Ex 2

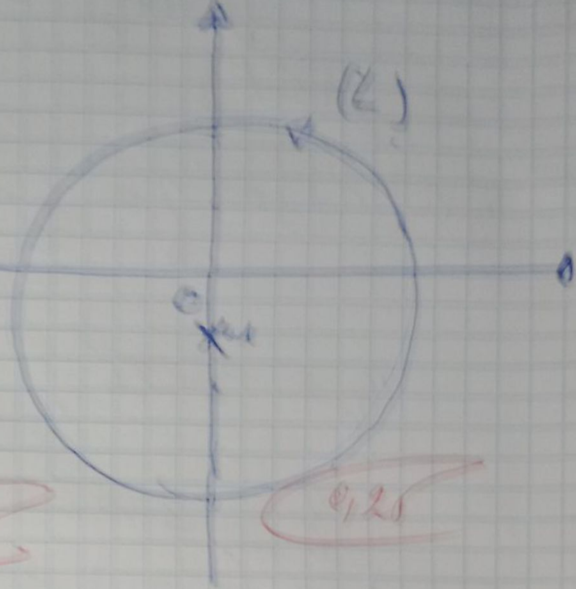
$$= i\int_0^{2\pi}\sqrt{10-6\sin\theta}\,d\theta + i\int_0^{2\pi}\left(i+3e^{-i\theta}\right)d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi}\sqrt{10-6\sin\theta}\,d\theta - 2\pi \longrightarrow 0{,}5$$

car $\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\,d\theta = 0$.

question 2 sur 5,75 point

$$\int_{(L)} \frac{|z|+\bar{z}}{z+i}\,dz$$



θ varie de 0 à 2π 0,25

$$z \in (L) \Leftrightarrow z = -i + 3e^{i\theta} \quad 0{,}75$$

$$dz = 3i\,e^{i\theta}\,d\theta \quad 0{,}5$$

$$|z| = \left|-i + 3(\cos\theta + i\sin\theta)\right|$$

$$= \left|-i + 3\cos\theta + 3i\sin\theta\right|$$

$$= \sqrt{9\cos^2\theta + (3\sin\theta - 1)^2} \quad 0{,}5$$

$$\bar{z} = \overline{-i} + 3\,\overline{\cos\theta + i\sin\theta}$$

$$\bar{z} = i + 3e^{-i\theta} \quad 0{,}5$$

$$\int_{(L)} \frac{|z|+\bar{z}}{z+i}\,dz = 3i\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta + 1 - 6\sin\theta} + (i+3e^{-i\theta})}{3e^{i\theta}}\,e^{i\theta}\,d\theta$$

0,5

$$= \frac{3i}{3}\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{10 - 6\sin\theta} + (i+3e^{-i\theta})\right]d\theta$$

0,25

Calculons $\int_{[CA]} \frac{z|z|}{\operatorname{Re} z} dz$

$z \in [CA] \Leftrightarrow z = z_C + t(z_A - z_C),\ t \in [0,1]$ 0,25 0,25

$z_C = 3-2i,\ z_A = 4$

$z = 3-2i + t(1-2i)$ 0,25

$dz = (1-2i)\,dt$ 0,25

$|z| = \sqrt{(3+t)^2 + (2+2t)^2}$ 0,25

$\operatorname{Re} z = 3+t$ 0,25

$$\int_{[CA]} \frac{z|z|}{\operatorname{Re} z} dz = (1-2i)\int_0^1 \frac{\sqrt{(3+t)^2+(2+2t)^2}\,\left(3-2i+t(1-2i)\right)}{3+t}\,dt$$

0,25

SHOT ON OPPO

[illegible]

calculons $\displaystyle\int_{[bc]} \frac{z|z|}{Re(z)}\,dz$

0,25

$z \in [bc] \Leftrightarrow z = z_b + t(z_c - z_b),\ t \in [0,1]$ 0,25

$z_b = 3+2i\ ,\ z_c = 3-2i$

$z = (3+2i) - 4it \rightarrow$ 0,25

$dz = -4i\,dt \rightarrow$ 0,25

$\begin{cases} |z| = \sqrt{3^2 + (2-4t)^2} & 0{,}25 \\ Re(z) = 3 & 0{,}25 \end{cases}$

$$\int_{[bc]} \frac{z|z|}{Re(z)}\,dz = -4i \int_0^1 \frac{(3+2i-4it)\sqrt{9+(2-4t)^2}}{3}\,dt$$

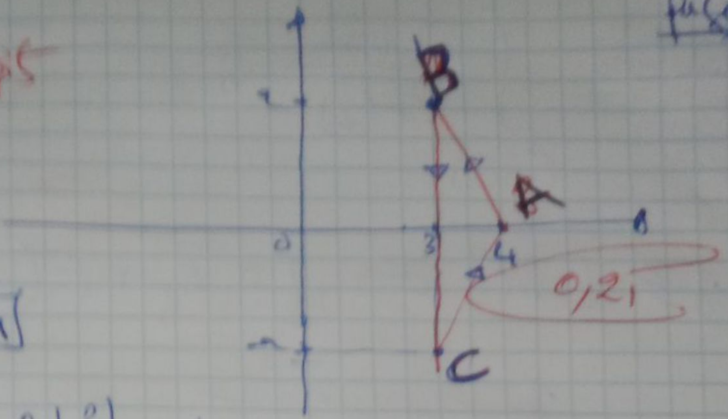
0,25

Exo 5

question 1 sur 5,25 p5

$$\int_{\mathcal{C}} = \int_{[AB]} + \int_{[BC]} + \int_{[CA]}$$

0,5



Calculons $\displaystyle\int_{[AB]} \frac{z|z|}{Re(z)}\,dz$

0,25

$z \in [AB] \Leftrightarrow z = z_A + t(z_B - z_A)\ ,\ t \in [0,1]$ 0,25

$z_A = 4\ ,\ z_B = 3+2i$

$z = 4 + t(3+2i-4)$

$\ \ = 4 + t(-1+2i)$ 0,25

$dz = (-1+2i)\,dt$ 0,25

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{(4-t)^2 + 4t^2} & 0,25 \\ Re(z) = 4-t & 0,25 \end{cases}$$

$$\int_{[AB]} \frac{z|z|}{Re(z)}\,dz = (-1+2i)\int_0^1 \frac{(4+t(2i-1))\sqrt{(4-t)^2+4t^2}}{4-t}\,dt$$

0,5

Exo 1 (4 points)

page 2

1) $f(z) = \frac{1}{i} z^2 + (1-i) z - 5i$

$= -i z^2 + (1-i) z - 5i$ 0,5

$= -i(x+iy)^2 + (1-i)(x+iy) - 5i$

$= -i(x^2 - y^2 + i2xy) + x + iy - ix + y - 5i$ 0,25

$= -ix^2 + iy^2 + 2xy + x + iy - ix + y - 5i$ 0,25

$= (x + 2xy + y) + i(-x^2 + y^2 + y - x - 5)$ 0,5

$\begin{cases} P(x,y) = x + 2xy + y = \mathrm{Re}\, f(z) \\ Q(x,y) = -x^2 + y^2 + y - x - 5 = \mathrm{Im}\, f(z) \end{cases}$ 0,25 0,25

2) f hol sur $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$

$f = P + iQ$

$\begin{cases} \bullet\ P, Q \text{ admettent des dérivées partielles continues} \\ \bullet\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \bullet\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$ 0,25

$\frac{\partial P}{\partial x} = 1 + 2y$, 0,25 $\frac{\partial Q}{\partial y} = 2y + 1$ 0,25 $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ 2 x 0,25

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 1$ 0,25, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x - 1$ 0,25 $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ 2 x 0,25

• La première condition est vérifiée car il s'agit des fonctions polynomiales. 0,25 x 2

• f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

SHOT ON OPPO

(sur 5 points)

Exo 1

1) Vraie sur 0,25

en justifiant

La fonction $z \longmapsto \dfrac{2z^2+z-3i}{z}$ est rationnelle, définie sur $\mathbb{C}-\{0\}$ et le point "0" se trouve à l'extérieur de (γ). sur 1,25

2) Vraie sur 0,25

en justifiant.

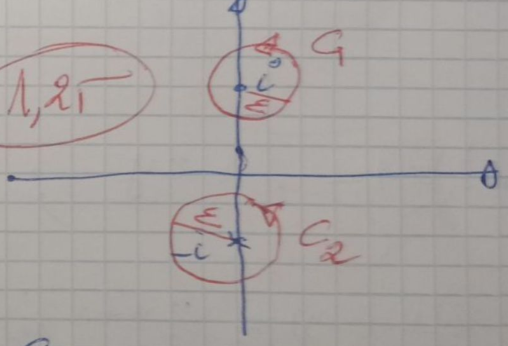
La fonction $z \longmapsto \dfrac{z^4+z}{z^2-1}$ est rationnelle, définie sur $\mathbb{C}-\{-1,1\}$ et les points $-1, 1$ se trouvent à l'extérieur de (γ) $\longrightarrow$ 1,25

3) Vraie sur 0,25

Car la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{z^2+1}$ est rationnelle définie sur $\mathbb{C}-\{-i,i\}$ et les points $-i, i$ se trouvent à l'intérieur de (γ).

ce qui donne

$$\int_{(\gamma)} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{C_1} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^2+1}$$ 1,25



$$= 2\pi i\left(\frac{-1}{2i} + \frac{1}{2i}\right) = 0$$

En posant $z = i + \varepsilon e^{i\theta}$ sur C_1

$z = -i + \varepsilon e^{i\theta}$ sur C_2.