Cinématique du point matériel

La cinématique est l'étude du mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui le produisent. L'étude du mouvement d'un corps est l'étude des positions successives de ce dernier par rapport à un référentiel (repère d'espace associé à un repère de temps).

Objectif de la cinématique :

- Décrire la position
- La vitesse
- L'accélération

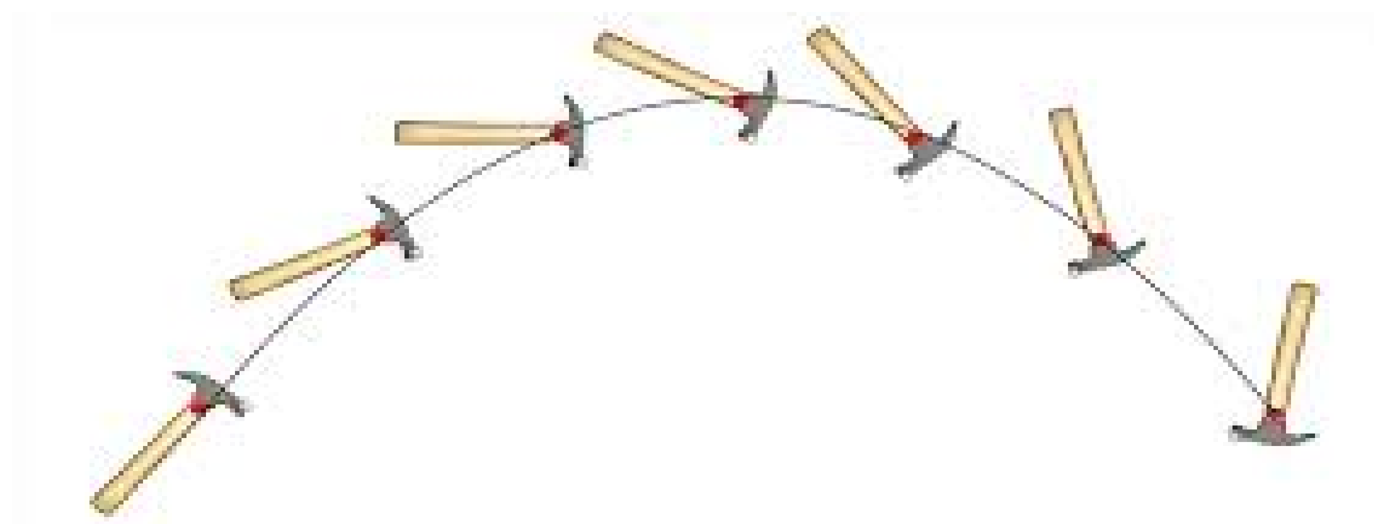
d'un point matériel au cours du temps

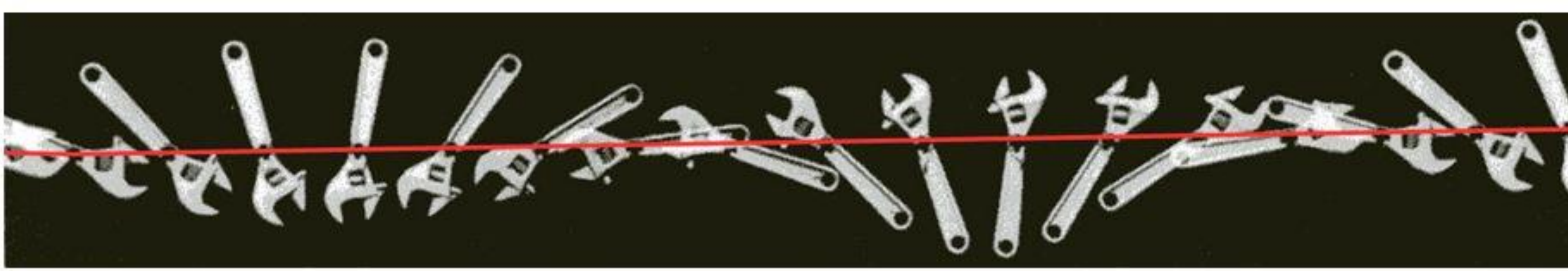
Définitions

- **Point matériel et trajectoire**

  Un point matériel est défini comme étant un élément de matière, de dimensions négligeables, que l'on assimile à un point géométrique. En réalité, on étudie le mouvement du centre de masse d'un corps, point au quel est supposé concentré toute la masse du corps.

  Les positions successives occupées par un point mobile sont la trajectoire . Celle–ci peut être rectiligne ou bien curviligne. Elle peut être ouverte ou fermée.

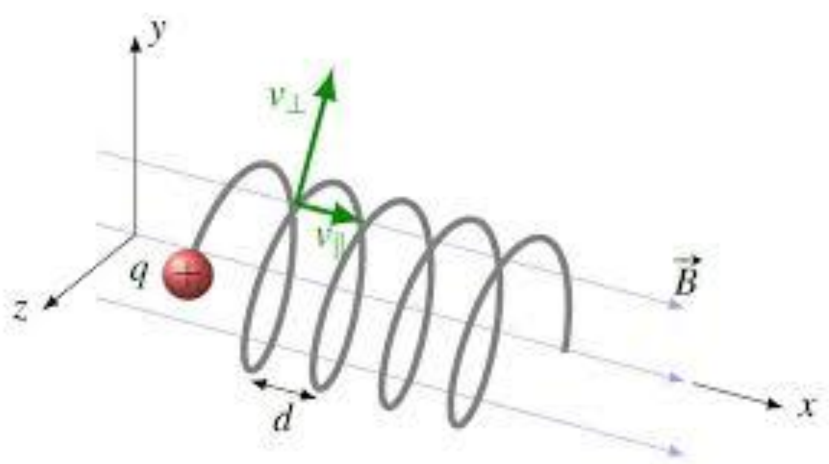


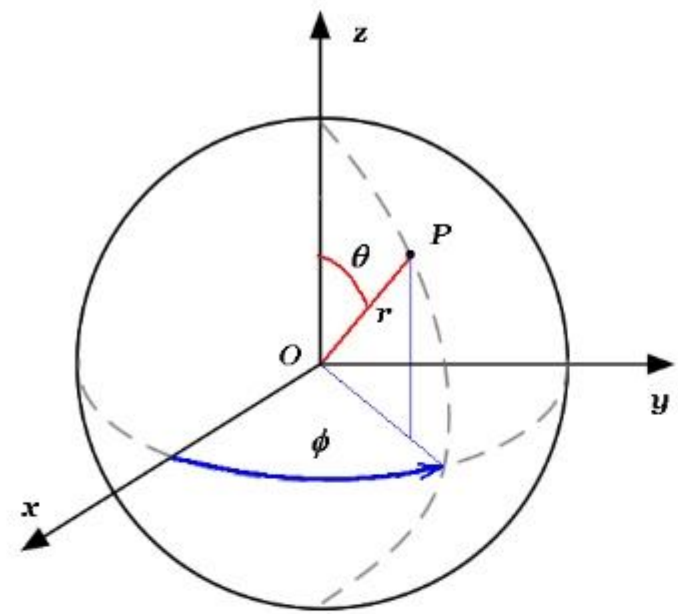


Repérage d’un point

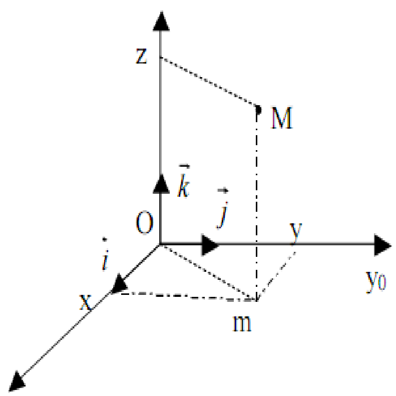
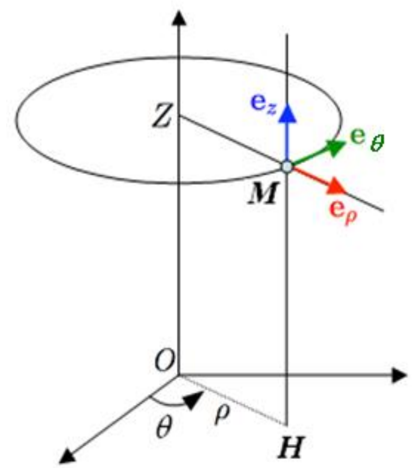
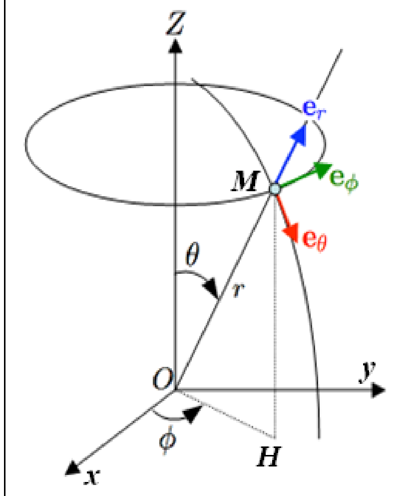
Pour décrire le mouvement d’un point matériel il est nécessaire de préciser par rapport à quel **repère d’espace** on fait les mesures de distance. Le repère d’espace associé à un **repère temporel** forme un ***référentiel***. En général, le fait de parler d’un mouvement sans définir le référentiel n’a aucun sens.

Il est très important de bien choisir le système de coordonnées dans lequel la description du problème va être faite pour simplifier les calculs.

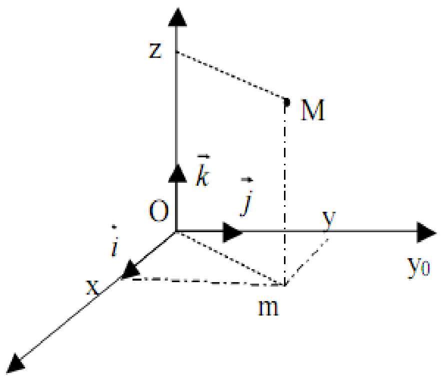
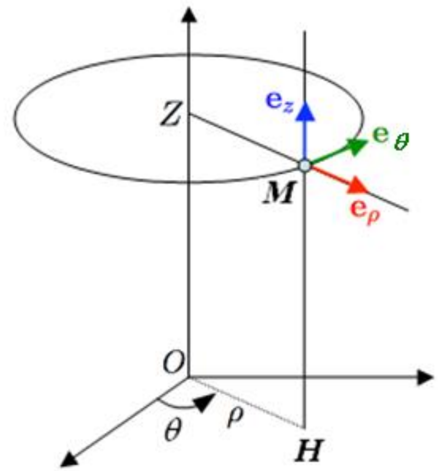
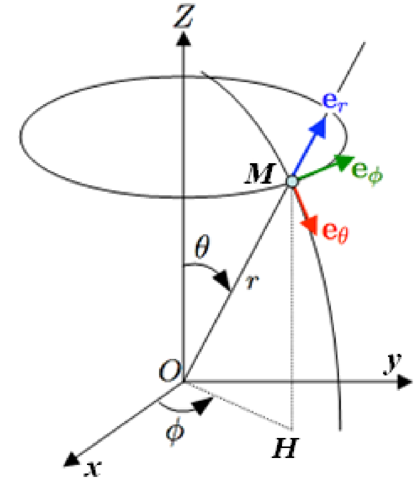


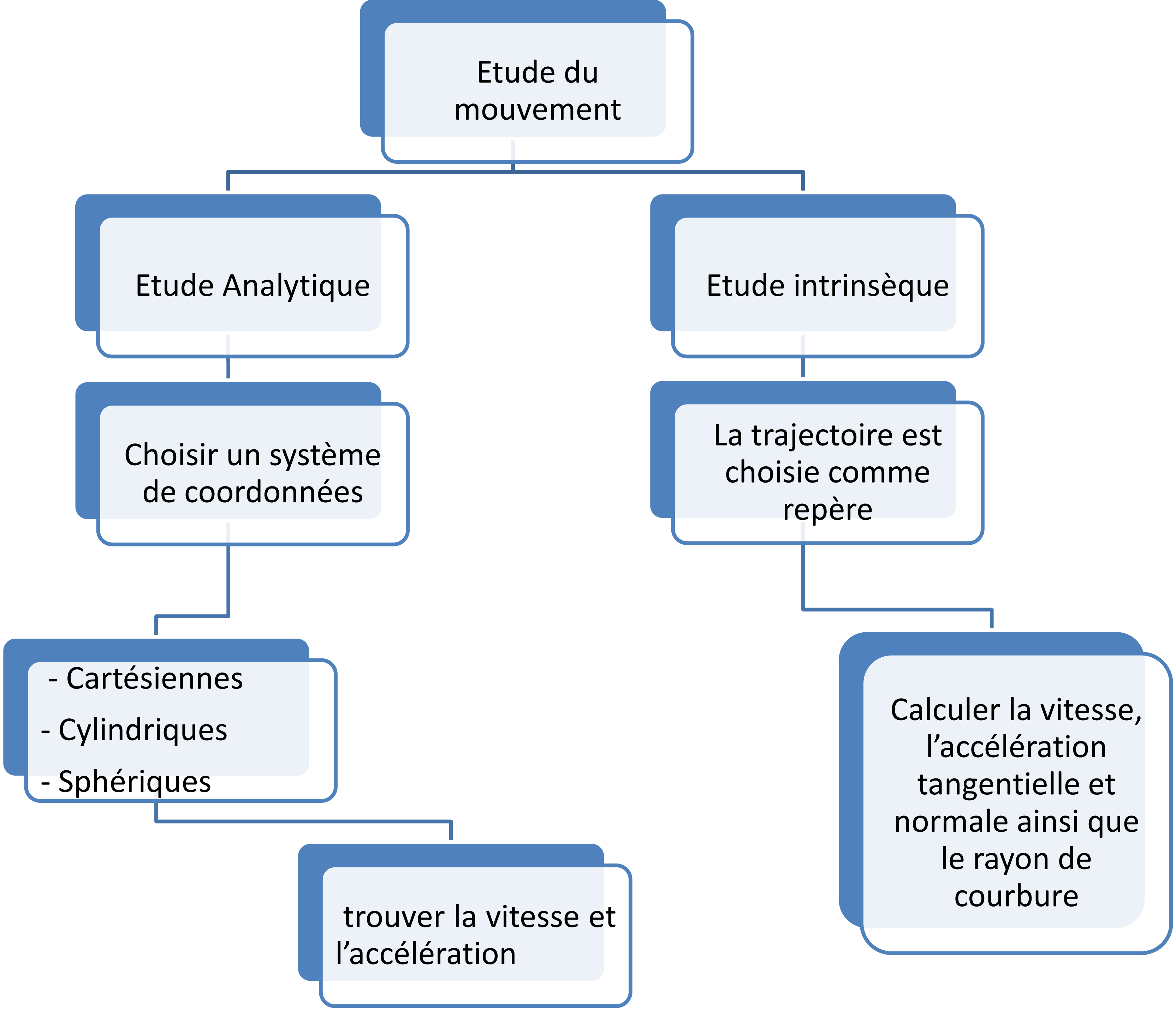


systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
		
x = abscisse; y = ordonnée; z = côte	ρ : rayon polaire, $0 < \rho < +\infty$ θ : angle polaire, $0 < \theta < 2\pi$ z : côte, $-\infty < z < +\infty$	r : rayon $0 < r < +\infty$, θ : latitude, $0 < \theta < \pi$; ϕ : longitude, $0 < \phi < 2\pi$
Correspondance entre les coordonnées	$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\theta = \left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ tg\theta = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ tg\varphi = \left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$
Vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$

systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes	**Coordonnées cylindriques**	**Coordonnées sphériques**
		
x = abscisse; y = ordonnée; z = côte	ρ : rayon polaire, $0 < \rho < +\infty$ θ : angle polaire, $0 < \theta < 2\pi$ z : côte, $-\infty < z < +\infty$	r : rayon $0 < r < +\infty$, θ : latitude, $0 < \theta < \pi$; ϕ : longitude, $0 < \phi < 2\pi$
Correspondance entre les coordonnées	$\begin{cases} x = \rho\ cos\theta \\ y = \rho\ sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\ sin\theta\ cos\varphi \\ y = r\ sin\theta\ sin\varphi \\ z = r\ cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ tg\theta = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ tg\varphi = \left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$
Vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$	$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$

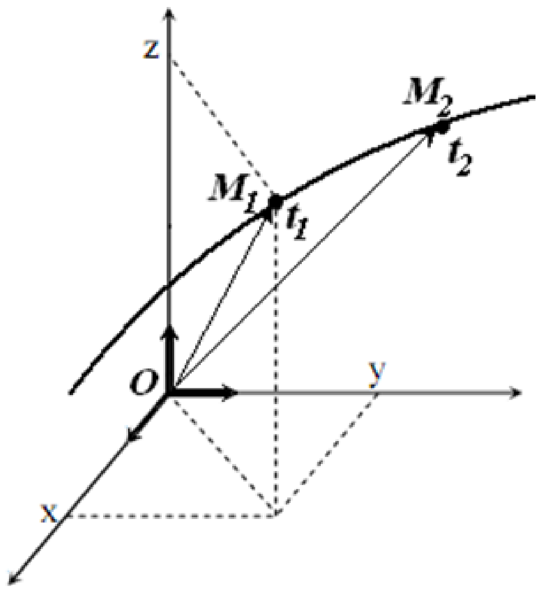

Etude du mouvement
Etude Analytique
Etude intrinsèque
Choisir un système de coordonnées
La trajectoire est choisie comme repère
- Cartésiennes
- Cylindriques
- Sphériques
Calculer la vitesse, l'accélération tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure
trouver la vitesse et l'accélération

Vecteur vitesse

- La position d'un point M est entièrement déterminée par son **vecteur position** à chaque instant . $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

- Pour une particule M qui se trouve à l'instant t_1 en M_1 et à l'instant t_2 en M_2 on défini le **vecteur déplacement**

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$



- On défini donc le **vecteur vitesse moyenne**

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

- La **vitesse instantanée** s'obtient on faisant tendre t_2 vers t_1

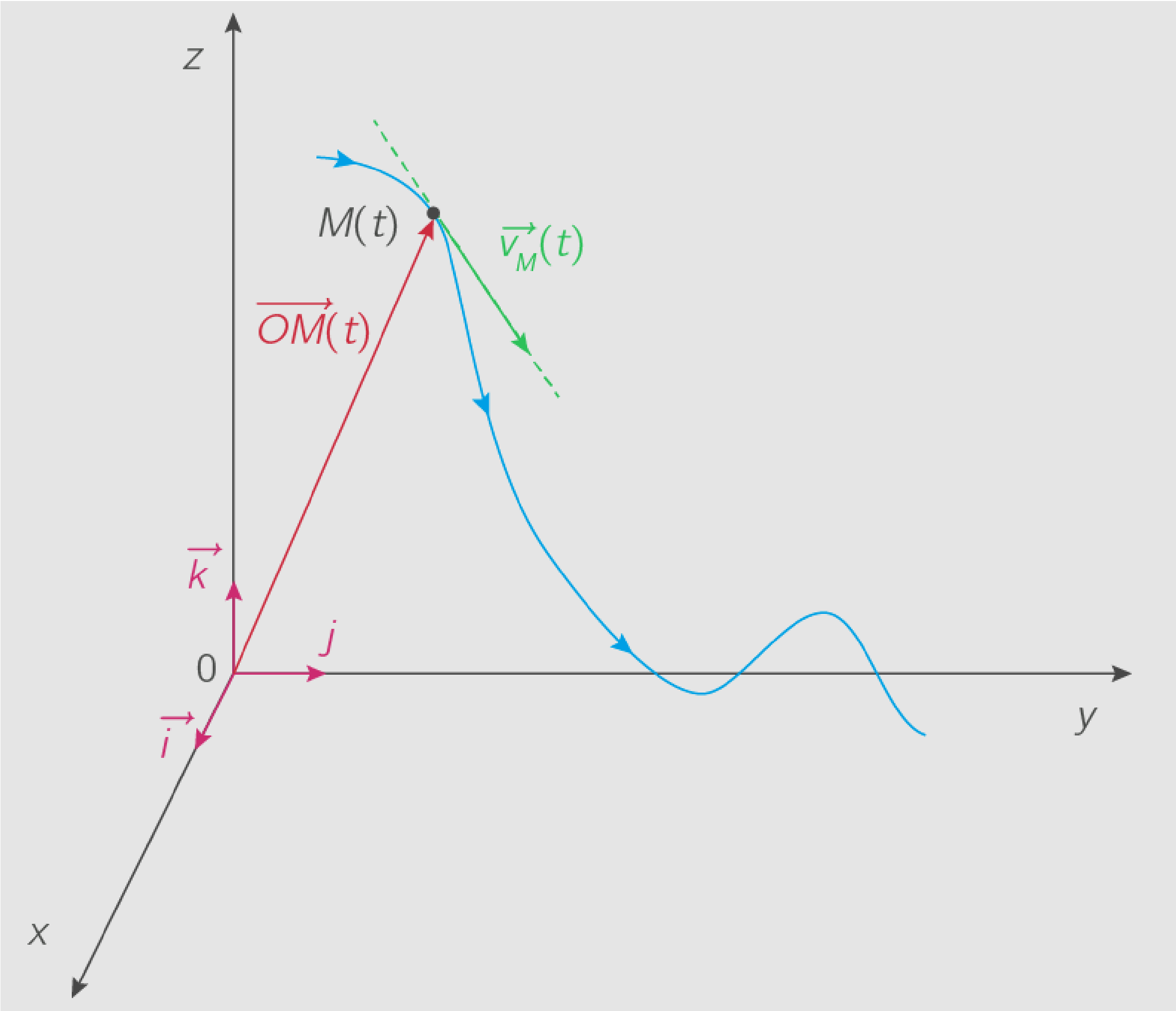
ou bien $\Delta t \to 0$, soit

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Soit $\vec{v}(t) = v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\,, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Et le module de la vitesse est donné par : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2+v_z^2}$



Vecteur accélération

Entre les deux instants t_1 et t_2 le vecteur accélération moyenne est défini par :

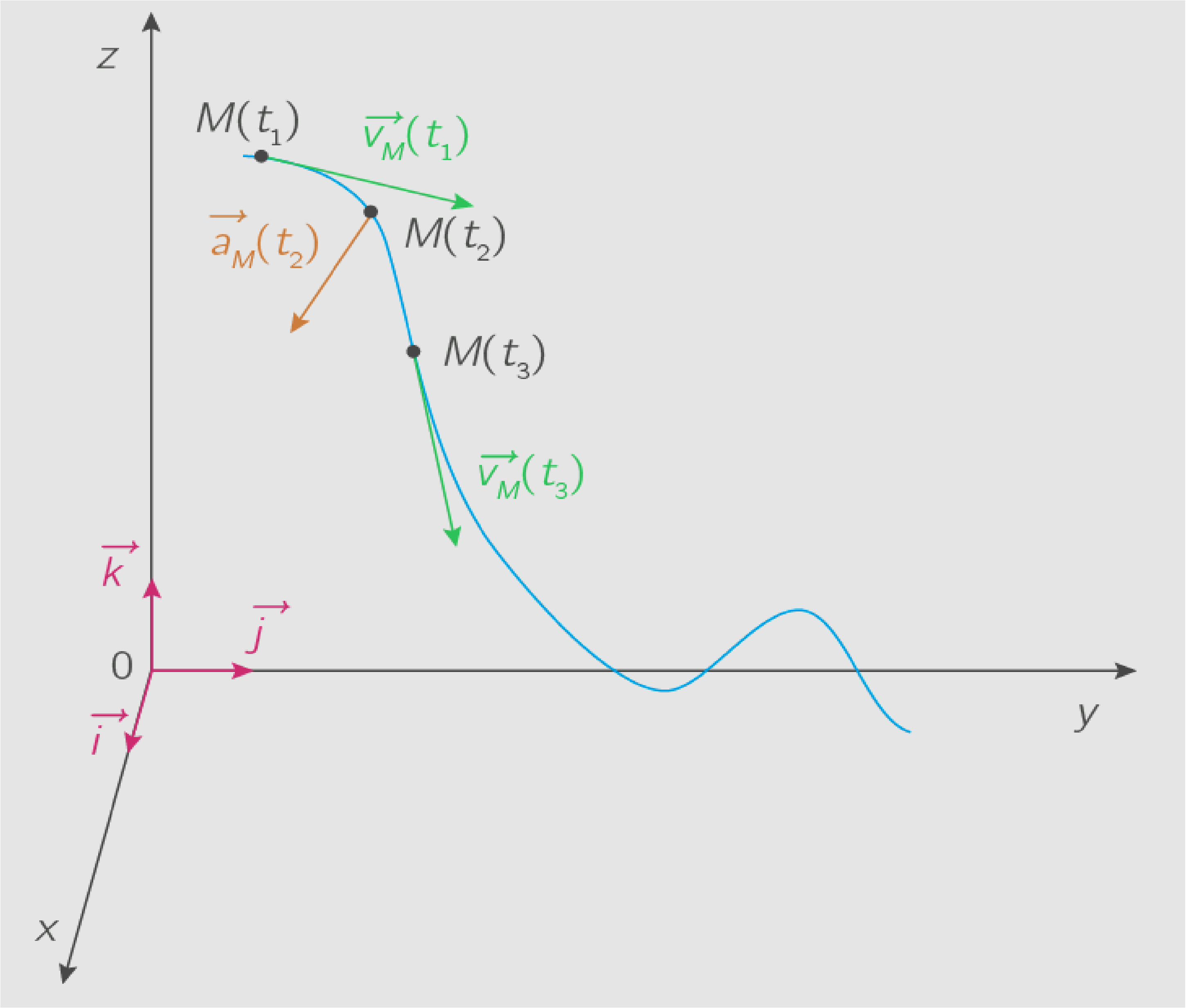
$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

L'accélération instantanée s'obtient en faisant tendre t_2 vers t_1 ou bien $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t_1 + \Delta t) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow \vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Les composantes de $\vec{a}(t)$ sont donc :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$



z
$M(t_1)$
$\overrightarrow{v_M}(t_1)$
$\overrightarrow{a_M}(t_2)$
$M(t_2)$
$M(t_3)$
$\overrightarrow{v_M}(t_3)$
$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{j}$
0
$\overrightarrow{i}$
y
x

Exercice

Soit M un point repéré dans le plan (OXY) par les équations paramétriques suivantes :

$$x(t) = 2t - 3 \ ; \ \ y(t) = t^2 + 3t - 2$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire du point M ;
2. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point M ainsi que leurs modules ;
3. Quelle est la nature du mouvement ? Justifier ;

$$x(t) = 2t - 3 \ ; \ \ y(t) = t^2 + 3t - 2$$

$$x = 2t - 3 \Rightarrow t = \frac{x+3}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+3}{2}\right) - 2$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2t + 3 \end{cases} ; v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4t^2 + 12t + 13}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 2 \end{cases} ; \ \ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2$$

$$\vec{a}.\vec{v} = a_x v_x + a_y v_y = 2(2t + 3) > 0$$

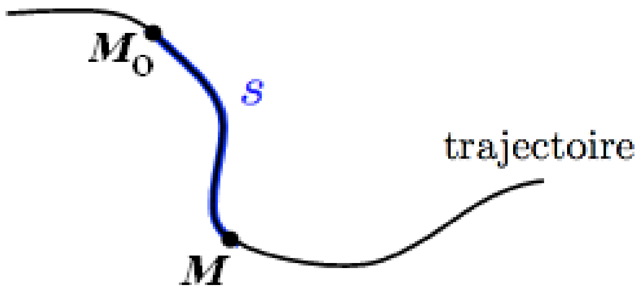
Etude intrinsèque du mouvement

L'étude analytique du mouvement permet d'écrire les vecteurs vitesse et accélération sans connaitre leurs orientations par rapport à la trajectoire.

Abscisse curviligne

On appelle abscisse curviligne s la mesure de la distance parcourue le long de la trajectoire, soit

$$s(t) = \widehat{M_0M}$$

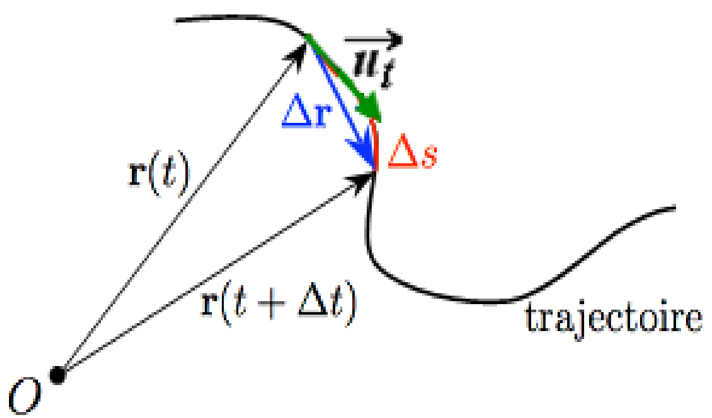


Vecteur vitesse

il y a une différence entre le vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$ et la variation de l'abscisse curviligne Δs. mais

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta s} = 1 \Rightarrow \frac{\|d\vec{r}\|}{ds} = 1$$

$$\|d\vec{r}\| = dr = ds$$



On défini un vecteur unitaire tangent à la courbe au point *M* orienté dans le sens du mouvement tel que

$$\overrightarrow{u_t} = \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|} = \frac{d\vec{r}}{\mathrm{d}s}$$

- On redéfini le vecteur vitesse par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\,\overrightarrow{u_t} \Longrightarrow \vec{v}(t) = v\,\overrightarrow{u_t}$$

le vecteur vitesse reste toujours tangent à la trajectoire

Il est toujours orienté dans le sens du mouvement

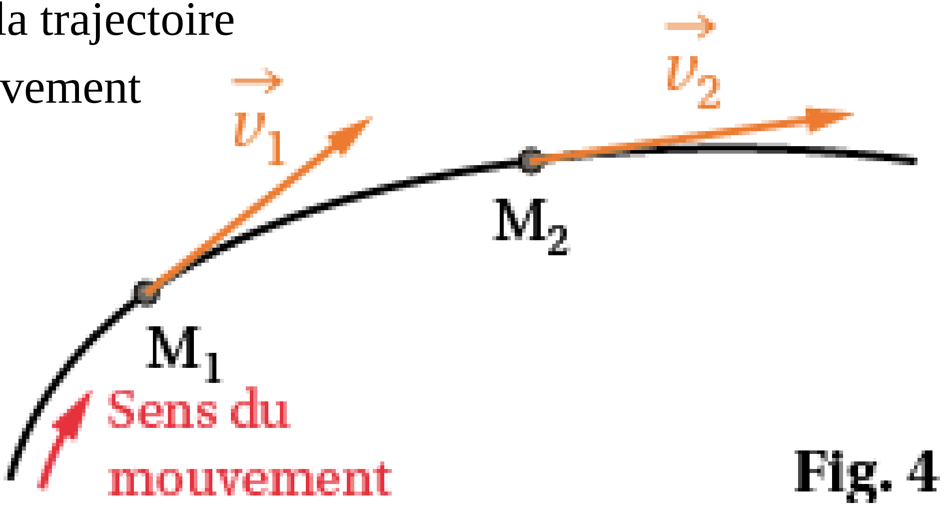


Fig. 4

Accélérations tangentielle et normale

En dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse on obtient l'accélération sous la forme :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\overrightarrow{u_t}) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$$

Le premier terme est un vecteur tangent à la trajectoire, on l'appelle ***accélération tangentielle***

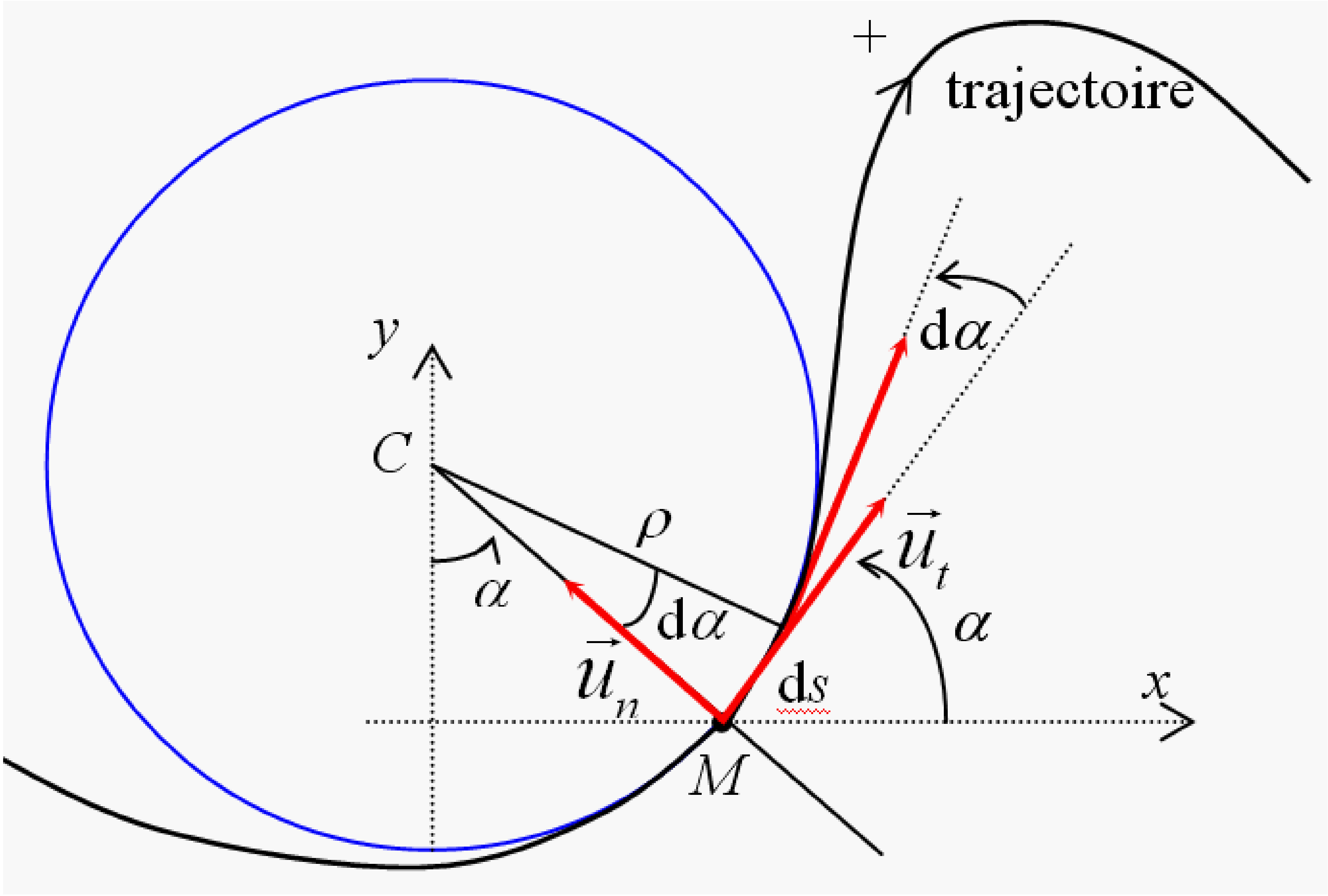
$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} = a_t\,\overrightarrow{u_t}$$

Elle indique la manière dont varie la grandeur (module) de la vitesse au cours du temps.

le second terme $v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$ est un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{u_t}$ donc a la courbe aussi.

$$\overrightarrow{u_t}.\overrightarrow{u_t} = 1 \quad \text{donc} \quad \frac{d}{dt}(\overrightarrow{u_t}.\overrightarrow{u_t}) = 0$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}.\overrightarrow{u_t} + \overrightarrow{u_t}.\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = 2\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}.\overrightarrow{u_t} = 0 \ \text{alors} \ \frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} \perp \overrightarrow{u_t}$$

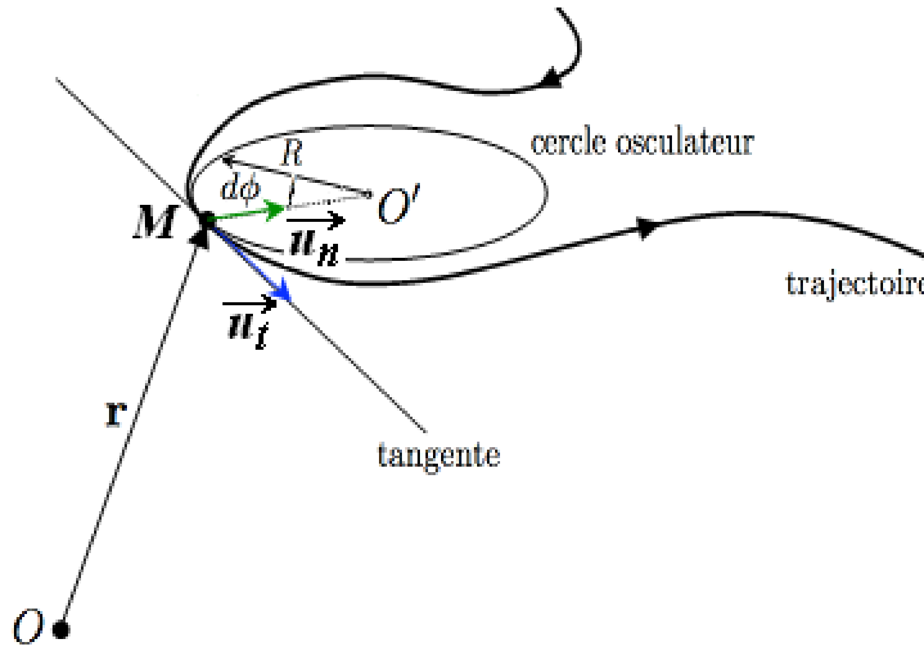

trajectoire
$\mathrm{d}\alpha$
y
C
ρ
$\vec{u}_t$
α
$\mathrm{d}\alpha$
α
$\vec{u}_n$
$\mathrm{d}s$
x
M

Ce second terme détermine la variation de la direction du vecteur vitesse au cours du temps. On l'appelle accélération normale noté

$$\overrightarrow{a_n} = v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

La dérivée du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_t}$ par rapport à α correspond à un vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire qu'on note $\overrightarrow{u_n}$ dirigé vers le centre du cercle osculateur *C*.



$$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\alpha} = \overrightarrow{u_n}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u_n}$ est donc normal à la trajectoire au point *M* et dirigé vers la concavité de la courbe.

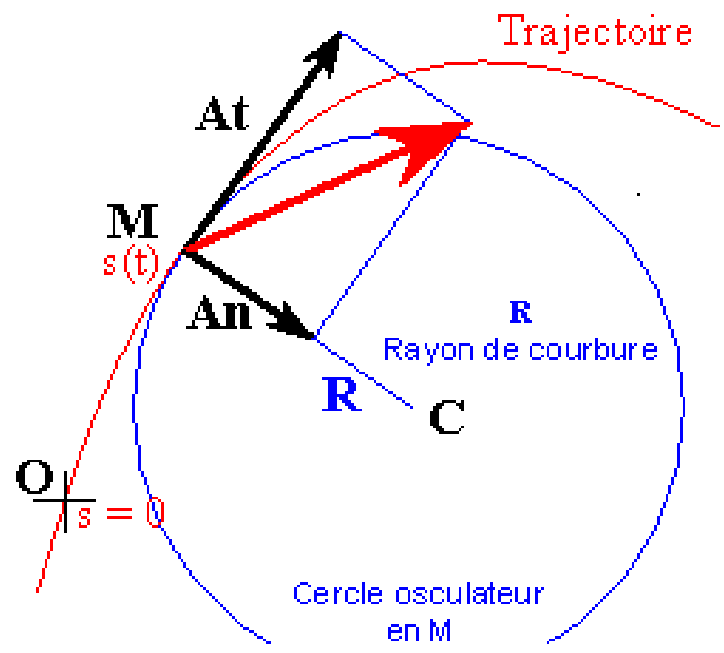
sur un cercle de rayon *R*, la longueur d'un arc *ds* est proportionnelle à l'angle qui le délimite $ds = R\,d\alpha$ $\qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$

$$\overrightarrow{a_n} = v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v^2\,\frac{1}{R}\,\overrightarrow{u_n} \Longrightarrow \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n}$$

R correspond au rayon de courbure de la trajectoire.

En résumé, l'accélération d'un mobile peut toujours être décomposée en deux accélérations, l'une est dite tangentielle et l'autre normale

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n}$$



Comme les deux vecteurs $\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_n}$

sont orthogonaux le module de

l'accélération est

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2} \Longrightarrow a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

Exercice

Un point matériel M se déplaçant dans le plan OXY
est repéré par ses coordonnées cartésiennes:

$$x(t) = t - 1, \quad y(t) = \frac{t^2}{2}$$

1. Donner l'équation de la trajectoire.
2. Donner les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$.
3. Donner l'accélération tangentielle et normale et déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

Solution

1) l'équation de la trajectoire

$x = t - 1 \;\Rightarrow t = x + 1$

D'ou $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

2) Vecteur position $\overrightarrow{OM} = (t - 1)\,\vec{i} + \frac{t^2}{2}\,\vec{j}$

Vecteur vitesse:

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x = 1 \\ v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v_y = t \end{cases} \qquad \vec{v} = \vec{i} + t\,\vec{j}$$

Vecteur accélération:

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 1 \end{cases} \qquad \vec{a} = \vec{j}$$

3) Le module de $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v = \sqrt{1 + t^2}$ et $a = 1\, m/s^2$

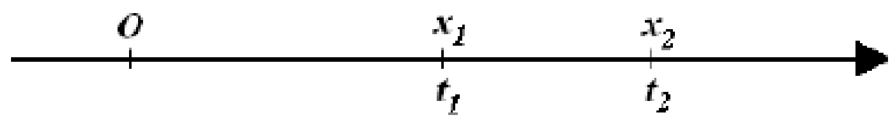
Accélération tangentielle: $a_T = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_T = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

Accélération normale: $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \Rightarrow a_N = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

Rayon de courbure : $a_N = \frac{v^2}{\rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \rho = (1 + t^2)^{3/2}$

mouvement rectiligne

Le mouvement d'un corps est rectiligne si sa trajectoire est une droite. La position de l'objet est définie par son déplacement « x » à partir d'un point origine arbitraire O. $x = f(t)$, x peut être positif ou négatif



<table>
<tr><th colspan="2">mouvement rectiligne (MR)</th></tr>
<tr><td>Uniforme (MRU)
✓ trajectoire rectiligne
✓ vitesse constante ($v = cste$).
✓ accélération nulle ($a = 0$).</td><td>Uniformément Varier (MRUV)
✓ trajectoire rectiligne ;
✓ accélération constante et non nulle.
($a = a_0 = cste$)</td></tr>
<tr><td>Equations du mouvement :
Espace parcouru :
$x - x_0 = v(t - t_0)$</td><td>Equations du mouvement :
$v - v_0 = a_0(t - t_0)$
$x(t) - x_0 = \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0)$
$v^2 - {v_0}^2 = 2a_0(x - x_0)$</td></tr>
</table>

Exercice :

Une voiture roule à 45 km/h quand un enfant traverse la route. Le temps de réaction du conducteur est : 0,7 s. Aussitôt que le conducteur freine, la décélération de la voiture est $-7 m/s^2$.

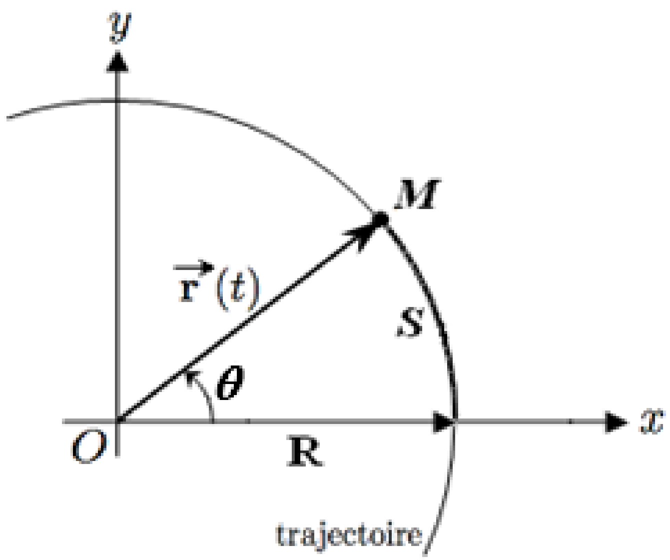
1. Calculer la distance parcourue par la voiture pendant les 0,7 s ou le conducteur voit l’enfant traverser la route mais sans qu’il freine.

2. Calculer la distance parcourue depuis le moment ou le conducteur freine jusqu’au moment ou la voiture s’arrête.

3. Déduire la distance totale que la voiture parcoure depuis que le conducteur voit l’enfant traverser jusqu’au moment ou la voiture s’arrête.

mouvement circulaire

Supposons un mobile qui décrit une trajectoire circulaire dans le plan Oxy ; la circonférence a un rayon R et est centrée sur l'origine des axes O. Dans ce cas il est plus commode de travailler avec des coordonnées polaires ρ et θ, plutôt qu'avec des coordonnées cartésiennes.



s = R θ, à condition que θ soit mesuré en radian.

D'où ds = R dθ

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_t} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_t} \Longrightarrow \mathrm{R}\,\omega\,\overrightarrow{u_t}$$

Ceci nous amène à définir la **vitesse angulaire ω** comme la dérivée par rapport au temps de l'angle θ, elle s'exprime en (rad/s)

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow v(t) = \mathrm{R}\,\omega$$

Mouvement circulaire (MC)	
Uniforme (MCU) ✓ la trajectoire circulaire ✓ vitesse linéaire et angulaire ω sont des constantes. Attention l'accélération totale n'est pas nulle	**Uniformément Varier (MCUV)** ✓ trajectoire circulaire ✓ accélération angulaire constante $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = Cste$
Equations du mouvement : Espace parcouru : $s - s_0 = v(t - t_0)$ Angle balayé : $\theta - \theta_o = \omega\,(t - t_0)$ la période : $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$ accélération : $\overrightarrow{a_t} = \vec{0}$, $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\,\overrightarrow{u_n} = v^2/R\,\overrightarrow{u_n}$	Equations du mouvement : $\omega - \omega_o = \alpha\,(t - t_0)$ $\theta - \theta_o = \frac{1}{2}\alpha\,(t - t_0)^2 + \omega_o(t - t_0)$ $\omega^2 - {\omega_0}^2 = 2\alpha(\theta - \theta_o)$ $\overrightarrow{a_t} = \mathrm{R}\alpha\,\overrightarrow{u_t}$, $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\,\overrightarrow{u_n}$

mouvement rectiligne (MR)	Mouvement circulaire (MC)
Uniforme (MRU) ✓ trajectoire rectiligne ✓ vitesse constante ($v = cste$). ✓ accélération nulle ($a = 0$).	**Uniforme (MCU)** ✓ la trajectoire circulaire ✓ vitesse linéaire et angulaire ω sont des constantes. Attention l'accélération totale n'est pas nulle
Equations du mouvement : Espace parcouru : $x - x_0 = v(t - t_0)$	Equations du mouvement : Espace parcouru : $s - s_0 = v(t - t_0)$ Angle balayé : $\theta - \theta_o = \omega\,(t - t_0)$ la période : $T = 2\pi/\omega$ accélération : $\overrightarrow{a_t} = \vec{0}$, $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\,\overrightarrow{u_n} = v^2/R\,\overrightarrow{u_n}$
Uniformément Varier (MRUV) ✓ trajectoire rectiligne ; ✓ accélération constante et non nulle. ($a = a_0 = cste$)	**Uniformément Varier (MCUV)** ✓ trajectoire circulaire ✓ accélération angulaire constante $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = Cste$
Equations du mouvement : $v - v_0 = a_0(t - t_0)$ $x(t) - x_0 = \frac{1}{2}\,a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0)$ $v^2 - {v_0}^2 = 2a_0(x - x_0)$	Equations du mouvement : $\omega - \omega_o = \alpha\,(t - t_0)$ $\theta - \theta_o = \frac{1}{2}\alpha\,(t - t_0)^2 + \omega_o(t - t_0)$ $\omega^2 - {\omega_0}^2 = 2\alpha(\theta - \theta_o)$ $\overrightarrow{a_t} = R\alpha\,\overrightarrow{u_t}$, $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\,\overrightarrow{u_n}$

Exercice

Rotation. Le rotor d'une machine tourne à 1200 tr.min^{-1}. À l'instant $t = 0$, il est soumis à une accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ supposée constante jusqu'à l'arrêt complet. Il s'arrête en 300 tours.

1) Donner les équations horaires de ω et θ .

2) Calculer la durée du freinage. Que vaut $\ddot{\alpha}$?

Mouvements relatifs

II.5.1. Changement de référentiels

Supposons que le mouvement d'un point matériel M (position, vitesse et accélération) est connu par rapport à un référentiel donné. On veut déterminer le mouvement de M par rapport à un autre référentiel.

Soit le 1^{er} référentiel *R(O,xyz)* définit par les vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On le considère fixe et nous l'appelons repère absolu. Dans *R* on défini :

- ✓ Le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$
- ✓ Le vecteur vitesse absolue : $\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$
- ✓ Le vecteur accélération absolue : $\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$

Soit le 2ème référentiel *R'(O',x'y'z')* définit par les vecteurs $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$. Il est en mouvement par rapport à *R* donc nous l'appelons repère relatif. Dans *R'* on défini :

- ✓ Le vecteur position : $\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'}$
- ✓ Le vecteur vitesse relative : $\vec{v_r} = \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\,\vec{i'} + \dot{y}'\,\vec{j'} + \dot{z}'\,\vec{k'}$
- ✓ Le vecteur accélération relative : $\vec{a_r} = \dfrac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \ddot{x}'\,\vec{i'} + \ddot{y}'\,\vec{j'} + \ddot{z}'\,\vec{k'}$

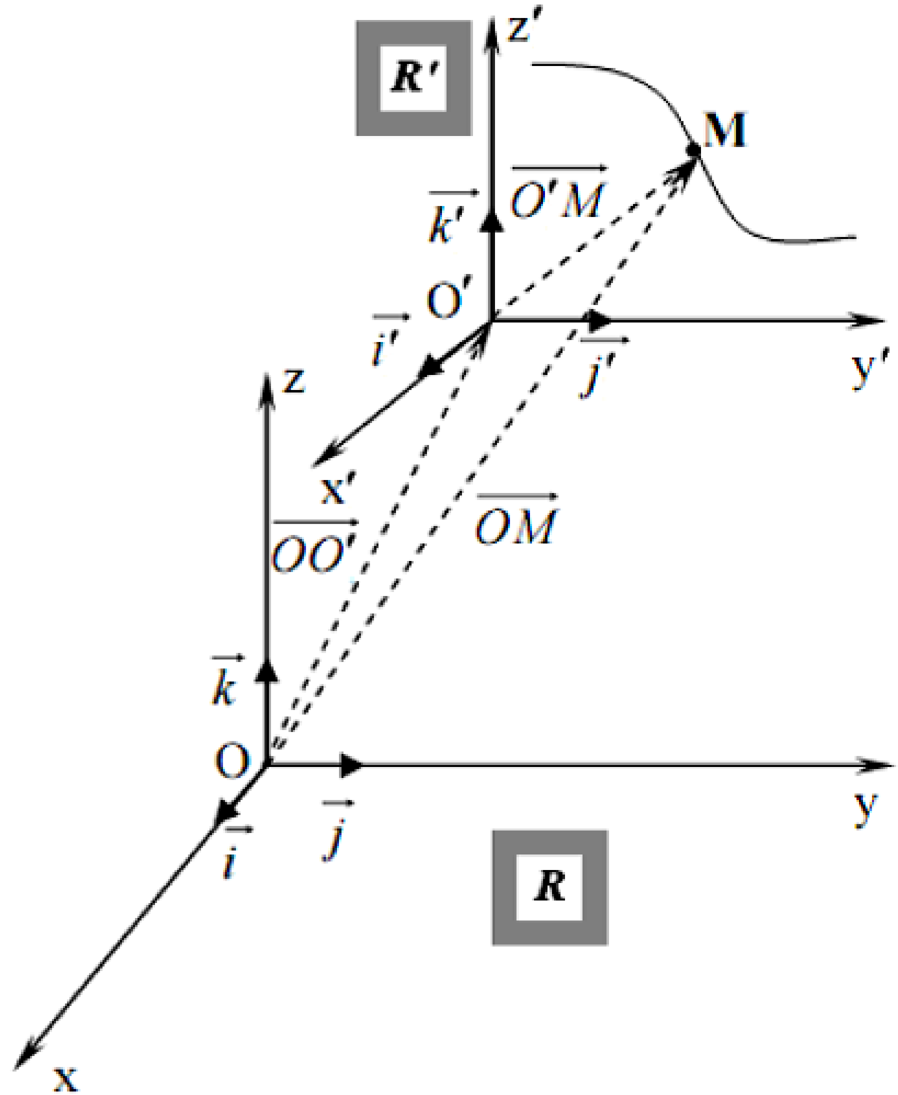
Pour étudier un mouvement bien défini, on utilise les définitions suivantes :

- ➢ le trièdre *Oxyz* (repère *R*) est le repère *absolu* ou référentiel *absolu* ;
- ➢ le trièdre *O'x'y'z'* (repère *R'*) est le repère *relatif* ou référentiel *relatif* ;
- ➢ le mouvement du point *M* par rapport à « *R* » s'appelle <u>*mouvement absolu*</u> ;
- ➢ le mouvement du point *M* par rapport à « *R'* » s'appelle <u>*mouvement relatif*</u> ;
- ➢ le mouvement de « *R'* » par rapport à « *R* » s'appelle <u>*mouvement d'entraînement*</u> ;

II.5.2. Relation entre les positions

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'}$$



II.5.3. Relation entre les vitesses

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

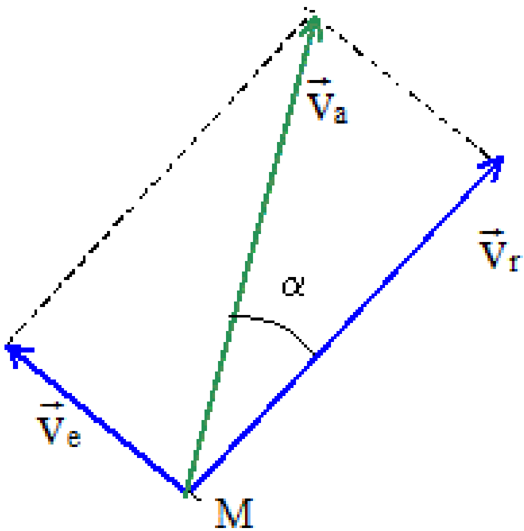
$$\vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}(x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'})$$

Puisque le repère R' et mobile alors les vecteurs $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ ne sont pas constants au cours du temps. Leurs dérivées par rapport au temps ne sont pas nulles.

$$\overrightarrow{v_a} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right] + \left[\frac{dx'}{dt}\,\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\,\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k'}\right]$$

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + (\dot{x}'\,\vec{i'} + \dot{y}'\,\vec{j'} + \dot{z}'\,\vec{k'})$$

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + \overrightarrow{v_r}$$

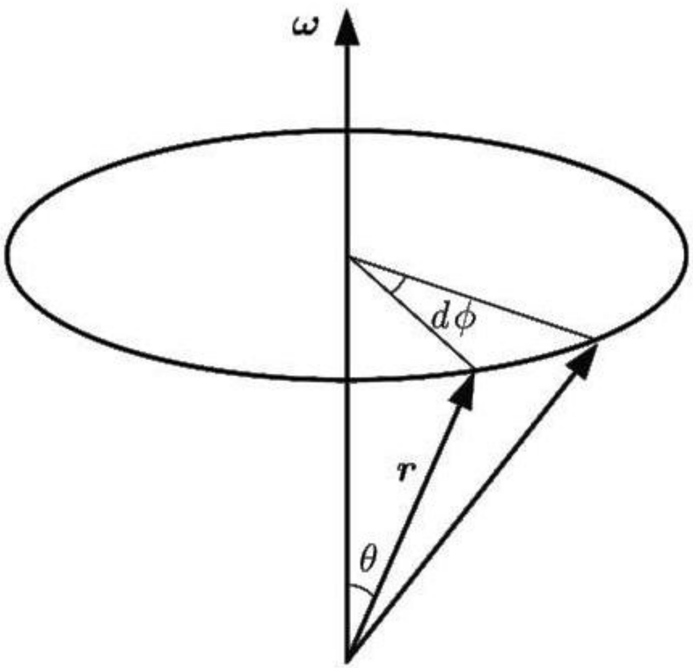


$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

Cette formule s'appelle loi de composition des vitesses

Le terme $\overrightarrow{v_e}$ est appelé vitesse d'entrainement de *R'* par rapport à *R*. elle peut être considérée comme la vitesse absolue qu'aurai *M* dans *R* si *M* était immobile dans *R'*.

Dérivée d'un vecteur tournant



Si un vecteur $\vec{r}$ tourne par rapport à un axe, alors son vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est portée par l'axe de rotation

La dérivée par rapport au temps du vecteur $\vec{r}$ est donnée par :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Cette relation reste valable pour n'importe quel vecteur. en particulier pour les vecteurs unitaires $\vec{i'}, \vec{j'}$ et $\vec{k'}$ on écrit donc:

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i'}, \quad \frac{d\vec{j'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j'} \quad \text{et} \ \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k'}$$

$\vec{\omega}$: est appelé vecteur vitesse de rotation, il correspond à la rotation des axes de R' par rapport à un axe dont la direction est définie par celle de $\vec{\omega}$. Attention $\vec{\omega}$ ne correspond pas à la rotation de O' dans R.

l'expression de la vitesse d'entrainement devient donc :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i}}{dt} + y'\frac{d\vec{j}}{dt} + z'\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k})$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$\overrightarrow{v_e} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{translation} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{rotation}$$

$\overrightarrow{v_e}$ s'écrit comme addition de deux termes

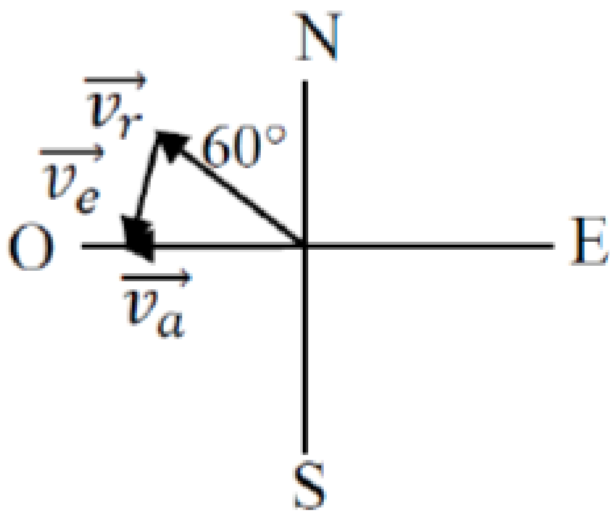
1) $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$: vitesse de translation de *O'* dans *R*

2) $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$: rotation des axes de *R'* par rapport à *R*

Exercice 05 :

Un bateau prend la mer en direction du nord - 60° - ouest à la vitesse de 4 km/h par rapport à l'eau. Le mouvement du bateau par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l'ouest à la vitesse de 5 km/h.

1. Identifier le repère fixe $(\mathcal{R})$, le repère mobile $(\mathcal{R}')$ et le mobile M, ainsi que les vitesses absolu $\vec{v}_a$, relative $\vec{v}_r$ et d'entrainement $\vec{v}_e$;
2. Calculer la vitesse et la direction du courant d'eau.



1. Repère fixe (R) : la terre, Repère mobile (R') : le courant (l'eau), le mobile (M) : le bateau.

La vitesse absolue : vitesse du bateau par rapport à la terre

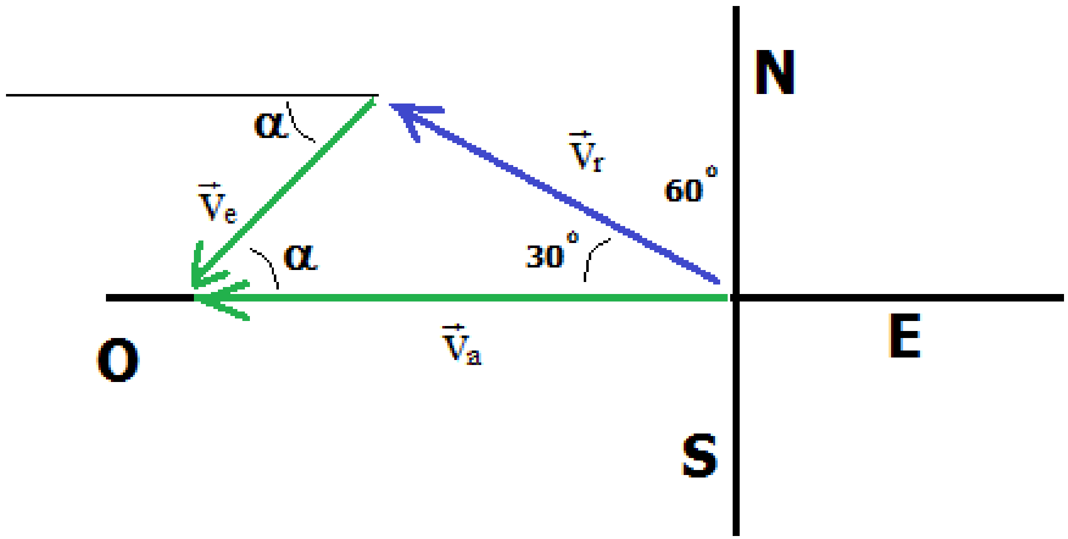
$$v_a = v(Mobile/R) = 5km/h$$

La vitesse relative : vitesse du bateau par rapport au courant d'eau

$$v_r = v(Mobile/R') = 4km/h$$

La vitesse d'entrainement : vitesse du courant d'eau par rapport à la terre

$$v_e = v(R'/R) = ?$$



2. La vitesse et la direction du courant d'eau (v_e) :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad \rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r \quad \rightarrow (\vec{v}_e)^2 = (\vec{v}_a - \vec{v}_r)^2 \rightarrow v_e^2 = v_a^2 + v_r^2 - 2\vec{v}_a.\vec{v}_r$$
$$= v_a^2 + v_r^2 - 2v_a v_r \cos(30°)$$

Donc :

$$v_e = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 - 2v_a v_r \cos(30°)} = 2.52 km/h$$

La direction. En utilisant la loi des sinus :

$$\frac{v_r}{sin\alpha} = \frac{v_e}{sin\, 30°} \Rightarrow \; sin\alpha = \frac{v_r}{v_e}\, sin\, 30°$$

$$sin\alpha = 0.79 \text{ d'ou } \alpha = 52°,53$$

II.5.4. Relation entre les accélérations

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(x'\frac{d\vec{i}}{dt} + y'\frac{d\vec{j}}{dt} + z'\frac{d\vec{k}}{dt}\right) + \frac{d}{dt}(\dot{x}'\,\vec{i} + \dot{y}'\,\vec{j} + \dot{z}'\,\vec{k})$$

$$\overrightarrow{a_a} = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right)}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}}{dt}\right)}_{\overrightarrow{a_c}} + \underbrace{(\ddot{x}'\,\vec{i} + \ddot{y}'\,\vec{j} + \ddot{z}'\,\vec{k})}_{\overrightarrow{a_r}}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_r}$$

$\overrightarrow{a_e}$: Accélération d'entrainement.

$\overrightarrow{a_c}$: Accélération complémentaire ou accélération de coriolis.

$\overrightarrow{a_a}$: Accélération absolue.

$\overrightarrow{a_r}$: Accélération relative.

Accélération de Coriolis

On peut écrire l'accélération de coriolis sous la forme :

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left(\dot{x}' \frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + \dot{y}' \frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + \dot{z}' \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\dot{x}' (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{i'}) + \dot{y}' (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{j'}) + \dot{z}' (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{k'})\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[(\vec{\omega} \wedge \dot{x}'\overrightarrow{i'}) + (\vec{\omega} \wedge \dot{y}'\overrightarrow{j'}) + (\vec{\omega} \wedge \dot{z}'\overrightarrow{k'})\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\vec{\omega} \wedge (\dot{x}'\overrightarrow{i'} + \dot{y}'\overrightarrow{j'} + \dot{z}'\overrightarrow{k'})\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$$

- Si les axes de *R'* ne tournent pas par rapport à *R* (translation) : $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a_c} = 0, \overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$