Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire 2020-2021
MATHS 1 Décembre 2020

Corrigé de la série de T.D. N 1 : Logique et raisonnement mathématiques

Exercice n° 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donnons leurs négations

(a) Comme la proposition $(\sqrt{9} = -3)$ est fausse, donc la proposition

$$[((-3)^2 = 9) \wedge (\sqrt{9} = -3)]$$

est aussi fausse.

La négation :

$$\overline{[(-3)^2 = 9] \wedge (\sqrt{9} = -3)]} \Longleftrightarrow [(-3)^2 \neq 9] \vee (\sqrt{9} \neq -3)].$$

(b) Comme la proposition $(\sqrt{36} = 6)$ est vraie, donc la proposition

$$[(|-8| = -8) \vee (\sqrt{36} = 6)]$$

est aussi vraie.

La négation :

$$\overline{[(|-8| = -8) \vee (\sqrt{36} = 6)]} \Longleftrightarrow [|-8| \neq -8] \wedge (\sqrt{36} \neq 6)].$$

(c) ***La négation :***

$$\overline{[\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = -9]} \Longleftrightarrow [\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \neq -9].$$

On a $(\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0)$, donc la proposition $(\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \neq -9)$ est vraie. Par suite,

$$[\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = -9]$$

est une proposition fausse.

(d) $[\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+3) < 0]$ est une proposition vraie. En effet, pour $x = 0$ par exemple, on a

$$(x-1)(x+3) = (0-1)(0+3) = -3 < 0.$$

La négation :

$$\overline{[\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+3) < 0]} \Longleftrightarrow [\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+3) \geq 0].$$

(e) La proposition $[\forall x \in [3, +\infty[, \quad x^2 \geq 9]$ est vraie. En effet, soit $x \in [3, +\infty[$. Comme la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

est croissante, alors

$$\begin{array}{rcl} x \geq 3 & \Rightarrow & f(x) \geq f(3) \\ & \Rightarrow & x^2 \geq 9. \end{array}$$

La négation :

$$\overline{[\forall x \in [3, +\infty[, \quad x^2 \geq 9]} \Longleftrightarrow [\exists\, x \in [3, +\infty[, \quad x^2 < 9].$$

(f) ***La négation :***

$$\overline{[\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+1) \neq 0]} \Longleftrightarrow [\exists x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+1) = 0].$$

La proposition $[\exists x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+1) = 0]$ est vraie. En effet, prenons $x = 1$ par exemple, on a

$$(x-1)(x+1) = (1-1)(1+1) = 0.$$

Par suite, la proposition

$$[\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+1) \neq 0]$$

est fausse.

(g) La proposition $[\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x^2 < y]$ est vraie. En effet, Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = x^2 + 1 \in \mathbb{R}$. Donc

$$x^2 < x^2 + 1 = y.$$

La négation :

$$\overline{[\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x^2 < y]} \Longleftrightarrow [\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq y].$$

(h) ***La négation :***

$$\overline{[\exists\, y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < y]} \Longleftrightarrow [\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq y].$$

La proposition $[\exists\, y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < y]$ est fausse. Il suffit de montrer que sa négation est vraie. En effet, Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $x = (y + \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}$. Donc

$$x^2 = y^2 + y + \frac{1}{4} \geq y.$$

Exercice n° 2. Soient $P, \; Q$ et R trois propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrons que

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}).$$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

On remarque de cette table de vérité que les propositions $(P \Longrightarrow Q)$ et $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$ ont la même valeur de vérité (elles sont vraies en même temps et elles sont fausses en même temps), donc elles sont équivalentes.

2. Donnons les négations des propositions suivantes :

(a) $P \Rightarrow Q$,

$$\begin{aligned} \overline{P \Rightarrow Q} &\Longleftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \\ &\Longleftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \\ &\Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}. \end{aligned}$$

(b) $P \vee (Q \wedge R)$.

$$\begin{aligned} \overline{P \vee (Q \wedge R)} &\Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{(Q \wedge R)} \\ &\Longleftrightarrow \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}) \end{aligned}$$

3. Considérons la proposition

$$S : ''\forall n \in \mathbb{N},\ (n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2).''$$

   (a) Donnons la négation de la proposition S.

$$\overline{S} : ''\exists n \in \mathbb{N},\ [(n^2 \neq n) \wedge (n < 2)]''.$$

   (b) Montrons que la proposition S est vraie. Il suffit de montrer que la proposition $\overline{S}$ est fausse. En effet, La proposition $(n < 2)$ est vrai si $n = 0$ ou $n = 1$. Mais dans ces deux cas, on a bien $n^2 = n$. C'est à dire que la proposition

$$\overline{S} : [\exists n \in \mathbb{N},\ [(n^2 \neq n) \wedge (n < 2)]]$$

   est fausse. Par suite, la proposition S est vraie.

Exercice n° 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par contraposition que

$$[(n^2 - 1) \text{ n'est pas divisible par } 8] \Rightarrow [n \text{ est pair}].$$

   Il s'agit de montrer que

$$[n \text{ est impair}] \Rightarrow [(n^2 - 1) \text{ est divisible par } 8].$$

   On suppose que $[n$ est impair$]$ et on montre que $[(n^2 - 1)$ est divisible par $8]$. On a

$$\begin{array}{rcl} n \text{ est impair} & \Longrightarrow & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1 \\ & \Longrightarrow & \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ & \Longrightarrow & \exists k \in \mathbb{N} : n^2 - 1 = 4k^2 + 4k. \end{array}$$

   On distingue deux cas : si $[k$ est pair$]$, alors $\exists l \in \mathbb{N} : k = 2l$. Par suite,

$$\begin{array}{rcl} n^2 - 1 & = & 4(2l)^2 + 4(2l) \\ & = & 16l^2 + 8l \\ & = & 8l',\ (\text{ avec } l' = (2l^2 + l) \in \mathbb{N}. \end{array}$$

   Donc $[(n^2 - 1)$ est divisible par $8]$.
   Si $[k$ est impair$]$, alors $\exists m \in \mathbb{N} : k = 2m + 1$. Par suite,

$$\begin{array}{rcl} n^2 - 1 & = & 4(2m + 1)^2 + 4(2m + 1) \\ & = & 4(4m^2 + 4m + 1) + 8m + 4 \\ & = & 16m^2 + 16m + 4 + 8m + 4 \\ & = & 16m^2 + 24m + 8 \\ & = & 8m',\ (\text{ avec } m' = (2m^2 + 3m + 1)) \in \mathbb{N}. \end{array}$$

   Donc $[(n^2 - 1)$ est divisible par $8]$.
   Finalement,

$$[n \text{ est impair}] \Rightarrow [(n^2 - 1) \text{ est divisible par } 8].$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons par contraposition que

$$(xy - 1)(x - y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2 + y + 1) \neq y(x^2 + x + 1).$$

   Il s'agit de montrer que

$$x(y^2 + y + 1) = y(x^2 + x + 1) \Rightarrow (xy - 1)(x - y) = 0.$$

On suppose que $x(y^2+y+1)=y(x^2+x+1)$ et on montre que $(xy-1)(x-y)=0$. On a

$$\begin{aligned} x(y^2+y+1)=y(x^2+x+1) &\Longrightarrow xy^2+xy+x=yx^2+yx+y \\ &\Longrightarrow xy^2-yx^2+x-y=0 \\ &\Longrightarrow xy(y-x)+x-y=0 \\ &\Longrightarrow (y-x)(xy-1)=0 \\ &\Longrightarrow -(y-x)(xy-1)=0 \\ &\Longrightarrow (xy-1)(x-y)=0. \end{aligned}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons par contraposition que

$$[(x \neq 11) \wedge (y \neq -10)] \Rightarrow (xy+10x-11y-10 \neq 100).$$

Il s'agit de montrer que

$$(xy+10x-11y-10=100) \Rightarrow [(x=11) \vee (y=-10)].$$

On suppose que $(xy+10x-11y-10=100)$ et on montre que $[(x=11) \vee (y=-10)]$. On a

$$\begin{aligned} xy+10x-11y-10=100 &\Longrightarrow xy+10x-11y-110=0 \\ &\Longrightarrow x(y+10)-11(y+10)=0 \\ &\Longrightarrow (y+10)(x-11)=0 \\ &\Longrightarrow [(y+10)=0] \vee [(x-11)=0] \\ &\Longrightarrow (x=11) \vee (y=-10). \end{aligned}$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons par l'absurde que

$$(x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$$

On suppose que

$$(x \neq y) \wedge (x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$$

On a

$$\begin{aligned} (x+1)(y-1)=(x-1)(y+1) &\Longrightarrow xy-x+y-1=xy+x-y-1 \\ &\Longrightarrow -2x+2y=0 \\ &\Longrightarrow 2(y-x)=0 \\ &\Longrightarrow y-x=0 \\ &\Longrightarrow y=x \text{ (ce qui est une contradiction, car } x \neq y). \end{aligned}$$

Par suite, on a pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$$

4. Montrons par l'absurde que la proposition

$$\mathcal{P}: \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{9+x^5} \neq 3+\frac{x^5}{6}$$

est vraie. On suppose que

$$\exists\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{9+x^5} = 3+\frac{x^5}{6}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{9+x^5}=3+\tfrac{x^5}{6} &\Longrightarrow 9+x^5=9+\tfrac{x^{10}}{36}+x^5 \\ &\Longrightarrow \tfrac{x^{10}}{36}=0 \\ &\Longrightarrow x=0 \text{ (ce qui est une contradiction, car } x \in \mathbb{R}^*). \end{aligned}$$

Donc $\bar{\mathcal{P}}$ est fausse. Par suite, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{9+x^5} \neq 3+\frac{x^5}{6}.$$

5. Soient $a, b \geq 0$. En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrons que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b.$$

On suppose que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ et } a \neq b.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} &\Longrightarrow a(1+a) = b(1+b) \\
&\Longrightarrow a + a^2 = b + b^2 \\
&\Longrightarrow a^2 - b^2 + a - b = 0 \\
&\Longrightarrow (a-b)(a+b) + (a-b) = 0 \\
&\Longrightarrow (a-b)(a+b+1) = 0 \\
&\Longrightarrow a+b+1 = 0 \text{ (car } a \neq b) \\
&\Longrightarrow a+b = -1 \text{ (ce qui est une contradiction, car } a, b \geq 0).
\end{aligned}$$

Par suite, on a pour $a, b \geq 0$

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b.$$

Exercice n° 4. 1. Démontrons, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1}_{P(n)}.$$

Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 \text{ et } 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^{0+1} - 1.$$

Autrement dit, $P(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\
&= 2.2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1.
\end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$

2. Démontrons, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, [3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}] \text{ est divisible par } 17.$$

Il s'agit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{\exists k \in \mathbb{Z} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k}_{P(n)}.$$

Pour $n = 1$, on a

$$3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17 = 17 \times 1,$$

Donc

$$\exists k = 1 \in \mathbb{Z} : 3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17k.$$

Autrement dit, $P(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\exists k \in \mathbb{Z} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\exists k' \in \mathbb{Z} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k'.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} & = & 3 \times 25 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \times 8 \\ & = & 3 \times (8 + 17) \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \times 8 \\ & = & 8\left(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}\right) + 17 \times 3 \times 5^{2n-1} \\ & = & 8 \times 17k + 17 \times 3 \times 5^{2n-1} \\ & = & 17k' \text{ avec } k' = \left(8k + 3 \times 5^{2n-1}\right) \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}]$ est divisible par 17.

3. Soit x un réel positif. Démontrons, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{(1+x)^n \geq 1 + nx}_{P(n)}.$$

Pour $n = 0$, on a

$$(1+x)^0 = 1, \text{ et } 1 + 0.x = 1.$$

Donc

$$(1+x)^0 \geq 1 + 0.x.$$

Autrement dit, $P(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^{n+1} & = & (1+x)(1+x)^n \\ & \geq & (1+x)(1+nx) \\ & = & 1 + nx + x + nx^2 \\ & = & 1 + (n+1)x + nx^2 \\ & \geq & 1 + (n+1)x, \ (\text{car } nx^2 \geq 0). \end{array}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.