Faculté de Technologie
Département de Technologie
L1 (ST)

Mathématiques 1
(Analyse et Algèbre)

M'hamdi Mohammed Salah

Table des matières

1 Ensembles, Relations et Applications

1.1 Ensembles

1.1.1 Généralités

Définition 1.1.
▶ Un ensemble est une collection d'objets rassemblés selon une propriété commune. Chaque objet est un élément de l'ensemble.
▶ On appelle le nombre d'éléments d'un ensemble E le cardinal et on le note $card(E)$. ▶ On note par $\emptyset$ l'ensemble vide.

Exemple 1.1.

▶ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ *ensemble des entiers naturels.*
▶ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ *ensemble des entiers relatifs.*
▶ *ensemble des algériens.*
▶ *ensemble des nombres impairs.*
▶ *card($\mathbb{N}$) = infini et card($\emptyset$) = 0.*

Remarque 1.1.

▶ Un élément x est distinct de l'ensemble $\{x\}$ c'est-à-dire $x \neq \{x\}$.

Définition 1.2.
▶ $x \in E$ (**appartenance**) signifie x est un élément de l'ensemble E.
▶ $x \notin E$ signifie x n'est pas un élément de l'ensemble E.

1.1.2 Opérations sur les ensembles

a. Intersection "$\cap$"
$x \in E \cap F$ signifie ($\Leftrightarrow$) "$x \in E$ et $x \in F$", et on écrit

$$E \cap F = \{x/x \in E \ et \ x \in F\}.$$

Exemple 1.2.

▶ $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$, $F = \{2016, 2020, 2021\}$, *alors* $E \cap F = \{2020\}$.
▶ $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$, $F = \{2016, 2021\}$, *alors* $E \cap F = \emptyset$.

Remarque 1.2. E et F sont disjoints signifie que $E \cap F = \emptyset$. Autrement dit, $E \cap F = \emptyset$ signifie $(\forall x \in E, \ x \notin F)$ et $(\forall x \in F, \ x \notin E)$.

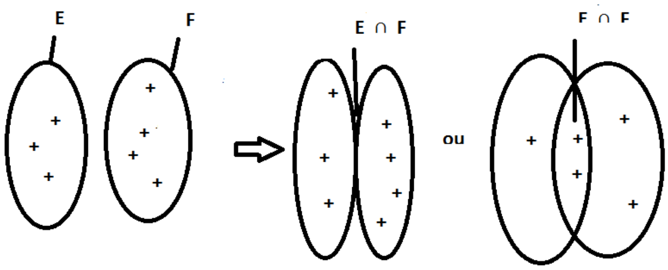

FIGURE 1 – $E \cap F$

b. Réunion "$\cup$"

$x \in E \cup F$ signifie ($\Leftrightarrow$) "$x \in E$ ou $x \in F$", et on écrit

$$E \cup F = \{x/x \in E \ \ ou \ \ x \in F\}.$$

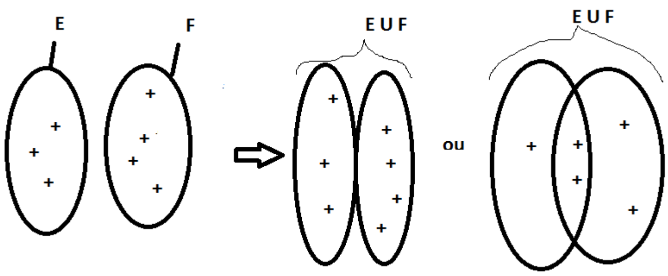

FIGURE 2 – $E \cup F$

Exemple 1.3.

▶ $E = \{1, 2, 6, 7\}$, $F = \{-1, 6\}$, *alors* $E \cup F = \{-1, 1, 2, 6, 7\}$.
▶ $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$, $F = \emptyset$, *alors* $E \cup F = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$.

c. Inclusion "$\subset$" et égalité "$=$"

$E \subset F$ signifie ($\Leftrightarrow$) que tous les éléments de E sont dans F, autrement dit

$$\forall x, \ \ x \in E \Rightarrow x \in F.$$

Remarque 1.3. $E = F$ signifie $E \subset F$ et $F \subset E$, autrement dit $\forall x \in E \Leftrightarrow x \in F$.

Exemple 1.4.

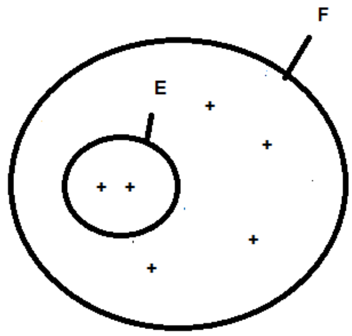

FIGURE 3 – $E \subset F$

▶ $E = \{-6, 0, 7, 9\}$, $F = \{-6, -5, -3, 0, 7, 8, 9\}$, *alors* $E \subset F$ *mais* $F \nsubseteq E$.

d. Différence et Complémentaire de deux ensembles

On appelle différence de deux ensembles E et A noté $E - A$ est l'esemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A et on écrit

$$E - A = \{x/x \in E \ et \ x \notin A\}.$$

Dans le cas où $A \subset E$, alors $E - A$ est dit complémentaire de A dans E et il es noté "C_E^A ou $\overline{A}$.

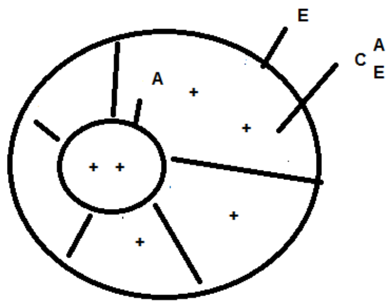

FIGURE 4 – C_E^A : complémentaire de A dans E

Exemple 1.5.

▶ $A = \{1, 6\}$, $E = \{1, 2, 6, 7\}$, *alors* $C_E^A = \{2, 7\}$.

▶ $C_A^A = \emptyset$, $\overline{\overline{A}} = A$.

1.1.3 Propriétés

Soient E, F et G trois ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$. (**commutativité**)
2. $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B \cup) C = A \cup (B \cup C)$. (**associativité**)
4. $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (**distributivité**)
5. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ et $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
6. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$ et $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

Exemple 1.6. *Soient $A \subset E$ et $A \subset E$. Démonter les lois suivantes :*

1. $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

2. $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

1.

$$\begin{aligned} Soit\ x \in C_E^{A \cap B} &\Leftrightarrow x \in E\ et\ x \notin (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow x \in E\ et\ (x \notin A\ ou\ x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in E\ et\ x \in C_E^A)\ ou\ (x \in E\ et\ x \in C_E^B) \\ &\Leftrightarrow x \in (C_E^A \cup C_E^B), \end{aligned}$$

donc $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

2.

$$\begin{aligned} C_E^{A \cup B} &= \{x / x \in E\ et\ x \notin (A \cup B)\} \\ &= \{x / x \in E\ et\ (x \notin A)\ et\ (x \notin B)\} \\ &= \{x / x \in E\ et\ (x \in C_E^A\ et\ x \in C_E^B)\} \\ &= \{x / x \in E\ et\ x \in E\ et\ x \in C_E^A\ et\ x \in C_E^B\} \ldots (car\ \ E \cap E = E) \\ &= \{x / x \in E\ et\ x \in C_E^A\ et\ x \in E\ et\ x \in C_E^B\} \\ &= \{x / x \in (C_E^A \cap C_E^B)\} \\ &= (C_E^A \cup C_E^B), \end{aligned}$$

donc $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

1.1.4 L'ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble E, on désigne par $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E c'est-à-dire
$$P(E) = \{A/A \subset E\}.$$

Remarque 1.4. L'ensemble vide ($\emptyset$) et E sont des éléments de $P(E)$. Le nombre d'ensembles de $P(E)$ est $2^{card(E)}$.

Exemple 1.7. *Si on prend* $E = \{1, 2, 3\}$*, alors*
$$P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}.$$

1.1.5 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble et A une famille des parties de E. On dit que A est une partition de E si

1. Tout élément de A n'est pas vide.
2. Les éléments de A sont deux à deux disjoints.
3. La réunion des éléments de A est égale à E.

Exemple 1.8. *Soit* $E = \{1, 2, 3\}$. *Si on prend alors*
▶ $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ *est une partition de* E.
▶ $A = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ *est une partition de* E.
▶ $A = \{\{1, 2\}, \{2\}, \{3\}\}$ *n'est pas une partition de* E.
▶ $A = \{\{2\}, \{3\}\}$ *n'est pas une partition de* E.

1.1.6 Produit cartésien

Définition 1.3. L'ensemble des couples (x, y) tel que $x \in E$ et $y \in F$ est appelé **produit cartésien** de E et F et il est noté $E \times F$, autrement dit,
$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \ \ et \ \ y \in F\}.$$

Exemple 1.9.
▶ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2 = \{(n, m)/n \in \mathbb{N} \ et \ m \in \mathbb{N}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{R}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{N}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{R} \ et \ z \in \mathbb{R}\}$.

1.1.7 Propriétés du produit cartésien

Soient E, F, G et H quatres ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1. $E \times F = \emptyset \Rightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
2. $E \times F = F \times E \Leftrightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$ ou $E = F$.
3. $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$.
4. $(E \cup F) \times G = (E \times G) \cup (F \times G)$.
5. $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$

Remarque 1.5.
► $(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$.
Un contre exemple : si $E = F = \{0\}, G = H = \{1\}$, alors $E \cup G = \{0, 1\}$ et $F \cup H = \{0, 1\}$.
Et on a aussi, $E \times F = \{(0, 0)\}$, $G \times H = \{(1, 1)\}$ et , $(E \cup G) \times (F \cup H) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Exemple 1.10. *Soient A, B, C et D des ensembles. Démonter la loi suivante :*

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

$$\begin{aligned}
\textit{Soit } (x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \textit{ et } (x,y) \in (C \times D) \\
&\Leftrightarrow x \in A \textit{ et } y \in B \textit{ et } x \in C \textit{ et } y \in D \\
&\Leftrightarrow x \in A \textit{ et } x \in C \textit{ et } y \in B \textit{ et } y \in D \\
&\Leftrightarrow (x \in A \textit{ et } x \in C) \textit{ et } (y \in B \textit{ et } y \in D) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \textit{ et } y \in (B \cap D) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D),
\end{aligned}$$

donc $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

1.2 Relations

1.2.1 Relations binaires

Définition 1.4. On appelle une relation binaire sur un ensemble E, toute opération (application, un lien) $\mathcal{R}$ entre deux objets. On note $x\mathcal{R}y$ et on lit "x est en relation avec y".

Définition 1.5. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite

1. réflexive si : $\forall\ x \in E$, $x\mathcal{R}x$ (est vraie),
2. symétrique si : $\forall\ x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,
3. antisymétrique si : $\forall\ x, y \in E$,($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow y = x$,
4. transitive si : $\forall\ x, y, z \in E$, ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemple 1.11.

1. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y$.

2. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$.

3. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ *est multiple de 2.*

4. Soient A et B deux ensembles. $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

1.2.2 Relation d'équivalence

Définition 1.6. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur une ensemble E est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 1.12. *On définit sur $\mathbb{R}$ la relation :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Corrigé

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :

(a) réflexive si : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}x$ (est vraie),

(b) symétrique si : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,

(c) transitive si : $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$, ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Alors,

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}x &\Rightarrow x^2 - x^2 = x - x \\ &\Rightarrow 0 = 0\,(est\,vraie), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Rightarrow (-1) \times (x^2 - y^2) = (-1) \times (x - y) \\ &\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est symétrique.*

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \tag{1}$$

et

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow y^2 - z^2 = y - z, \tag{2}$$

puis,

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \\ &\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est transitive.*
De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence.*

Définition 1.7. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur une ensemble E. On dit que deux éléments de x et y sont équivalent si $x\mathcal{R}y$.

Définition 1.8. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur une ensemble E. On appelle classe d'équivalence d'un éléments y d'un ensemble E l'ensemble

$$\overline{y} = \dot{y} = \{x \in E / x\mathcal{R}y\}.$$

Définition 1.9. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur une ensemble E. On appelle ensemble quotient de E par la relation R, l'ensemble des classes d'équivalence et on note $E/_R$.

Exemple 1.13. *On définit sur* $\mathbb{R}$ *la relation* $x\mathcal{R}y$ *si et seulement si* $x^2 - x = y^2 - y$.

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*
2. *Calculer la classe d'équivalence de 0, 2 et 4.*

Corrigé

1. *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :*
   (a) *réflexive si :* $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}x$ *(est vraie),*
   (b) *symétrique si :* $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x,$
   (c) *transitive si :* $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R},\ (\ x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$

   Alors,

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$x\mathcal{R}x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x = x^2 - x \text{ est vraie},$$

   donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow x^2 - x = y^2 - y \\ &\Rightarrow (-1) \times (x^2 - x) = (-1) \times (y^2 - y) \\ &\Rightarrow -x^2 + x = -y^2 + y \\ &\Rightarrow y^2 - y = x^2 - x, \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

   (c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow x^2 - x = y^2 - y \tag{3}$$

   et

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow y^2 - y = z^2 - z, \tag{4}$$

   puis,

$$\begin{aligned} (3) + (4) &\Rightarrow x^2 - x + y^2 - y = y^2 - y + z^2 - z \\ &\Rightarrow x^2 - x = z^2 - z \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{R}$ est transitive.
   De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence.

2. *La classe d'équivalence de 0 :*

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{x \in \mathbb{R}/x\mathcal{R}0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}/x^2 - x = 0^2 - 0 = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}/x(x-1) = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}/(x = 0) \textit{ ou } (x - 1 = 0)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}/(x = 0) \textit{ ou } (x = 1)\} \\
&= \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.14. *On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation :*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \;\; x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \textit{ est un multiple de } 2.$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

Corrigé

1. *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :*
   (a) *réflexive si : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}x$ (est vraie),*
   (b) *symétrique si : $\forall\ x, y \in \mathbb{Z}$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,*
   (c) *transitive si : $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Z}$, $(\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.*

   Alors,
   $$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \;\; x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \textit{ est un multiple de } 2,$$
   s'écrit aussi sous la forme
   $$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \;\; x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } x - y = 2k.$$

   (a) *$\forall x \in \mathbb{Z}$, on a*
   $$\begin{aligned}
   x\mathcal{R}x &\Rightarrow x - x = 0 = 2k \\
   &\Rightarrow \textit{il existe } (\exists)\ k = 0 \in \mathbb{Z} \textit{ pour que } x\mathcal{R}x \textit{ est vraie},
   \end{aligned}$$
   donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

   (b) *$\forall x, y \in \mathbb{Z}$, on a*
   $$\begin{aligned}
   x\mathcal{R}y &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 2k \\
   &\Rightarrow (-1) \times (x - y) = (-1) \times (2k) \\
   &\Rightarrow y - x = 2(-k) \\
   &\Rightarrow \exists k' = (-k) \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } y - x = 2k' \\
   &\Rightarrow y\mathcal{R}x,
   \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$,

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 2k, \tag{5}$$

et

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, y - z = 2k', \tag{6}$$

puis,

$$\begin{aligned} (5) + (6) &\Rightarrow x - y + y - z = 2k + 2k' \\ &\Rightarrow x - z = 2(k + k') \\ &\Rightarrow \exists k" = (k + k') \in \mathbb{Z}, x - z = 2k" \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.
De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence.

Exemple 1.15. *On définit sur $\mathbb{N}^2$ une relation binaire $\mathcal{R}$ par :*

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x + y' = x' + y.$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Calculer la classe d'équivalence de $(0, 0)$.*

Corrigé

1. *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :*
   (a) réflexive si : $\forall\ x, y \in \mathbb{N}$, $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ (est vraie),
   (b) symétrique si : $\forall\ x, y, x', y' \in \mathbb{N}$, $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Rightarrow (x', y')\mathcal{R}(x, y)$,
   (c) transitive si : $\forall\ x, y, x', y', x", y" \in \mathbb{N}$, $((x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x", y")) \Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x", y")$.

   Alors,

   (a) $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2$, *on a*

$$(x, y)\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow x + y = x + y \ (\textit{est vraie}),$$

donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

(b) $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{N}^2$, *on a*

$$\begin{aligned}(x,y)\mathcal{R}(x',y') &\Rightarrow x+y' = x'+y\\ &\Rightarrow x'+y = x+y'\\ &\Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y),\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est symétrique.*

(c) $\forall (x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow x+y' = x'+y \tag{7}$$

et

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow x'+y" = x"+y', \tag{8}$$

puis,

$$\begin{aligned}(7)+(8) &\Rightarrow x+y'+x'+y" = x'+y+x"+y'\\ &\Rightarrow x+y" = y+x"\\ &\Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x",y"),\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est transitive.*
De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence.*

2. *La classe d'équivalence de (0,0) :*

$$\begin{aligned}\overline{(0,0)} &= \{(x,y) \in \mathbb{N}^2/(x,y)\mathcal{R}(0,0)\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N}^2/x+0 = 0+y\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N}^2/y = x\}\end{aligned}$$

donc la classe d'équivalence de (0,0) est l'ensemble des points (des couples (x,y)) de la droite $y = x$.

1.2.3 Relation d'ordre

Définition 1.10. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur une ensemble E est une relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition 1.11. Soient E un ensemble et $\mathcal{S}$ une relation d'ordre dans E. On dit que $\mathcal{S}$ est d'ordre total si

$$\forall x,y \in E, (x\mathcal{S}y) \text{ ou } (y\mathcal{S}x).$$

Et on dit qu'elle est d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total, c'est-à-dire :

$$\exists x, y \in E, (x \not{\mathcal{S}} y) \; et \; (y \not{\mathcal{S}} x),$$

autrement dit

$$\exists x, y \in E, (x \, n'est \, pas \, en \, relation \, avec \, y) \; et \; (y \, n'est \, pas \, en \, relation \, avec \, x).$$

Exemple 1.16. *On définit sur $\mathbb{R}$ la relation :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y.$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.*
2. *Cet ordre est-il total ?*

Corrigé

1. *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, c'est-à-dire :*
   (a) *réflexive si : $\forall \; x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}x$ (est vraie),*
   (b) *antisymétrique si : $\forall \; x, y \in \mathbb{R}$,($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) $\Rightarrow y = x$,*
   (c) *transitive si : $\forall \; x, y, z \in \mathbb{R}$, ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) $\Rightarrow x\mathcal{R}z$.*

   Alors,

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, *on a*

   $$x\mathcal{R}x \Rightarrow x \geq x \; (est \; vraie \; car \; x = x),$$

   donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

   $$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \; et \; y\mathcal{R}x \;\; &\Rightarrow \;\; x \geq y \; et \; y \geq x \\ &\Rightarrow \;\; x \geq y \geq x \\ &\Rightarrow \;\; x = y, \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z &\Rightarrow x \geq y \text{ et } y \geq z \\ &\Rightarrow x \geq y \geq z \\ &\Rightarrow x \geq z \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est transitive.*

De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence.*

2. *Dans tous les cas* x *et* y *sont comparables, donc* $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre total, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y) \text{ ou } (y\mathcal{R}x).$$

Exemple 1.17. *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *une relation binaire* $\mathcal{R}$ *par :*

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x \geq x' \text{ et } y \geq y'.$$

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre.*

2. *Cet ordre est-il total ?*

Corrigé

1. *Montrons que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre, c'est-à-dire :*
   (a) *réflexive si :* $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ *(est vraie),*
   (b) *antisymétrique si :* $\forall\ x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, $((x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ et } (x', y')\mathcal{R}(x, y)) \Rightarrow (x, y) = (x', y')$,
   (c) *transitive si :* $\forall\ x, y, x', y', x", y" \in \mathbb{R}$, $((x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ et } (x', y')\mathcal{R}(x", y")) \Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x", y")$.

   Alors,

   (a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

   $$(x, y)\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow (x \geq x \text{ et } y \geq y) \text{ est vraie car } (x = x \text{ et } y = y),$$

   donc $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

   (b) $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, *on a*

   $$\begin{aligned} (x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ et } (x', y')\mathcal{R}(x, y) &\Rightarrow (x \geq x' \text{ et } y \geq y') \text{ et } (x' \geq x \text{ et } y' \geq y) \\ &\Rightarrow x \geq x' \text{ et } y \geq y' \text{ et } x' \geq x \text{ et } y' \geq y \\ &\Rightarrow x \geq x' \text{ et } x' \geq x \text{ et } y \geq y' \text{ et } y' \geq y, \\ &\Rightarrow (x \geq x' \geq x) \text{ et } (y \geq y' \geq y) \\ &\Rightarrow (x = x') \text{ et } (y =' y) \\ &\Rightarrow (x, y) = (x', y'), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

(c) $\forall (x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
(x,y)\mathcal{R}(x',y') \; et \; (x',y')\mathcal{R}(x",y") &\Rightarrow (x \geq x' \; et \; y \geq y') \; et \; (x' \geq x" \; et \; y' \geq y") \\
&\Rightarrow x \geq x' \; et \; y \geq y' \; et \; x' \geq x" \; et \; y' \geq y" \\
&\Rightarrow (x \geq x' \; et \; x' \geq x") \; et \; (y \geq y' \; et \; y' \geq y") \\
&\Rightarrow (x \geq x' \geq x") \; et \; (y \geq y' \geq y") \\
&\Rightarrow (x \geq x") \; et \; (y \geq y") \\
&\Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x",y"),
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.
De (a), (b) et (c), on a bien $\mathcal{R}$ une relation d'ordre.

2. $\mathcal{R}$ est un relation d'ordre partiel sur $\mathbb{R}^2$ car, par exemple les couples (0,1) et (1,0) ne sont pas comparables, c'est-à-dire :

$$(0,1)\mathcal{R}(1,0) \Leftrightarrow ((0 \geq 1) \; et \; (1 \geq 0)) \; est \; fausse,$$

$$(1,0)\mathcal{R}(0,1) \Leftrightarrow ((1 \geq 0) \; et \; (0 \geq 1)) \; est \; fausse \; aussi,$$

et donc,

$$\exists (0,1),(1,0) \in \mathbb{R}^2, ((0,1) \not\mathcal{R}(1,0)) \; et \; ((1,0) \not\mathcal{R}(0,1)).$$

1.3 Applications

1.3.1 Généralités

Soient E et F deux ensembles :

1. On appelle application f de E dans F une relation de E dans F dont tout élément x de E on lui correspond un et un seul élément y de F.
2. E est appellé E l'ensemble de départ ou des antécédants.
3. F est appellé l'ensemble d'arrivée ou des images.
   (a) x est dit antécédant de y par f (dans E).
   (b) y est appelé l'image de x par f (dans F) et on le note $f(x) = y$.
4. En général, on schématise une application f par

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Remarque 1.6.

1. Deux applications f et g sont égales si leurs ensembles de départ sont égaux (en le même ensemble de départ E), leurs ensembles d'arrivée sont égaux (en le même ensemble d'arrivée F) et si $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.
2. L'ensemble des couples $\{(x, f(x))/x \in E\}$ est une partie de l'ensemble $E \times F$, qu'on appelle graphe de l'application f.

Exemple 1.18.

On définit l'application identité par

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto Id_E(x) = x. \end{aligned}$$

On définit l'application constante par (c une constante de $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) = c. \end{aligned}$$

On définit l'application suivante

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{-1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

1.3.2 Restriction et prolongement d'une application

Définition 1.12. Soit E' un sous ensemble de E et $f : E \to F$ une application. L'application $g : E' \to F$ telle que $\forall x \in E$, $g(x) = f(x)$ est appelée la restriction de f à E' et on dit aussi que f est le prolongement de g à E.

1.3.3 Injection, surjection et bijection

Définition 1.13. Soit $f : E \to F$ une application.

1. On dit que f est injective si tout élément y de F possède au plus un antécédent x de E par f. Donc deux éléments différents de E ont des images différentes de F par f, autrement dit :

$$\forall x, x' \in E, \ \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x',$$

ou d'une manière équivalente

$$\forall x, x' \in E, \ \ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

2. On dit que f est surjective si tout élément y de F possède au moins un antécédent x de E par f, c'est-à-dire :
$$\forall y \in F, \exists x \in E : \ \ y = f(x).$$
3. On dit que f est bijective si f est à la fois injective et surjective, et on écrit
$$\forall y \in F, \exists ! x \in E : \ \ y = f(x).$$

Propriétés

1. f est injective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution.
2. f est surjective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.
3. f est bijective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet une et une seul solution.

Proposition 1.14. *Soient $f : E \to F$ et $f : F \to G$ deux applications, alors on a*

1. *gof est injective $\Rightarrow$ f est injective.*
2. *gof est surjective $\Rightarrow$ g est surjective.*
3. *gof est bijective $\Rightarrow$ f est injective et g est surjective.*

Exemple 1.19. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1$. Montrons que f est injective : soit $x, x' \in \mathbb{R}$, on a*
$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow x + 1 = x' + 1 \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$
donc f est injective.
f est aussi surjective. Il s'agit de trouver un élément y de $\mathbb{R}$ qu'a d'antécédent par f. Ici il est facile de voir que l'on a toujours $f(x) = y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$.

Exemple 1.20. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 5$.*

1. *f ainsi définie est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 5$:*
   (a) *Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, on a*
$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow 3x + 5 = 3x' + 5 \\ &\Rightarrow 3x = 3x' \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$
   donc f est injective.

(b) *Soit* $y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow 3x+5 = y \\ &\Rightarrow 3x = y-5 \\ &\Rightarrow x = \frac{y-5}{3}, \end{aligned}$$

alors $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x = \frac{y-5}{3}$ *tel que* $f(x) = y$. *Donc* f *est surjective.*

(c) f *injective et surjective, donc* f *est bijective.*

En pratique Si $f : E \to F$ est donnée.

1. Pour savoir si f est injective, on suppose $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$.
2. Pour savoir si f est surjective, on se donne $y \in F$ et on cherche une solution $x \in E$ de l'équation $f(x) = y$.
3. Pour savoir si f est bijective, on montre que $f(x) = y$ possède une unique solution $x \in E$.

Exemple 1.21. *1. On considère*

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

(a) *On a* $f_1(x) = f_1(x') = 1$ *et* f_1 *n'est donc pas injective.*

(b) *Comme* $y = -1$ $(y < 0)$ *n'a pas d'antécédent,* f_1 *n'est pas surjective.*

2. On considère

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

(a) *On a* $f_2(x) = f_2(x') \Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow x = x'$ *car* $x, x' \geq 0$.
f_2 *est donc injective.*

(b) *Comme* $y = -1$ *n'a pas d'antécédent,* f_2 *n'est pas surjective.*

3. On voit de même que

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

n'est pas injective mais elle est surjective.

4. Dans le cas

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

est injective et surjective, elle est donc bijective.

1.3.4 Composition des applications

Définition 1.15. Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. On appelle application composée de f et g, l'application $gof : E \to G$ définie par

$$\forall x \in E, \ (gof)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 1.22. *Soient les applications suivantes :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1. \end{aligned}$$

Alors,

$$gof : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto gof(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x+1.$$

$$fog : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto fog(x) = f(g(x)) = f(x+1) = 2x+2.$$

1.3.5 Applications réciproques

Définition 1.16. Soit $f : E \to F$ une application bijective, alors il existe une application notée f^{-1} définie par

$$f^{-1} : F \to E, \ et \ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

appelée application réciproque de f.

Remarque 1.7. Notons que si f est bijective alors f^{-1} est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Théorème 1.17. *Soit $f : E \to F$ une application bijective, alors son application réciproque f^{-1} vérifie*

$$fof^{-1} = Id_F \ et \ f^{-1}of = Id_E.$$

On rappelle

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto Id_E(x) = x. \end{aligned}$$

Proposition 1.18. *Soient $f : E \to F$ et $G : F \to G$ deux applications, alors on a*

1. *f et g sont injectives $\Rightarrow gof$ est injective.*

2. *f et g sont surjectives $\Rightarrow gof$ est surjective.*
3. *f et g sont bijectives $\Rightarrow gof$ est bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.*

Exemple 1.23. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2$.*

1. *Montrer que f est bijective et donner son application réciproque f^{-1}.*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2$:*
   (a) *Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, on a*
   $$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow x - 2 = x' - 2 \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$
   donc f est injective.
   (b) *Soit $y \in \mathbb{R}$, on a*
   $$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x - 2 = y \\ &\Rightarrow x = y + 2, \end{aligned}$$
   alors $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x = y + 2$ tel que $f(x) = y$. Donc f est surjective.
   (c) *f injective et surjective, donc f est bijective.*
   (d) *f est bijective donc il existe $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et*
   $$f(x) = y \Rightarrow x - 2 = y \Rightarrow x = y + 2,$$
   donc
   $$f^{-1}(y) = x = y + 2,$$
   et on écrit :
   $$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = y + 2. \end{aligned}$$

1.3.6 Image directe et image réciproque

1. **Image directe :** Soit $f : E \to F$ une application et A un sous-ensemble de E ($A \subset E$). On définit l'image directe de A par l'application f le sous-ensemble $f(A)$ de F :
   $$f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}.$$
   Remarque 1.8. (a) $f(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Soit a de E, alors $f(\{a\}) = f(a)$.

Exemple 1.24. *Soit l'ensemble $A = [-1, 2]$ et*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x^2 + 2. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in \mathbb{R}/x \in A\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}/x \in [-1, 2]\} \\ &= [2, 5] \cup [2, 14] \\ &= [2, 14]. \end{aligned}$$

2. **Image réciproque :** Soit $f : E \to F$ une application et A un sous-ensemble de F ($B \subset F$). On définit l'image réciproque de B par l'application f le sous-ensemble $f^{-1}(B)$ de F :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}.$$

Remarque 1.9. (a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Soit b de F, alors $f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E/f(x) = b\}$.

Exemple 1.25. *Soit l'ensemble $B = [-1, 3]$ et*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in B\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [-1, 3]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ -1 \le f(x) \le 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ -1 \le f(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}/f(x) \le 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ -1 \le x^2 - 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 1 \le 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x^2 \ge 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 4 \le 0\} \\ &= \mathbb{R} \cap [-2, 2] \\ &= [-2, 2]. \end{aligned}$$

3. **Propriétés :** Soit $f : E \to F$ une application. Soient E_1, E_2 deux parties de E et F_1, F_2 deux parties de F. Alors :
   (a) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow f(E_1) \subset f(E_2)$.
   (b) $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$.
   (c) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow f^{-1}(F_1) \subset f^{-1}(F_2)$.
   (d) $f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$.

1.3.7 Exercices corrigés

Exemple 1.26. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = x^2 - 1$

1. f *ainsi définie est-elle injective ? surjective ?*
2. *Soit à présent* $g : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ *telle que* $g(x) = x^2 - 1$ *; montrer que* g *est bijective et donner l'éxpression de sa réciproque.*

Corrigé

1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = x^2 - 1$.
   (a) *Soient* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *on a*
   $$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \\ &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \text{ ou } (x_1 + x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2, \end{aligned}$$
   autrement dit, pour $x_1 = 3$ *et* $x_2 = -3$, *on a* $f(3) = f(-3) = 8$ *mais* $x_1 \neq x_2$, *donc* f *n'est pas injective.*
   (b) *Soit* $y \in \mathbb{R}$, *on a*
   $$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x^2 - 1 = y \\ &\Rightarrow x^2 = y + 1, \end{aligned}$$
   si $(y + 1 < 0)$ *c'est-à-dire* $(y < -1)$ *: l'équation* $f(x) = y$ *ne possède pas de solution, par exemple pour* $y = -3$, *on a :*
   $$x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2,$$
   cette équation ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$ *et donc* f *n'est pas surjective.*
2. *Soit* $g : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ *telle que* $g(x) = x^2 - 1$.
   (a) *Soient* $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$, *on a*
   $$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \\ &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \text{ ou } (x_1 + x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ car } x_1, x_2 \geq 1 \text{ (on rejette } x_1 = -x_2) \end{aligned}$$

donc g est injective.

(b) *Soit $y \in [0, +\infty[$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x^2 - 1 = y \\ &\Rightarrow x^2 = y + 1 \\ &\Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1}, \end{aligned}$$

on observe que $y \geq 0 \Rightarrow y + 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{y+1} \geq 1$ c'est-à-dire $\sqrt{y+1} \in [1, +\infty[$, et on rejette $-\sqrt{y+1} \notin [1, +\infty[$.
Donc $\forall y \in [0, +\infty[$, $\exists x = \sqrt{y+1} \in [1, +\infty[$: tel que $g(x) = y$, à la fin g est surjective.

(c) *g est injective et surjective donc g est bijective et on écrit :*

$$\forall y \in [0, +\infty[, \ \exists! x = \sqrt{y+1} \in [1, +\infty[,$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) = \sqrt{y+1},$$

donc

$$\begin{aligned} g^{-1} : [0, +\infty[&\rightarrow [1, +\infty[\\ y &\mapsto g^{-1}(y) = \sqrt{y+1}. \end{aligned}$$

Exemple 1.27. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$*

1. *f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?*
2. *Soit à présent $g : [-1, +1] \rightarrow [-1, +1]$ telle que $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; montrer que g est bijective.*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.*

   (a) *Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1}{x_1^2+1} = \frac{2x_2}{x_2^2+1} \\ &\Rightarrow 2x_1(x_2^2+1) = 2x_2(x_1^2+1) \\ &\Rightarrow 2x_1x_2^2 + 2x_1 = 2x_2x_1^2 + 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 = x_2x_1^2 + x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 - x_2x_1^2 - x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 + x_1x_2(x_2 - x_1) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \ ou \ (1 - x_1x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \ ou \ x_1x_2 = 1, \end{aligned}$$

autrement dit, pour $x_1 = 2$ *et* $x_2 = \frac{1}{2}$*, on a* $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$ *mais* $x_1 \neq x_2$*, donc* f *n'est pas injective.*

(b) *Soit* $y \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = y \\ &\Rightarrow 2x = y(x^2+1) \\ &\Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0, \end{aligned}$$

équation à résoudre en x : $\triangle = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$.
Dans le cas, si $y < -1$ *ou* $y > 1$*, le* $\triangle < 0$*, donc l'équation* $f(x) = y$ *ne possède pas de solution, par exemple pour* $y = 3$*, on a :*

$$\frac{2x}{x^2+1} = 3 \Rightarrow 2x = 3(x^2+1) \Rightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 0,$$

$\triangle = 4 - 4(9) = -32 < 0$*, donc l'équation* $f(x) = 3$ *ne possède pas de solution* x *dans* $\mathbb{R}$*, autrement dit* $y = 3$ *ne possède pas d'antécédent par* f *et donc* f *n'est pas surjective.*

2. *Soit* $g : [-1,+1] \to [-1,+1]$; $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

(a) *Soient* $x_1, x_2 \in [-1,+1]$*, on a*

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1}{x_1^2+1} = \frac{2x_2}{x_2^2+1} \\ &\Rightarrow 2x_1(x_2^2+1) = 2x_2(x_1^2+1) \\ &\Rightarrow 2x_1x_2^2 + 2x_1 = 2x_2x_1^2 + 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 = x_2x_1^2 + x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 - x_2x_1^2 - x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 + x_1x_2(x_2 - x_1) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \text{ ou } (1 - x_1x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

on rejette $x_1x_2 = 1$ *car, si* $x_1x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$ *et puisque* $\forall x_2 \in [-1,+1]$*, c'est-à-dire* $-1 \leq x_2 \leq 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2} \geq 1$ *ou* $x_1 = \frac{1}{x_2} \leq -1$ *impossible car* $x_1 \in [-1,+1]$*,*
puisque

$$\forall x_1, x_2 \in [-1,+1], \;\; g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

donc g *est injective.*

(b) Soit $y \in [-1,+1]$*, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = y \\ &\Rightarrow 2x = y(x^2+1) \\ &\Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0, \end{aligned}$$

$\triangle = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$ *et comme* $y \in [-1,+1]$*, alors l'équation* $f(x) = y$ *(*$yx^2 - 2x + y = 0$*) possède deux solutions,telle que*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2+\sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1+\sqrt{(1-y^2)}}{y}, \\ x_2 &= \frac{2-\sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1-\sqrt{(1-y^2)}}{y}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+\sqrt{(1-y^2)}}{y} = \frac{(1+\sqrt{(1-y^2)})(1-\sqrt{(1-y^2)})}{y(1-\sqrt{(1-y^2)})} \\ &= \frac{(1-(1-y^2))}{y(1-\sqrt{(1-y^2)})} = \frac{y}{(1-\sqrt{(1-y^2)})}, \\ x_2 &= \frac{1-\sqrt{(1-y^2)}}{y} = \frac{(1-\sqrt{(1-y^2)})(1+\sqrt{(1-y^2)})}{y(1+\sqrt{(1-y^2)})} \\ &= \frac{(1-(1-y^2))}{y(1+\sqrt{(1-y^2)})} = \frac{y}{(1+\sqrt{(1-y^2)})}, \end{aligned}$$

comme $y \in [-1,+1]$*, donc on prend* $x_2 \in [-1,+1]$ *et on rejette* x_1 *car* $x_1 \notin [-1,+1]$.

Donc $\forall y \in [-1,+1]$, $\exists x = x_2 = \frac{1-\sqrt{(1-y^2)}}{y} \in [-1,+1]$ *: tel que* $g(x) = y$*, à la fin* g *est surjective.*