes de coordonnées dans l'espace cartésien tridimensionnel, $(O_0x_0y_0z_0)$, $(O_1x_1y_1z_1)$ et $(O_2x_2y_2z_2)$. Les origines de ces systèmes ne coïncident pas et ne sont pas parallèles, comme indiqué à la figure 3.12.

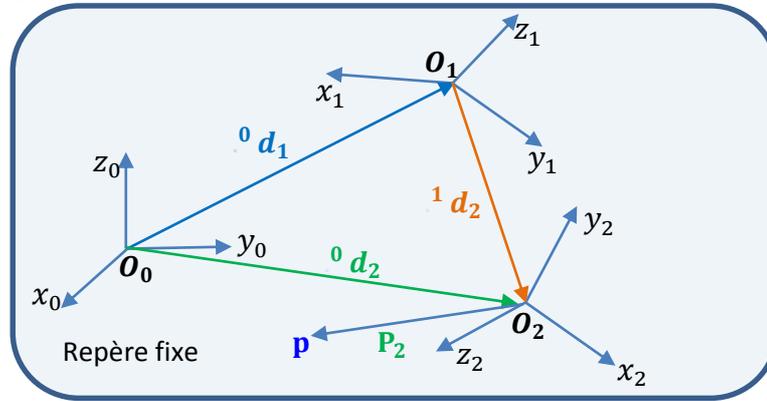


Figure 3. 12 Trois systèmes de coordonnées dans l'espace cartésien tridimensionnel.

Soit 0d_1 la distance entre O_1 et O_0 , par rapport au système R_0 . De même, 1d_2 est la distance de O_2 à O_1 par rapport au système R_1 et 0d_2 à la distance de O_2 à O_0 par rapport au système R_0 . Un point p peut être décrit par rapport à l'un quelconque des trois systèmes et les transformations suivantes existent :

$${}^0p = {}^0d_1 + {}^0R_1 \cdot {}^1p \quad (3.27)$$

$${}^0p = {}^0d_2 + {}^0R_2 \cdot {}^2p \quad (3.28)$$

$${}^1p = {}^1d_2 + {}^1R_2 \cdot {}^2p \quad (3.29)$$

En substituant (3.29) en (3.27), on a :

$${}^0p = {}^0d_1 + {}^0R_1 \cdot {}^1d_2 + {}^0R_1 \cdot {}^1R_2 \cdot {}^2p \quad (3.30)$$

En comparant les équations (2.35) et (2.37), nous concluons que :

$${}^0d_2 = {}^0d_1 + {}^0R_1 \cdot {}^1d_2$$

avec : ${}^0R_2 = {}^0R_1 \cdot {}^1R_2$

En utilisant des représentations homogènes de vecteurs et de matrices, on obtient :

$${}^0p = {}^0H_2 \cdot {}^2p$$

où,

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} {}^0R_2 & {}^0d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chapitre 3 : Mouvements d'un corps rigide et transformations homogènes

Le même résultat peut être obtenu en multipliant ${}^0T_1 \cdot {}^1T_2$. Ainsi, la composition de plusieurs transformations homogènes peut être obtenue par :

$${}^nT_m = {}^mT_{m+1} \cdot {}^{m+1}T_{m+2} \dots \cdot {}^{i-1}T_i \dots \cdot {}^nT_{n+1} \cdot {}^{n-1}T_n \quad (3.31)$$

où $n > m$. l'expression (3.31) ne peut être utilisée qu'en considérant les systèmes actuels, ce qui est plus courant dans les systèmes robotisés, puisqu'un robot est décrit par plusieurs systèmes de coordonnées mobiles par rapport à un système fixe ou inertiel.

La composition des transformations homogènes pour les systèmes fixes ne sera pas étudiée.

Exemple 3.8 : Calculer la distance à partir du système d'origine R_2 par rapport au système R_0 , en fonction des données ci-dessous.

${}^0d_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ ${}^2d_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ${}^0R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ${}^1R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
 0d_2 peut être calculé avec ${}^0d_2 = {}^0d_1 + {}^0R_1 \cdot {}^1d_2$. Puisque les données d'exercice ne donnent que 1d_2 , il est nécessaire de calculer 1d_2 :

$$\begin{aligned} {}^1d_2 &= ({}^2R_1)^T \cdot {}^2d_1 = -{}^1R_2 \cdot {}^2d_1 \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} {}^0d_2 &= {}^0d_1 + {}^0R_1 \cdot {}^1d_2 \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.4.4. Applications

Exercice N°1 :

Un référentiel R_1 coïncide au départ avec un référentiel R_0 . On fait tourner R_1 de 45° autour de l'axe \vec{z} du référentiel R_0 , puis de 30° autour de l'axe \vec{x} du nouveau référentiel. Donner la matrice de transformation homogène AT_B .

Exercice N°2 :

Un référentiel est obtenu par une série de transformations à partir d'un référentiel de départ. Suite à la liste des transformations suivantes, définir la matrice de transformation homogène décrivant la pose du référentiel.

- Rotation de 180° autour de l'axe \vec{y} du référentiel de départ.
- Translation de $(7, 12, -4)$ par rapport au référentiel de départ.
- Rotation de 30° autour de l'axe \vec{x} du nouveau référentiel.

Exercice N°3 :

Soit deux référentiels R_0 et R_1 , à l'aide des matrices homogènes de transformation de base, faire les transformations demandées si la matrice 0T_1 est :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Une rotation de 30° autour de l'axe \vec{z}_0 du référentiel R_0 .

- b. Une rotation du référentiel R_1 de -25° autour de l'axe \vec{x}_0 du référentiel R_0 .
- c. Une translation du référentiel R_1 de 8 mm le long de l'axe \vec{y}_0 du référentiel R_0 .

Exercice N°4 :

Un effecteur (la pince) d'un robot manipulateur permet de transporter des objets d'une position a une autre, sa position initiale est représentée dans le référence de base R_0 , les deux autres positions sont représentées par les deux autres repères R_1 et R_2 , la figure 2.15 illustre les tâches de cet effecteur.

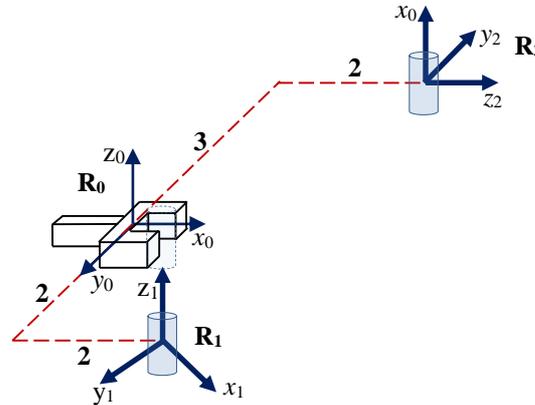


Figure 2.15 Taches de l'effecteur d'un robot

On donne les différentes transformations comme la montre la figure :

- 1^{er} position qui représente la position du référentiel R_1 par rapport au R_0 est obtenu par :
 - Translation de $(2, 2, 0)$ par rapport au référentiel de départ R_0 .
 - Rotation de 90° autour de l'axe \vec{z}_1 du référentiel de départ R_1 .
- 2^{ème} position qui représente la position du référence R_2 par rapport au R_0 à est obtenu par :
 - Translation de $(2, -3, 0)$ par rapport au référentiel de départ R_0 .
 - Rotation de 180° autour de l'axe \vec{z}_2 du référentiel R_2 .
 - Rotation de -90° autour de l'axe \vec{y}_2 du référentiel R_2 .

1. Définir les matrices de transformation homogène suivantes :

- ${}^0T_1 \Rightarrow$ la position du repère R_1 par rapport à R_0 .
- ${}^0T_2 \Rightarrow$ la position du repère R_2 par rapport à R_0 .

2. Déterminer l'inverse de 0T_1

On donne : ${}^bT_a = ({}^aT_b)^{-1} = \begin{bmatrix} ({}^aR_b)^T & -({}^aR_b)^T a d_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^bR_a & -{}^bR_a a d_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^bR_a & {}^b d_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Calculer : 1T_2 en fonction de 1T_0 et 0T_2 .

Exercice N°5 :

Un robot de type palettiseur permet de transporter (porter) et déposer des marchandises sur une table roulante, la forme de la marchandise est un cube de dimension a.b.c m³. Le schéma suivante présente les positions de l'effecteur de ce robot ainsi la table par rapport un repère fixe $R_0(0,0,0)$.





Figure 2.16 Taches de l'effecteur d'un robot palettiseur

On donne les différentes transformations comme le montre la figure :

- Le point initial de l'effecteur est ${}^1P (-5,0,0)$
- Translation de ${}^2P (-5,1,1)$ par rapport au référentiel R_0 .
- Rotation de 90° autour de l'axe \vec{y}_2 du référentiel R_2
- Translation de ${}^3P (0.5,1,1)$ par rapport au référentiel R_2 .
- Définir les matrices de transformation homogène suivantes :
 - ${}^0T_1 \Rightarrow$ la position du repère R_1 par rapport à R_0 .
 - ${}^0T_2 \Rightarrow$ la position du repère R_2 par rapport à R_0 .
 - ${}^0T_3 \Rightarrow$ la position du repère R_3 par rapport à R_0

4. Modèles cinématiques directs et inverses

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, les équations de la cinématique directe de position pour les manipulateurs rigides seront développées. Le problème de la cinématique directe peut être posé comme suit : **les variables des articulations d'un robot déterminent la position et l'orientation de l'organe terminal**. Ainsi, dans le cas d'un robot articulé du type RRR-RRR, les variables d'articulation données sont les angles θ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ entre les éléments du robot et le problème de la cinématique directe de position peut être comme suit :



où x_0 , y_0 et z_0 sont les coordonnées cartésiennes de l'organe terminal et \mathbf{n} , \mathbf{s} et \mathbf{a} sont les vecteurs dont les composantes sont les cosinus directionnels des angles formés par les axes x_6 , y_6 et z_6 du système de l'organe terminal avec les axes du système de base, x_0 , y_0 et z_0 , respectivement.

L'obtention des équations qui résolvent le problème de la cinématique directe, basée sur la connaissance de la géométrie et de la trigonométrie, est relativement facile pour des manipulateurs très simples. Pour les robots spatiaux, cependant, la formulation devient assez complexe et il est préférable d'utiliser la représentation de **Denavit-Hartenberg**, incarnée dans les mécanismes et la robotique. Une telle représentation permet de traiter tout type de manipulateur de manière systématique, ce qui facilite beaucoup l'obtention des équations directes de la cinématique de position.

4.2. Chaînes cinématiques

Afin d'étudier l'analyse cinématique, le robot peut être considéré comme une chaîne cinématique, c'est-à-dire un ensemble d'éléments rigides reliés entre eux par des articulations. En robotique industrielle, ces articulations sont très simples, de types **rotoïde (R)** ou **prismatiques (P)**, qui possèdent un seul degré de liberté. Ainsi, Les fonctions de chaque articulation peuvent être décrites en une seule quantité : l'angle de rotation dans le cas des articulations **R** ou un déplacement linéaire dans le cas des articulations **P**. L'objectif de la cinématique directe est de déterminer l'effet cumulatif de l'ensemble de variables des articulations.

La chaîne cinématique représentative d'un robot peut être ouverte, dans laquelle il n'y a qu'une seule liaison reliant deux membres consécutifs, ou fermée, lorsque l'on peut avoir plus d'une liaison reliant deux membres consécutifs. Dans ce cours, seuls les robots à **chaîne cinématique ouverte** seront étudiés, lesquels constituent la grande majorité des robots industriels.

4.3. Convention pour les liens, les articulations et les systèmes de coordonnées

Un **robot à chaîne cinématique ouverte** peut être considéré comme composé de $n + 1$ membres (y compris la base, qui est toujours le membre 0), reliés par n articulations. Les corps (membres) sont numérotés de 0 à n , à partir de la base. Les articulations sont numérotées de 1 à n , l'articulation i reliant l'élément i à l'élément $i-1$. La variable i ème articulation est notée q_i et peut être un déplacement angulaire (articulation R) ou linéaire (articulation P).

Chaque membre du robot est associé à un système de coordonnées cartésiennes : le système $(O_0x_0y_0z_0)$ est associé à la base 0, le système $(O_1x_1y_1z_1)$ est associé à l'élément 1, ...etc. En raison de la considération du corps rigide, tout point de membre $i + 1$ a des coordonnées constantes par rapport au système $O_ix_iz_i$. Les figures 4.1 4.2 illustrent de telles conventions :

On suppose que le robot est constitué d'un chaînage de $n+1$ corps liés entre eux par n articulations (rotoïdes ou prismatiques). A chaque corps, on associe un repère R_i . Les repères sont numérotés de 0 à n . La i ème articulation, dont la position est notée q_i , est le point qui relie les corps $i-1$ et i .



Figure 4. 1 Robot Scara (Adept Cobra s600)

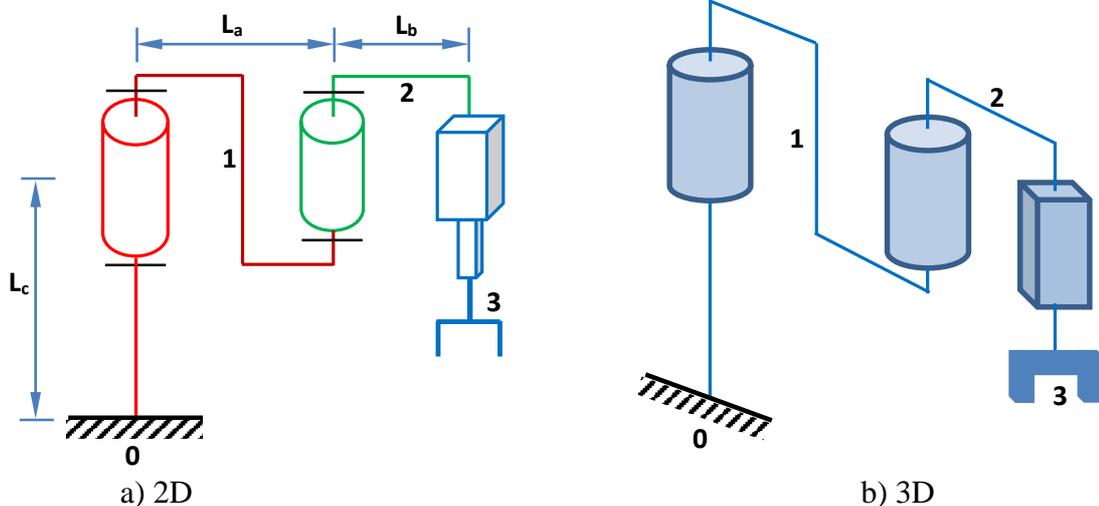
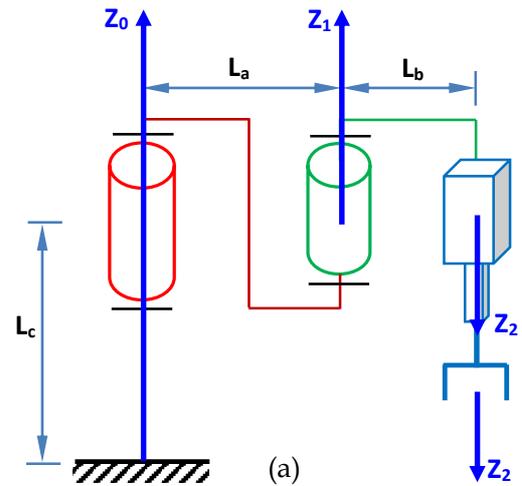


Figure 4. 2 Schémas cinématiques du robot Scara

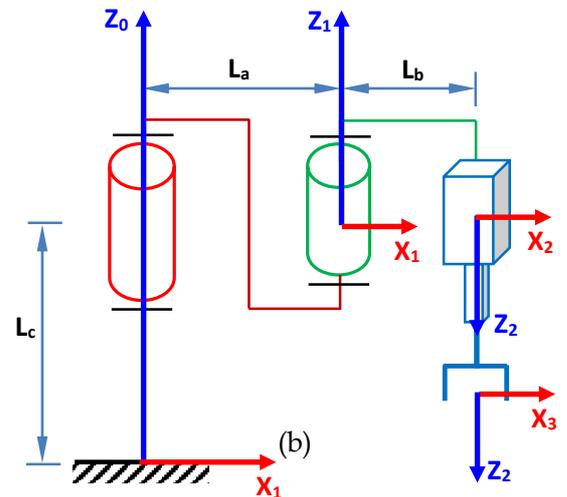
Les étapes de repérage :

- Ajouter les axes z_i (axes de guidages de l'articulation)



- Ajouter les axes x_i (perpendiculaires aux axes de guidage z_i)

$x_i \perp z_i$
 $x_i \perp z_{i-1}$



- Définir les paramètres q_i (θ_i, d_i)

Pour ce robot : q_i (θ_1, θ_2, d_3)

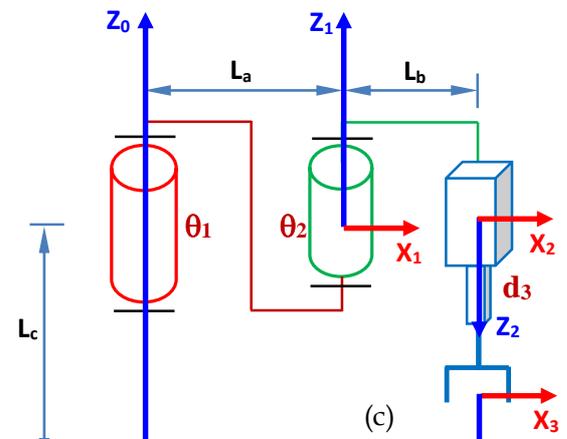


Figure 4. 3 Convention pour membres, articulations et systèmes de coordonnées

Remarque : on néglige dans ce robot la rotation de l'effecteur

4.4. Obtention des équations de la cinématique directe

Soit ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ la matrice de transformation du système de membre i au système de membre $i-1$. Puisque chaque articulation n'a qu'un seul degré de liberté, la matrice ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ est uniquement fonction de la variable de l'articulation q_i :

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = {}^{i-1}\mathbf{T}_i(q_i) \quad (4.1)$$

Il est clair que la matrice ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ n'est pas constante, mais cela varie lorsque la configuration du manipulateur change d'espace au cours de son déplacement.

La **position** et l'**orientation** de l'organe terminal par rapport au système de base peuvent être obtenues de deux manières :

- (a) traverser la chaîne cinématique ouverte, de la base à l'organe terminal, en passant par tous les membres, c'est-à-dire en considérant les rotations successives autour des systèmes de membres, qui sont les systèmes actuels :

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n \quad (4.2)$$

où chaque transformation homogène ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ est donnée par

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\mathbf{R}_i & {}^{i-1}\mathbf{d}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

où ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ est la matrice de rotation du système $(O_i x_i y_i z_i)$ pour le système $(O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1})$ et ${}^{i-1}\mathbf{d}_i$ est le vecteur de position de l'origine du système $(O_i x_i y_i z_i)$ par rapport au système $(O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1})$.

- (b) allant directement du système de base au système de l'organe terminal, à travers la matrice de transformation homogène.

$${}^0\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n & {}^0\mathbf{d}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

où ${}^0\mathbf{R}_n$ est la matrice de rotation du système de l'organe terminal $(O_n x_n y_n z_n)$ par rapport au système de base $O_0 x_0 y_0 z_0$ et ${}^0\mathbf{d}_n$ est le vecteur de position de l'origine du système de l'organe terminal $(O_n x_n y_n z_n)$ par rapport au système de base $(O_0 x_0 y_0 z_0)$.

On résume donc, la cinématique directe de position en déterminant les matrices données par les équations (4.1) et (4.4) et en les assimilant, en obtenant **12 équations** qui fourniront la position de l'organe terminal (par égalité de 3 éléments correspondant au vecteur de position) et à l'orientation de l'organe terminal (par l'égalité des 9 éléments correspondant à la matrice de rotation), en fonction des variables des articulations.

Une simplification significative peut être obtenue en utilisant ce que l'on appelle la représentation **Denavit-Hartenberg**.

4.5. Représentation de Denavit-Hartenberg (DH)

Notation de Denavit-Hartenberg pour un robot à chaîne ouverte simple.

4.5.1. Description des articulations

- Robot rigide :
 - n articulations ($i=0, 1, \dots, n$) = n degrés de liberté
 - Élément i est mobile par rapport à l'élément $i-1$.
 - Axe i est défini par une ligne dans l'espace, autour du quelle l'élément i tourne ou se déplace par rapport à l'élément $i-1$.

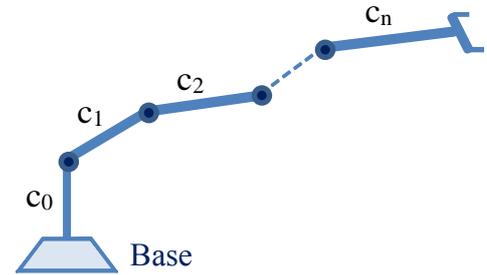


Figure 4. 4 Robot à chaîne ouverte simple

Un élément est spécifié par 2 paramètres qui définissent la situation relative de deux axes dans l'espace :

1. **Distance perpendiculaire commune (a_{i-1})** : distance entre deux axes consécutifs $i-1$ et i . C'est une distance perpendiculaire commune à z_i et z_{i-1} . Cette ligne existe toujours et elle est unique sauf dans le cas où les deux axes sont parallèles (nombre infini de lignes de même longueur).
2. **Orientation relative de deux axes consécutifs (α_{i-1})** : angle entre l'axe $i-1$ et l'axe i . Il est obtenu en « vissant » l'axe $i-1$ vers l'axe i .

Cas spécial : intersection des deux axes $\rightarrow \alpha_{i-1}$ est mesuré dans le plan contenant les deux axes, mais son sens est inconnu. Dans ce cas, on est libre de choisir le signe arbitrairement.

4.5.2. Description de liaisons (articulations) entre éléments

4.5.2.1. Les éléments (links) intermédiaires de la chaîne

Une articulation est spécifiée par 2 paramètres :

- Glissement (d_i) : distance sur l'axe commun entre a_{i-1} et a_i
 - Rotation (θ_i) : angle entre a_{i-1} et a_i . Il est obtenu en « vissant » a_{i-1} vers l'axe a_i autour de l'axe z_i .
- Si l'articulation i est de type prismatique, alors d_i est variable.
Si l'articulation i est de type rotoïde, alors θ_i est variable.

4.5.2.2. Les articulations extrêmes (première et dernière) du robot

$$a_0 = a_n = 0, \alpha_0 = \alpha_n = 0.$$

Si l'articulation 1 de type rotoïde, la position 0 de θ_1 peut être choisie arbitrairement et $d_1 = 0$.

Si l'articulation 1 de type prismatique, la position 0 de d_1 peut être choisie arbitrairement et $\theta_1 = 0$.

Les mêmes conventions sont appliquées à l'articulation n .

4.5.3. Convention d'attachement des repères aux liens du robot

4.5.3.1. Convention d'attachement des repères aux liens intermédiaires du robot

L'axe z_i du repère i coïncide avec l'axe d'articulation i . Il correspond au déplacement (rotoïde ou prismatique) de l'élément i par rapport au référentiel $i-1$.

L'origine du repère i est localisée à l'intersection de a_i avec l'axe d'articulation i .

L'axe x_i du repère i coïncide avec a_i d'articulation i . Le sens est dans le sens de a_i (de l'axe i à l'axe $i+1$).

Cas spécial : $a_i = 0$, x_i est choisi normal au plan de z_i et z_{i+1} . y_i est défini par la règle de la main droite.

4.5.3.2. Convention d'attachement des repères aux liens extrêmes du robot

Attacher un repère de référence fixe (arbitraire) à la base du robot (**articulation 0** (c_0)). Les repères de toutes les articulations sont exprimés par rapport à ce repère.

Puisque le **repère 0 est arbitraire**, choisir u_{zi} coïncidant avec l'axe 1 quand la variable articulaire $\theta_i = 0$ ou $d_i = 0$. $a_0 = 0, \alpha_0 = 0$.

- Si l'**articulation n** de type **rotoïde**, le sens de x_n coïncide avec x_{n-1} quand $\theta_n = 0$ et l'**origine du repère n** est choisie tel que $d_n = 0$.
- Si l'**articulation n** de type **prismatique**, le sens de x_n est choisi tel que $\theta_n = 0$ et l'**origine du repère n** est choisie sur l'**intersection de x_{n-1} et l'axe d'articulation n** quand $d_n = 0$.

4.5.4. Etape de Denavit-Hartenberg (DH)

Denavit et Hartenberg ont proposés une méthode pour décrire la transformation homogène entre deux solides adjacents avec une position et orientation particulière des repères.

Pour la construction des repères il faut suivre la procédure suivante :

- Nommer les **corps du robot** de $i=0$ jusqu'à $i=n$ en commençant par la **base du robot** avec $i=0$;
- Nommer les **articulations** de $i=1$ à n (1 pour le premier degré de liberté et n pour le dernier) ;
- Pour $i=0$ jusqu'à $i=n-1$ **fixer l'axe Z_i sur l'articulation $i+1$** ;

L'origine du **repère R_0** sera un point quelconque de l'**axe Z_0** , de sorte que, X_0 et Y_0 forment un repère orthonormé direct ;

Pour $i=1,2,\dots,n-1$, l'**origine du repère** est **fixé à l'intersection de l'axe Z_i** avec la droite perpendiculaire commune à Z_{i-1} et Z_i . Si les **deux axes se coupent**, l'**origine est le point d'intersection**. Si par contre, les **axes sont parallèles** l'**origine** est l'origine du repère de l'articulation $i+1$.

L'axe X_i est la droite perpendiculaire commune à Z_{i-1} et Z_i , et l'axe Y_i est choisi de sorte que le repère soit orthonormé direct.

Dans la représentation DH, consacrée à la robotique, chaque matrice ${}^{i-1}T_i$ est représentée par le produit de quatre transformations de base :

$${}^{i-1}T_i = R_{z,\theta} T_{z,d} T_{x,a} R_{x,\alpha} \quad (4.5)$$

- $R_{z,\theta}$: représente la rotation θ autour de l'axe z (signe positif indiqué par la règle de la main droite),
- $T_{z,d}$: représente la translation d le long de l'axe z (signal positif lorsque la translation est conforme à la direction de l'axe),
- $T_{x,a}$: représente la translation a le long de l'axe des x (signal positif lorsque la translation correspond à la direction de l'axe)
- $R_{x,\alpha}$: représente la rotation α autour de l'axe des x (signe positif indiqué par la règle de la main droite).

Les paramètres, θ , d , a et α sont appelés **paramètres de membre** ou **paramètres DH**, auxquels on attribue les dénominations suivantes :

- θ : Angle
- d : Excentricité
- a : Longueur
- α : Torsion

Développement de l'équation (4.5), on obtient :

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

${}^{i-1}T_i$ est le modèle géométrique direct

Comme ${}^{i-1}T_i$ est une fonction uniquement de la variable d'articulation q_i , nous concluons que trois des quatre paramètres DH sont des constantes pour un membre donné du manipulateur, tandis que le quatrième paramètre (θ , pour les articulations R ou d pour les articulations P) est la variable de l'articulation.

Comme on l'a vu précédemment, une matrice de transformation homogène est caractérisée par six grandeurs : trois angles de rotation (qui peuvent être les angles d'Euler ou les angles de navigation RPY) et trois composantes du vecteur de déplacement. Dans la représentation DH, il n'y a que quatre paramètres. Une telle réduction du nombre de paramètres est possible grâce à une certaine liberté de choix de la position d'origine et des axes de coordonnées du système de membre i si les conditions DH suivantes sont remplies :

- DH1 : l'axe z_{i-1} est l'axe d'articulation i ;
- DH2 : l'axe x_i est perpendiculaire à l'axe z_{i-1} , en s'éloignant de ce dernier et coupe l'axe z_{i-1} .

La figure 4.5 illustre la représentation DH :

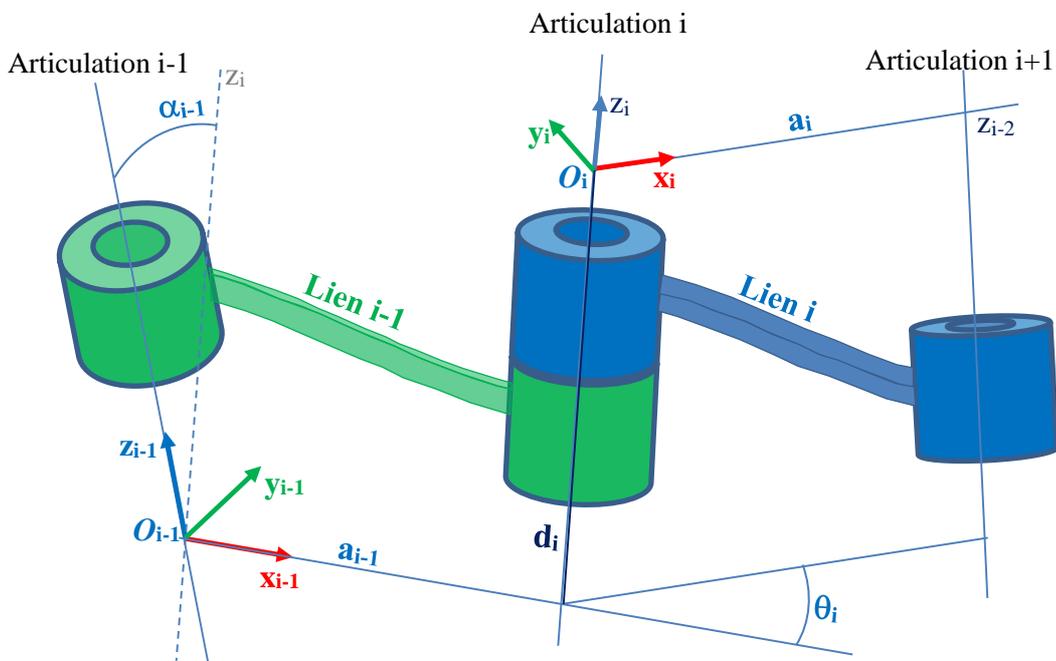


Figure 4. 5 Représentation DH

Sur la base de la figure. 4.5, on peut maintenant donner une interprétation physique à chaque paramètre :

a_i : distance, le long de x_i , de O_i à l'intersection des axes x_i et z_{i-1} (ou la distance la plus courte entre les axes z_{i-1} et z_i) ;

d_i : distance, selon z_{i-1} , de O_{i-1} à l'intersection des axes x_i et z_{i-1} ;

α_i : angle d'axe z_{i-1} pour l'axe z_i , mesuré autour de x_i (signe donné par la règle de la main droite) ;

θ_i : angle de l'axe x_{i-1} pour l'axe x_i , mesuré autour de z_{i-1} , (signe donné par la règle de la main droite).

- α_i : l'angle entre les axes z_{i-1} et z_i (rotation autour de x_{i-1})
- d_i : la distance entre les axes z_{i-1} et z_i le long de x_{i-1}
- θ_i : l'angle entre les axes x_{i-1} et x_i (rotation autour de z_i)
- a_i : la distance entre les axes x_{i-1} et x_i le long de z_i

Résumé des étapes de Denavit-Hertenberg pour la cinématique directe

(Remarque : la définition des systèmes de coordonnées n'est pas unique.)

Étape 1 : Tracer le schéma cinématique du robot (2D ou 3D)

Étape 2 : Déterminer le degré de mobilité : $M = 6n - \sum m$. N_m

Avec :

m : la classe de la liaison : $m = 6 - ddl$

N_m : le nombre de liaisons de classe m .

n : le nombre de corps.

Dans notre cas : $m = 24 - (5 \times 4) = 4 \Rightarrow m = 4$

Étape 3 : Localisez les repères sur chaque articulation (y compris l'organe terminal)

- Localisez et nommez les axes d'articulations, z_0, z_1, \dots, z_{n-1} qui peuvent être similaires à l'axe de rotation (articulation R) ou de translation (articulation P).
- On utilise la main droite, l'axe z doit représenter par le pouce, l'axe x par le majeur, et l'axe y par l'index.
- L'axe z_0 doit pointer vers l'épaule. Pour les robots à bras (et/ou l'avant-bras) situés à gauche ou à droite de l'épaule, les axes z_1 (et/ou z_2) doivent pointer du tronc au bras.
- Établir un système de base $O_0x_0y_0z_0$. Placer le centre O_0 sur une position quelconque de z_0 . Les axes x_0 et y_0 doivent compléter son repère orthonormé. Réglez x_0 et y_0 sur des positions pratiques.
- Pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, effectuez les étapes 3 à 5 :

Étape 4 : Localiser l'origine O_i où la normale commune à z_i et z_{i-1} (ligne droite contenant la distance la plus courte entre z_i et z_{i-1}) coupe z_i . Si z_i coupe (intercepte) z_{i-1} , localiser O_i à cette intersection. Si z_i et z_{i-1} sont parallèles, localiser O_i au niveau du joint i .

Étape 5 : Établir x_i le long du produit vectoriel $\mp (z_i \times z_{i-1})$ à travers O_i , ou la normale commune aux axes z_i et z_{i-1} , quand ils sont parallèles.

Étape 6 : Établir y_i afin de compléter le système orthogonal.

Étape 7 : Établir le système d'organe terminal ($O_nx_ny_nz_n$), comme indiqué sur la figure 3.3, où :

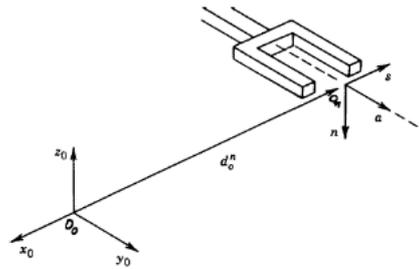


Figure 4. 6 Système d'organe final

O_n : centre de l'organe terminal ;

a : vecteur unitaire dans la direction d'approche de l'objet (approche) z_{n-1} ;

s : vecteur unitaire dans le sens ouverture/fermeture de la pince (coulissant) ;

$n=sa$: le vecteur unitaire dans la direction normale complète le système orthogonal.

Remarque : Si l'ordre ci-dessus est en conflit avec le cas de DH2, suivez cette dernière.

Étape 7 : Compléter le tableau avec le DH :

Lien	θ_i	d_i	a_i	α_i
1				
2				
.				
.				
n				

- d_i : variable d'articulation P
- θ_i : variable d'articulation R

Étape 8 : Formez les matrices de transformation homogènes en remplaçant les paramètres DH dans l'équation (3.5.2).

Étape 9 : Formez la matrice de transformation homogène totale en remplaçant les matrices obtenues à l'étape 8 de l'équation. (3.4.1).

Pour former la matrice de transformation homogène totale "directe", en utilisant l'équation. (4.6), qui, après développement, présente la forme.

Étape 10 : En assimilant les matrices obtenues aux étapes 9 et 10, on obtient les équations de la cinématique de position directe.

$${}^0T_n = \begin{bmatrix} \cos(x_n, x_0) & \cos(y_n, x_0) & \cos(z_n, x_0) & x_0 \\ \cos(x_n, y_0) & \cos(y_n, y_0) & \cos(z_n, y_0) & y_0 \\ \cos(x_n, z_0) & \cos(y_n, z_0) & \cos(z_n, z_0) & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Remarque - La convention DH fournit un paramètre non unique dans les cas suivants :

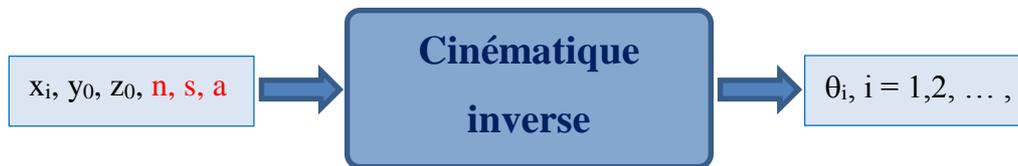
- Pour le système de base $(O_0x_0y_0z_0)$, seule la direction de l'axe z_0 est spécifiée. Vous pouvez donc choisir O_0 et x_0 de façon arbitraire.

- Pour le système d'organes terminaux $O_n x_n y_n z_n$, seul le choix de l'axe x_n est établi (il doit être situé le long de l'axe z_{n-1}) ;
- Lorsque deux axes consécutifs sont parallèles, la normale commune entre eux n'est pas seulement définie ;
- Lorsque deux axes consécutifs se croisent, la direction de x_i est arbitraire ;
- Lorsque l'articulation i est prismatique, seule la direction de l'axe z_{i-1} est déterminée.

4.6. La cinématique inverse de position

4.6.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment déterminer la position et l'orientation de l'organe terminal (Effecteur) en termes de variables articulaires. Dans ce chapitre, nous étudierons comment résoudre le problème inverse, c'est-à-dire trouver les variables des articulations en termes de position et d'orientation de l'organe terminal :



θ_i : angles du système OT avec système de base

Le problème de la cinématique inverse est en général plus difficile à résoudre sous forme fermée. Par exemple, considérons un manipulateur. La solution du problème de la cinématique directe de position est donnée par l'ensemble des **12 équations à 6 inconnues**.

$$\begin{aligned}
 C_1[C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_2S_5C_6] - S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) &= r_{11} \\
 S_1[C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_2S_5C_6] + C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) &= r_{21} \\
 -S_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_2S_5C_6 &= r_{31} \\
 C_1[-C_2(C_4C_5C_6 + S_4S_6) + S_2S_5C_6] - S_1(-S_4C_5C_6 + C_4S_6) &= r_{12} \\
 S_1[-C_2(C_4C_5C_6 + S_4S_6) + S_2S_5C_6] + C_1(-S_4C_5C_6 + C_4S_6) &= r_{22} \\
 S_2(C_4C_5S_6 - S_4C_6) - C_2S_5S_6 &= r_{32} \\
 C_1(C_2C_4S_5 - S_2C_5) - S_1S_4S_5 &= r_{13} \\
 S_1(C_2C_4S_5 - S_2C_5) - C_1S_4S_5 &= r_{23} \\
 -S_2C_4S_5 + C_2C_5 &= r_{33} \\
 C_1S_2d_3 - S_1d_2 - d_6(C_1C_2C_4S_5 + C_1C_5S_2 - S_1S_4S_5) &
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

où les *membres de droite* sont les éléments de la matrice qui fournissent la position et l'orientation de l'organe terminal :

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Pour trouver les variables des assemblages $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ et θ_6 , il faut résoudre le système (4.1.1), qui est assez difficile à obtenir sous **forme fermée**, parce que c'est un système hautement non linéaire.

De plus, bien que la cinématique directe a toujours une solution unique, la cinématique inverse peut avoir ou non une solution (par exemple, lorsque la position désirée tombe hors du volume de travail) et, s'il existe une solution, elle peut être unique ou non.

Pour contourner ce problème, il faut ensuite développer des techniques systématiques efficaces qui explorent la structure cinématique particulière du manipulateur. On considérera désormais que la matrice homogène donnée par éq. (4.9) correspond à une configuration à l'intérieur du volume de travail du manipulateur, qui garantit l'existence d'au moins une solution.

4.6.2. Modèle géométrique inverse (MGI) des robots

Le modèle géométrique direct exprime les coordonnées articulaires en fonction des coordonnées opérationnelles.

Le modèle géométrique inverse (MGI) est l'ensemble des relations inverses à celles du modèle direct. Ce modèle permet d'exprimer les variables articulaires q du bras manipulateur en fonction des coordonnées opérationnelles X exigées pour l'exécution d'une tâche donnée.

$$q = F^{-1}(X) \tag{4.10}$$

Pour le calcul du modèle géométrique inverse, on distingue parmi les méthodes analytiques les deux méthodes suivantes :

- la **méthode de Pieper** : permet de résoudre le problème pour un nombre limité d'architectures simples (robots à 6 degrés de liberté (ddl), possédant 3 articulations rotoïdes d'axes concourants ou 3 articulations prismatiques).
- la **méthode de Paul** : traite séparément chaque cas particulier et convient à la majorité des robots industriels

Lorsque le modèle géométrique inverse n'existe pas, on utilise des méthodes numériques (la méthode de Newton Raphson, La méthode d'élimination symbolique,...)

4.6.3. Position du problème

Soient les référentiels :

R_a : Référentiel de l'atelier.

R_E : Référentiel effecteur (Référentiel outil)

R_0 : Référentiel organe terminal

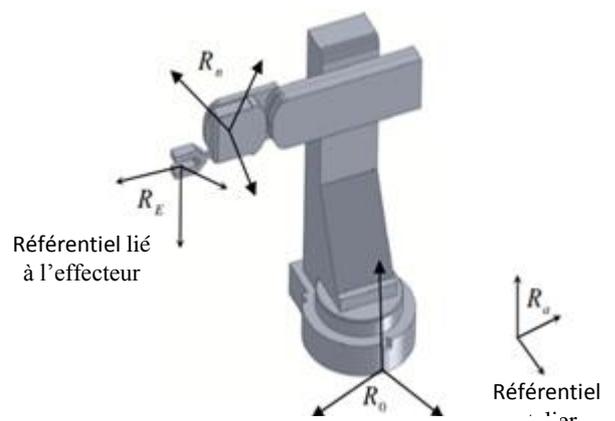


Figure 4. 7 Robot avec ces référentiels

Dans le cas général, on écrit :

$${}^a T_E = {}^a T_0 \cdot {}^0 T_n \cdot {}^n T_E \tag{4.11}$$

${}^a T_E$: Matrice de transformation homogène qui donne la description du référentiel effecteur R_E dans le référentiel atelier R_a .

aT_0 : Matrice de transformation homogène qui donne la description du référentiel lié à la base du robot R_0 dans le référentiel atelier R_a .

0T_n : Matrice de transformation homogène du robot

Matrice de transformation homogène qui donne la description du référentiel effecteur RE dans le référentiel lié à l'organe terminal R_n .

aT_0 et nT_E : Matrices de transformations fixes ne dépendent pas de la configuration du robot.

En regroupant à droite les termes connus, on obtient :

Le problème consiste à trouver les variables articulaires $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ pour 0T_n que soit égal à U_0 .

Le nombre de solutions possibles du modèle géométrique inverse, dépend de la situation désirée, du nombre de degrés et de la morphologie du bras manipulateur. Pratiquement trois cas se présentent :

1. Absence de solution lorsque la situation désirée est en dehors de l'espace de travail du bras manipulateur.
2. Solution en nombre fini lorsque toutes les solutions peuvent être calculées sans ambiguïté (Pour les robots à 6 ddl possédant trois articulations rotoïdes d'axes concourants, le nombre maximum de solutions est de 32 dans l'hypothèse où aucun paramètre géométrique n'est égal à 0).
3. Infinité de solutions lorsque :
 - Le robot est redondant vis-à-vis de la tâche (Exemple : 5 contraintes sur X et robot à 6 degrés de libertés),
 - Le robot se trouve en configuration singulière. Il y a alors une redondance locale qui se traduit par le fait que le bras manipulateur ne peut déplacer son organe terminal dans certaines directions ou tourner autour de certains axes.

4.6.4. Calcul du modèle géométrique inverse

4.7.4.1. Méthode de PAUL

Soit 0T_n la matrice de transformation homogène d'un robot :

$${}^0T_n = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \dots {}^{n-1}T_n \quad (4.12)$$

On note :

$$U_0 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \dots {}^{n-1}T_n = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

La matrice U_0 est la donnée du problème. Elle représente la situation de l'organe terminal dans le référentiel R_0 .

La résolution du problème consiste à trouver les variables articulaires.

Cette méthode consiste à pré-multiplier successivement les deux membres de l'équation par les matrices de transformation homogène inverse ${}^jT_{j-1}$ ($j=1, \dots, n-i$), dont le but est d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires recherchés.

Pour un robot à 6 ddl, on procède comme suit :

- Multiplication à gauche par 1T_0

$${}^1T_0 U_0 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (4.14)$$

Le membre gauche de cette équation est en fonction de q_1 uniquement tandis que le membre droit est en fonction de q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 déjà calculé par le modèle géométrique direct.

- Identification terme à terme des deux membres de l'équation précédente.

On se ramène à un système d'une ou de deux équations fonction de q_1 uniquement, dont la structure appartient à un type particulier parmi une dizaine de types possibles.

- Multiplication à gauche de l'équation précédente par 2T_1 et calcul de q_2 .

La succession des équations permettant le calcul de tous les q_j est la suivante :

$$\begin{aligned} U_0 &= {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^1T_0 U_0 &= {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^2T_1 U_1 &= {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^3T_2 U_2 &= {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^4T_3 U_3 &= {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^5T_4 U_4 &= {}^5T_6 \end{aligned}$$

D'une façon générale : $U_j = {}^jT_{j-1} U_{j-1}$

4.7.4.2. Méthode de PIEPER

Pour qu'une solution analytique existe, la géométrie du système d'axes doit être particulière. Elle doit comporter :

- 3 articulations prismatiques,
- 3 articulations rotoïdes concourantes,
- 1 articulation rotoïde et une articulation prismatique coaxiales,
- 2 paires de liaisons rotoïdes concourantes.

Pour un manipulateur « analytique » à 6 liaisons, on exploite plusieurs formes de différentes formes de l'équation de structure pour isoler, au mieux, les différentes variables.

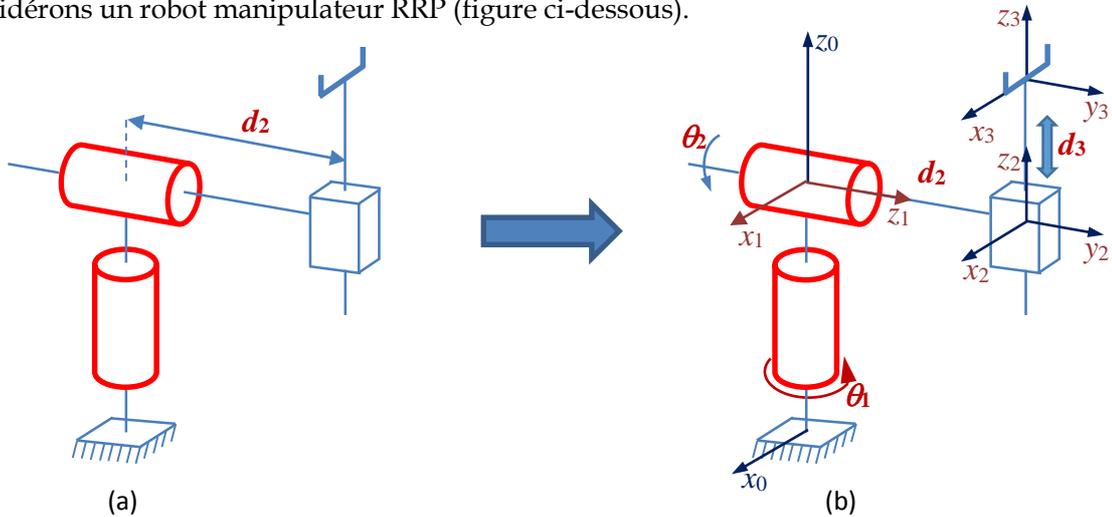
$$\begin{aligned} {}^0T_6 &= {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\ {}^1T_0 {}^0T_6 &= {}^1T_6 \\ {}^2T_1 {}^1T_0 {}^0T_6 &= {}^2T_6 \\ {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 {}^0T_6 &= {}^3T_6 \\ {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 {}^0T_6 &= {}^4T_6 \\ {}^5T_4 {}^4T_3 {}^3T_2 {}^2T_1 {}^1T_0 {}^0T_6 &= {}^5T_6 \end{aligned}$$

Le membre de gauche de la deuxième équation ne fait intervenir que q_1 . On peut déterminer l'expression de q_1 en identifiant l'une des composantes de la matrice figurant au membre de gauche avec un terme constant de la matrice du membre de droite. On progresse ensuite dans la résolution, variable après variable.

4.7. Applications

Exercice 1 :

Considérons un robot manipulateur RRP (figure ci-dessous).



Représentation du robot, a) Schéma cinématique, b) paramétrage du robot

Questions :

1. Donner le degré de mobilité de ce robot

.....

.....

.....

Remplir le tableau du paramétrage D-H correspondant,

Articulation	θ	d	a	α
1				
2				
3				

2. Ecrire

les matrices de transformation homogène élémentaires.

.....

.....

Note: ${}_{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta & -cas\theta & sas\theta & ac\theta \\ s\theta & cac\theta & -sac\theta & as\theta \\ 0 & sa & ca & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$c\theta : \cos\theta$
 $s\theta : \sin\theta$

3. Donner l'expression de la matrice de transformation homogène

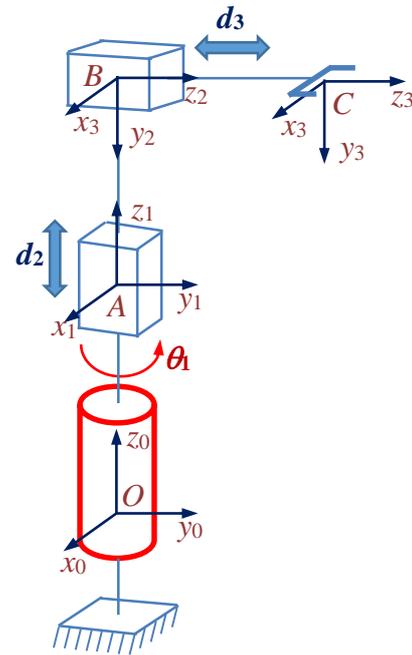
.....

.....

Ecrire le modèle géométrique direct (MGD) définissant la position et l'orientation de l'outil par rapport au repère de la base fixe du robot.

Exercice 2 :

Même questions pour le robot ci-contre.



Exercice 3 :

Trouvez l'équation cinématique directe pour le manipulateur SCARA illustrée à la figure 3. Les paramètres DH sont identifiés dans le tableau 3.

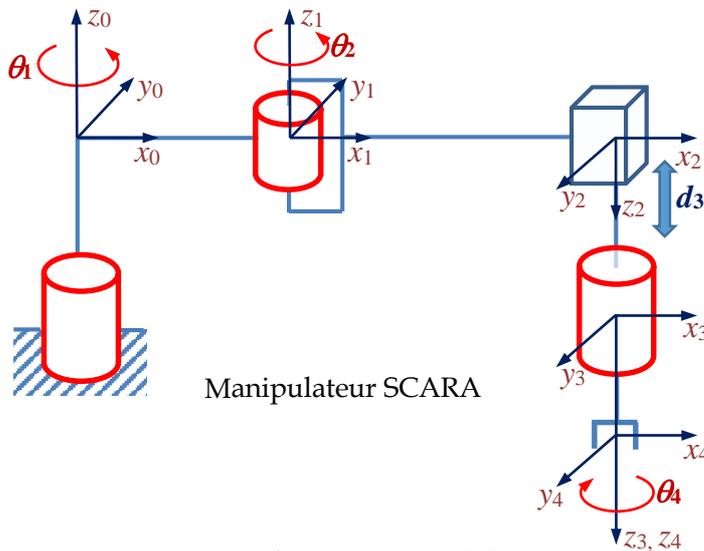


Tableau - Paramètres DH pour le gestionnaire SCARA

Lien	θ	d	a	α
1	*	0	a_1	0
2	*	0	a_2	180
3	0	*	0	0
4	*	d_4	0	0

* Variable de l'articulation i

Bibliographie

- [1] Agati, P., Rosseto, M., Liaison et Mécanismes, Dunod, Paris 1994.
- [2] Bidaud, Ph., Cours de Modélisation des Systèmes Robotiques, Université Pierre et Marie Curie, 2014.
- [3] Boimond, J.L., Cours de robotique ISTIA, Université Angers.
- [4] Bonev. I., Noiseux, Y., Notes de cours robotique industrielle GPA546, 2014.
- [5] Bouri, M., Bleuler, H., Bases de la robotique, école polytechnique fédérale de Lausanne, 2018
- [6] Chaillet, N., Guillaume Laurent, Robotique industrielle, Université de France Comté –UFR ST–ENSMM, 2014.
- [7] Château. T., Eléments de Robotique Université Blaise Pascal, 2013.
- [8] Craig, J.J., Introduction to Robotics: Mechanics and Control, 2 edition, Pearson Education, 1989.
- [9] Craig, J.J., Introduction to Robotics: Mechanics and Control, 3 edition, Pearson Education, 2005.
- [10] Demouveau, H., Initiation à la modélisation et aux performances des robots. Ecole Mines de Douai, Ed 2006.
- [12] Fisette, P., Buyse, H., Samin, J.C., Introduction à La Robotique MECA 2732, 2004.
- [13] Gangloff, J., *Cours de robotique*, Université de Strasbourg, (Vidéos & Diapos en Français),
http://www.gdr-robotique.org/cours_de_robotique/?id=5c1b55b7ea7a82038b46c55910753954
- [14] Ganesh S. Hegde., A Textbook on Industrial Robotics, 2007.
- [15] Khalil, R., Mechanics, Mathematical Analysis & Control, **version en arabe**, 2015.
- [16] Khalil, W., Dombre, E., Bases de la Modélisation et de la Commande des Robots-Manipulateurs de Type Série, Université Numérique Ingénierie et Technologie, 2012.
- [17] Klopčič, F., De la Modélisation Géométrique à l'Implantation Virtuelle de Robots, Campus, Plate-forme d'Enseignement Commune des Ecoles de Mines, 2015.
- [18] Lamarche, L., Robotique MEC-741, Notes de cours, Département de Génie Mécanique, École de Technologie Supérieure Montréal, Québec, Canada, 2012.
- [19] Mittal, R.K., Nagrath, I.J., Robotics and control, 2003.
- [20] Saha, S.K. introduction to robotics, 2e, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 2014.
- [20] Souissi, M., Introduction à la Mécatronique, Ingénieurs pour le Monde, Campus Centre, 2015.

Lien internet :

- Wikipedia : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Robotique>
- Cours : Bases de la Robotique - Moodle – EPFL :
<https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=155&lang=fr>
- Savant musulman : Al-Djazari, inventeur du premier robot : <http://loviso.over-blog.com/article-savant-musulman-al-djazari-inventeur-du-premier-robot-95121179.html>
- Modélisation des mécanismes :
http://www4.ac-nancy-metz.fr/cpge-pmf-epinal/Cours_TD_SII/Modelisation_des_mecanismes.pdf
- Modélisation des mécanismes CPGE - Sciences de l'Ingénieur : <http://s2i.pinault-bigéard.com/>

