Mathématiques 1

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

LOGIQUE ET MÉTHODES DU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, on présentera les notions élémentaires de la logique mathématique ainsi que les différents modes du raisonnement mathématique.

1.1 Eléments de la logique mathématique

1.1.1 Notions de logique

Définition : Une proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux. Les propositions sont distinguées par des lettres majuscules : P, Q, R, ...

On note par 1 ou V une proposition vraie et par 0 ou F une proposition fausse.

1.1.2 Opérations sur les propositions, connecteurs logiques

a) Négation : La négation d'une proposition P notée (non P) ou $\overline{P}$ est une proposition vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

Table de vérité de la négation.

b) Disjonction : La disjonction de deux propositions P et Q, notée (P ou Q) oubien $(P \vee Q)$ est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P, Q est vraie.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Table de vérité de la disjonction.

c) Conjonction : La conjonction des propositions P et Q, notée (P et Q) oubien $(P \wedge Q)$ est une proposition qui n'est vraie que si P, Q sont toutes les deux vraies.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Table de vérité de la conjonction.

d) Implication : La proposition [(non P) ou Q], notée aussi ($\overline{P} \vee Q$) est appelée implication logique et on la note $P \Longrightarrow Q$: se lit P implique Q.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$ $(P \Longrightarrow Q)$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Table de vérité de l'implication.

e) Equivalence : Deux propositions P, Q sont équivalentes si $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$ et on écrit $P \Longleftrightarrow Q$: se lit P est équivalente à Q.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)]$ $(P \Longleftrightarrow Q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Table de vérité de l'équivalence.

Propriétés

1) Commutativité :

$$[(P \vee Q) \Longleftrightarrow (Q \vee P)] \text{ et } [(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (Q \wedge P)].$$

2) Associativité :

$$[(P \vee Q) \vee R] \Longleftrightarrow [P \vee (Q \vee R)] \text{ et } [(P \wedge Q) \wedge R] \Longleftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)].$$

3) Distributivité :

$$[(P \vee Q) \wedge R] \Longleftrightarrow [(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)] \text{ et } [(P \wedge Q) \vee R] \Longleftrightarrow [(P \vee R) \wedge (Q \vee R)].$$

8) Contraposition :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}).$$

1.1.3 Les quantificateurs

a) Quantificateur universel : noté $\forall$, se lit "quel que soit" ou "pour tout".

La proposition $[\forall x \in E,\ P(x)]$ est vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

b) Quantificateur existentiel : noté $\exists$, se lit "il existe au moins".

La proposition $[\exists\, x \in E,\ P(x)]$ est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

1.2 Méthodes du raisonnement mathématique

Il existe plusieurs types de raisonnement mathématique, on va traiter dans cette partie les plus utilisés.

1.2.1 Raisonnement direct

Pour montrer que la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple :

Soient a et b deux nombres. Montrer que

$$a,\ b \in \mathbb{Q} \Longrightarrow (a+b) \in \mathbb{Q}.$$

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels défini par

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ q \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

On utilise le raisonnement direct. On suppose que $a,\ b \in \mathbb{Q}$ et on montre que $(a+b) \in \mathbb{Q}$. Soient $a,\ b \in \mathbb{Q}$. Donc

$$a = \frac{p}{q} \text{ (avec } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*)$$

et

$$b = \frac{p'}{q'} \text{ (avec } p' \in \mathbb{Z},\ q' \in \mathbb{N}^*).$$

Par suite,

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

Or

$$(pq' + qp') \in \mathbb{Z} \text{ et } qq' \in \mathbb{N}^*,$$

donc

$$(a + b) \in \mathbb{Q}.$$

1.2.2 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on aboutit à une contradiction.

Exemple :

Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}.$$

On raisonne par l'absurde. On suppose

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^* : \quad \sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \exists\, k \in \mathbb{N}^* : \quad \sqrt{n^2 + 1} = k \\
\Longrightarrow \quad & \exists\, k \in \mathbb{N}^* : \quad 1 = k^2 - n^2 \\
\Longrightarrow \quad & \exists\, k \in \mathbb{N}^* : \quad 1 = (k - n)(k + n) \\
\Longrightarrow \quad & \exists\, k \in \mathbb{N}^* : \quad k - n = \tfrac{1}{k+n}.
\end{aligned}$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
0 < \tfrac{1}{k+n} < 1 \quad & \Longrightarrow \quad 0 < k - n < 1 \\
& \Longrightarrow \quad n < k < n + 1,
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction (car il n'existe pas un entier entre deux entiers consécutifs).

D'où,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}.$$

1.2.3 Raisonnement par la contraposée

Si l'implication $(P \Longrightarrow Q)$ s'avère difficile à démontrer alors compte tenu de l'équivalence $[(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow \left(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}\right)]$, il revient au même de démontrer que $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$. Autrement dit, pour montrer que la proposition $(P \Longrightarrow Q)$ est vraie, on suppose que $\overline{Q}$ est vraie et on montre que $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par contraposition que

$$n^2 \text{ est pair } \Longrightarrow n \text{ est pair.}$$

Il s'agit de montrer que

$$n \text{ est impair } \Longrightarrow n^2 \text{ est impair.}$$

On suppose que n est impair et on montre que n^2 est impair. On a

$$\begin{aligned}
n \text{ est impair} \quad &\Longrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1 \\
&\Longrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\
&\Longrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \\
&\Longrightarrow \quad \exists k' = (2k^2 + 2k) \in \mathbb{N} : n^2 = 2k' + 1 \\
&\Longrightarrow \quad n^2 \text{ est impair.}
\end{aligned}$$

Exemple 2 :

Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$. En utilisant le raisonnement par la contraposée, montrer que

$$x \neq y \Longrightarrow x^3 + x \neq y^3 + y.$$

Il s'agit de montrer que

$$x^3 + x = y^3 + y \Longrightarrow x = y.$$

On suppose que $x^3 + x = y^3 + y$ et on montre que $x = y$. On a

$$\begin{aligned}
x^3 + x = y^3 + y \quad &\Longrightarrow \quad x^3 - y^3 + x - y = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2) + (x - y) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad x - y = 0 \text{ (car } x^2 + xy + y^2 + 1 = (x + \tfrac{y}{2})^2 + \tfrac{3}{4}y^2 + 1 > 0) \\
&\Longrightarrow \quad x = y.
\end{aligned}$$

1.2.4 Raisonnement par un contre exemple

Pour démontrer que la proposition $(\forall x \in X, P(x))$ est fausse, il suffit de trouver un x_0 de X tel que $\overline{P(x_0)}$ est vraie.

Exemple 1 : Montrer que la proposition suivante est fausse :

"Tout entier divisible par 3 est impair."

On utilise le raisonnement par un contre exemple. L'entier 12 est divisible par 3 car $12 = 4 \times 3$. Mais 12 est pair. Donc la proposition

"Tout entier divisible par 3 est impair"

est fausse.

Exemple 2 :

Montrer que la proposition suivante est fausse :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (3n-7) \in \mathbb{N}.$$

On utilise le raisonnement par un contre exemple. Pour $n = 1$, on a

$$3n - 7 = (3 \times 1) - 7 = -4 \notin \mathbb{N}.$$

Donc la proposition

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (3n-7) \in \mathbb{N}$$

est fausse.

1.2.5 Raisonnement par récurrence

Soit P une proposition dépendant de l'entier naturel n, s'il existe un entier naturel $n_0 \geq 0$ pour lequel $P(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \geq n_0$ $[P(n) \Longrightarrow P(n+1)]$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple :

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{P(n)}.$$

Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \text{ et } \frac{1\,(1+1)\,(2\times 1+1)}{6} = 1.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1\,(1+1)\,(2\times 1+1)}{6}.$$

Autrement dit, $P\,(1)$ est vraie.

Soit $n \geq 1$. On suppose que $P\,(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et on montre que $P\,(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\,(n)$ est vraie.