EC1 – CORRIGE FEUILLE 8 D'EXERCICES- Professeur : Christian CYRILLE

SUITES ADJACENTES

Exercice 1

Démontrer que les 2 suites (u_n) et (v_n) définies sur N par $u_n = 1 + \frac{1}{n!}$ et $v_n = \frac{n}{n+1}$ sont adjacentes.

Corrigé :

a) démontrons que (u_n) est décroissante :

pour tout n de N, $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{(n+1)!} - (1 + \frac{1}{n!}) = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!}$

$$= - \frac{n}{(n+1)!} \leq 0 \text{ car } n \geq 0 \text{ et } (n+1)! > 0$$

donc (u_n) est décroissante. CQFD

b) démontrons que (v_n) est croissante :

pour tout n de N, $v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1) - n(n+2)}{(n+2)(n+1)}$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

car $1 > 0$ et $(n+2)(n+1) > 0$ puisque $n \geq 0$

donc (v_n) est croissante. CQFD

c) démontrons que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$

$u_n - v_n = 1 + \frac{1}{n!} - \frac{n}{n+1}$

$\lim\limits_{n \to \infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n!}$ = tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ car $\lim\limits_{n \to \infty} n! = +\infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ car $\frac{n}{n+1} \sim \frac{n}{n}$ c'est-à dire 1

donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$

d) (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$ donc les 2 suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie sur N* par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

Démontrer que les deux suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont adjacentes.

En déduire que l est $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1$

Corrigé :

a) démontrons que (u_{2p}) est décroissante :

pour tout p de N*, $u_{2(p+1)} - u_{2p} = 1 + \frac{(-1)^{2(p+1)}}{2(p+1)} - 1 - \frac{(-1)^{2p}}{2p} = \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{2p} = \frac{2p - (2p+2)}{2p(2p+2)}$

$= - \frac{2}{2p(2p+1)} < 0$ car $2 > 0$ et $2p(2p+1) > 0$ car $p > 0$

donc (u_{2p}) est décroissante. CQFD

b) démontrons que (u_{2p+1}) est croissante :

pour tout n de N, $u_{2(p+1)+1} - u_{2p+1} = 1 + \frac{(-1)^{2p+3}}{2p+3} - 1 - \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1} = \frac{-1}{2p+3} - \frac{-1}{2p+1} = \frac{-2p - 1 + 2p + 3}{(2p+3)(2p+1)}$

$= \frac{2}{(2p+3)(2p+1)} < 0$ car $2 > 0$ et $(2p+3)(2p+1) > 0$ car $p > 0$

donc (u_{2p+1}) est croissante. CQFD

c) démontrons que $\lim\limits_{n \to \infty} u_{2p} - u_{2p+1} = 0$

$u_{2p} - u_{2p+1} = 1 + \frac{(-1)^{2p}}{2p} - 1 - \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1} = 1/2p + 1/2p+1 = \frac{2p+1+2p}{2p(2p+1)} = \frac{4p+1}{4p^2+2p}$

Or quand p tend vers $+\infty$, $\frac{4p+1}{4p^2+2p} \sim \frac{4p}{4p^2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{p}$. Or quand p tend vers $+\infty$,

$\frac{1}{p} \sim 0$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_{2p} - u_{2p+1} = 0$

d) (u_{2p}) est décroissante et (u_{2p+1}) est croissante et $\lim\limits_{n \to \infty} u_{2p} - u_{2p+1} = 0$ donc les 2 suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont adjacentes

Exercice 3

Démontrer que les 2 suites (u_n) et (v_n) définies sur N* par $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ et $v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Vérifier à l'aide d'une calculatrice que leur limite commune a pour valeur approchée $\frac{\pi^2}{6}$

Corrigé :

a) démontrons que (u_n) est croissante :

pour tout n de N*, $u_{n+1} - u_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

donc (u_n) est croissante. CQFD

b) démontrons que (v_n) est décroissante :

pour tout n de N*, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$ car $-1 < 0$ et $n(n+1)^2 > 0$

donc (v_n) est décroissante. CQFD

c) démontrons que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$

$u_n - v_n = \frac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ car $\lim\limits_{n \to \infty} n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$

d) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$ donc les 2 suites (u_n) et

(v_n) sont adjacentes

NB - on démontre que la limite commune des 2 suites est $\frac{\pi^2}{6}$.

On peut le vérifier à l'aide du logiciel de calcul formel Maple :

u_{100000} =sum(1/(i^2),i=1..100 000) ≈1,644924068

v_{100000} =sum(1/(i^2),i=1..100 000) + $\frac{1}{100000}$ ≈1,644934068

et $\frac{\pi^2}{6}$ ≈1,644934068

Exercice 4

Démontrer que les 2 suites (u_n) et (v_n) définies sur N par $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n * n\,!}$ sont adjacentes.
On admettra que leur limite commune est e, la base du logarithme népérien. $e \approx 2{,}718$.

Corrigé :

a) démontrons que (u_n) est croissante :

pour tout n de N*, $u_{n+1} - u_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i\,!} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ car $1 > 0$ et $(n+1)! > 0$

donc (u_n) est croissante. CQFD

b) démontrons que (v_n) est décroissante :

pour tout n de N*, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) * (n+1)\,!} - u_n - \frac{1}{n * n\,!}$

$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1) * (n+1)\,!} - \frac{1}{n * n\,!}$

$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) * (n+1)\,!} - \frac{1}{n * n\,!}$

$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) * (n+1)!} = - \frac{1}{n(n+1) * (n+1)!} < 0$

car $-1 < 0$ et $n(n+1)*(n+1)\,! > 0$

donc (v_n) est décroissante. CQFD

c) démontrons que $\lim_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$

$u_n - v_n = \frac{1}{n * n!}$. Or $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n * n!} = 0$ car $\lim_{n \to \infty} n * n\,! = +\infty$

donc $\lim_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$

d) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $\lim_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$ donc les 2 suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

NB - on démontre que la limite commune des 2 suites est e .
On peut le vérifier à l'aide du logiciel de calcul formel Maple :

u_{100000} =sum(1/ factorial(i),i=1..10) ≈2,718281801

v_{100000} = sum(1/ factorial(i),i=1..10) + $\frac{1}{10 * 10\,!}$ ≈ 2,718281829

et $e \approx 2{,}718281828$

Exercice 5

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies sur N par $u_0 > v_0 > 0$ et pour tout entier naturel n par

$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ = la moyenne arithmétique de u_n et de v_n

$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ = la moyenne géométrique de u_n et de v_n

1°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel l'on a : u_n et v_n existent et sont strictement positifs

2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel l'on a : $u_n \geq v_n$

3°) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante

4°) Démontrer que la suite (v_n) est croissante

5°) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite

6°) Démontrer que la suite (w_n) définie sur N par $w_n = \frac{2\, u_n v_n}{u_n + v_n}$ est convergente.

Corrigé :

1°) Soit la propriété pr(n) : " u_n et v_n existent et sont strictement positifs"

étape 1 : pr(0) est vraie car u_0 et v_0 existent et sont strictement positifs

étape 2 : soit k un entier naturel, supposons que pr(k) est vraie donc u_k et v_k existent et sont strictement positifs. Mais alors on peut créer $u_{k+1} = \frac{u_k + v_k}{2}$ et $v_{k+1} = \sqrt{u_k v_k}$. De plus comme $u_k > 0$ et $v_k > 0$ alors $u_{k+1} > 0$ et $v_{k+1} > 0$ donc pr(k+1) est vraie.

Etape 3: d'après étape 1 et étape 2, l'on a pour tout n pr(n) qui est vraie.

2°) Soit la propriété pr(n) : " $u_n \geq v_n$ " étape 1 : pr(0) est vraie car $u_0 \geq v_0$ étape 2 : soit k un entier naturel, supposons que pr(k) est vraie donc $u_k \geq v_k$ Mais alors on peut créer $u_{k+1} - v_{k+1} =$

$$\frac{u_k + v_k}{2} - \sqrt{u_k v_k} = \frac{(u_k + v_k - 2\sqrt{u_k v_k})}{2} = \frac{(\sqrt{u_k} - \sqrt{v_k})^2}{2} \geq 0$$

donc $u_{k+1} \geq v_{k+1}$ donc pr(k+1) est vraie.

Etape 3: d'après étape 1 et étape 2, l'on a pour tout n, pr(n) qui est vraie.

3°) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2\, u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$ d'après 2°) donc (u_n) est décroissante

4°) $v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n = \frac{(\sqrt{u_n v_n} - v_n)(\sqrt{u_n v_n} + v_n)}{(\sqrt{u_n v_n} + v_n)} = \frac{u_n v_n - v_n^2}{\sqrt{u_n v_n} + v_n} = \frac{v_n\,(u_n - v_n)}{\sqrt{u_n v_n} + v_n} = \frac{N}{D}$.

$D \geq 0$ car $u_n > 0$ et $v_n > 0$ d'après 1°) $N > 0$ car $v_n > 0$ d'après 1°) et $u_n \geq v_n$ Donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$ donc (v_n) est croissante.

5°) (u_n) est décroissante et minorée par v_0 donc converge . Notons $L = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$

(v_n) est croissante et majorée par u_0 donc converge. Notons $L' = \lim\limits_{n \to \infty} v_n$.

$\lim\limits_{n \to \infty} u_{n+1} = L$. Or $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ donc $L = \frac{L + L'}{2}$ donc $2\,L = L + L'$ donc $L = L'$.

donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n - v_n = L - L' = 0$ Les 2 suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

6°) Comme : u_n et v_n sont strictement positifs alors $L > 0$ donc $\frac{2\, u_n v_n}{u_n + v_n}$ converge vers $\frac{2L^2}{2L}$ c'est-à-dire L