1 Ensembles et relations

1.1 Ensembles

1.1.1 Généralités

Définition 1.1.
Un ensemble peut être défini de deux manières :

1. Un ensemble est une collection d'objets.
2. Un ensemble est une collection d'objets rassemblés selon une propriété commune.

▶ Chaque objet est un élément de l'ensemble.
▶ Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé cardinal de E et on le note $card(E)$.

Exemple 1.1.

▶ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ *ensemble des entiers naturels.*
▶ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ *ensemble des entiers relatifs.*
▶ *Soit E l'ensemble des entiers qui divisent* 20, $E = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Remarque 1.1.

▶ Un élément x est distinct de l'ensemble $\{x\}$ c'est-à-dire $x \neq \{x\}$.

Définition 1.2.
▶ $x \in E$ (**appartenance**) signifie x est un élément de l'ensemble E.
▶ $x \notin E$ signifie x n'est pas un élément de l'ensemble E.

1.1.2 Opérations sur les ensembles

a. Intersection "$\cap$" : $x \in E \cap F$ signifie ($\Leftrightarrow$) "$x \in E$ et $x \in F$", et on écrit

$$E \cap F = \{x / x \in E \ \ et \ \ x \in F\}.$$

Exemple 1.2.

▶ $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$, $F = \{2016, 2020, 2021\}$, $G = \{2011, 2022\}$ *alors* $E \cap F = \{2020\}$, $E \cap G = \emptyset$.

Remarque 1.2. E et F sont disjoints signifie que $E \cap F = \emptyset$. Autrement dit, $E \cap F = \emptyset$ signifie $(\forall x \in E, \ \ x \notin F)$ et $(\forall x \in F, \ \ x \notin E)$.

b. Union "$\cup$" : $x \in E \cup F$ signifie ($\Leftrightarrow$) "$x \in E$ ou $x \in F$", et on écrit

$$E \cup F = \{x / x \in E \ \ ou \ \ x \in F\}.$$

Exemple 1.3.

▶ $E = \{1, 2, 6, 7\}$, $F = \{-1, 6\}$, *alors* $E \cup F = \{-1, 1, 2, 6, 7\}$.
▶ $E = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$, $F = \emptyset$, *alors* $E \cup F = \{2017, 2018, 2019, 2020\}$.

c. Inclusion "$\subset$" et égalité "$=$"

$E \subset F$ signifie ($\Leftrightarrow$) que tous les éléments de E sont dans F, autrement dit

$$\forall x, \ \ x \in E \Rightarrow x \in F.$$

Remarque 1.3. $E = F$ signifie $E \subset F$ et $F \subset E$, autrement dit

$$\forall x \in E \Leftrightarrow x \in F.$$

Exemple 1.4.

▶ $E = \{-6, 0, 7, 9\}$, $F = \{-6, -5, -3, 0, 7, 8, 9\}$, *alors* $E \subset F$ *mais* $F \not\subset E$.

d. Différence et complémentaire de deux ensembles

On appelle différence de deux ensembles E et A et on note $E - A$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A et on écrit

$$E - A = \{x / x \in E \ \ et \ \ x \notin A\}.$$

Dans le cas où $A \subset E$, alors $E - A$ est dit complémentaire de A dans E et il est noté "C_E^A ou $\overline{A}$".

Exemple 1.5.

▶ $A = \{1, 6\}$, $E = \{1, 2, 6, 7\}$, *alors* $C_E^A = \{2, 7\}$, $C_A^A = \emptyset$, $\overline{\overline{A}} = A$.

1.1.3 Propriétés

Soient E, F et G trois ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$. (**commutativité**)
2. $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B \cup)C = A \cup (B \cup C)$. (**associativité**)
4. $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (**distributivité**)
5. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ et $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
6. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$ et $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

1.1.4 Ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble E, on désigne par $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E, c'est à dire
$$P(E) = \{A/A \subset E\}.$$

Remarque 1.4. L'ensemble vide et E sont des éléments de $P(E)$. Le nombre d'éléments de $P(E)$ est $2^{card(E)}$.

Exemple 1.6. *Si on prend* $E = \{1, 2, 3\}$, *alors*

$$P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}.$$

1.1.5 Partition d'un ensemble

Soient E un ensemble et A une famille des parties de E. On dit que A est une partition de E si

1. Tout élément de A n'est pas vide.
2. Les éléments de A sont deux à deux disjoints.
3. La réunion des éléments de A est égale à E.

Exemple 1.7. *Soit* $E = \{1, 2, 3\}$.
▶ $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ *est une partition de* E.
▶ $A = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ *est une partition de* E.
▶ $A = \{\{1, 2\}, \{2\}, \{3\}\}$ *n'est pas une partition de* E.
▶ $A = \{\{2\}, \{3\}\}$ *n'est pas une partition de* E.

1.1.6 Produit cartésien

Définition 1.3. L'ensemble des couples (x, y) tel que $x \in E$ et $y \in F$ est appelé **produit cartésien** de E et F et il est noté $E \times F$. Autrement dit,

$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \ \ et \ \ y \in F\}.$$

Exemple 1.8.
▶ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2 = \{(n, m)/n \in \mathbb{N} \ et \ m \in \mathbb{N}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{N}\}$.
▶ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{R} \ et \ z \in \mathbb{R}\}$.

1.1.7 Propriétés du produit cartésien

Soient E, F, G et H quatre ensembles. Alors, on a

1. $E \times F = \emptyset \Rightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
2. $E \times F = F \times E \Leftrightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$ ou $E = F$.
3. $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$.
4. $(E \cup F) \times G = (E \times G) \cup (F \times G)$.
5. $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.

1.2 Relations

1.2.1 Relations binaires

Définition 1.4. On appelle relation binaire sur un ensemble E, toute opération (application, lien) $\mathcal{R}$ entre deux éléments $x,\ y$ de cet ensemble. On note $x\mathcal{R}y$ et on lit "x est en relation avec y".

Exemple 1.9.

1. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y$.
2. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$.
3. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ *est un multiple de 2.*
4. *Soit* $P(E)$ *l'ensemble des parties de* E. $\forall A, B \in P(E),\ A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Définition 1.5. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite

1. réflexive si : $\forall\ x \in E$, $x\mathcal{R}x$,
2. symétrique si : $\forall\ x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,
3. antisymétrique si : $\forall\ x, y \in E$,($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow y = x$,
4. transitive si : $\forall\ x, y, z \in E$, ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

1.2.2 Relation d'équivalence

Définition 1.6. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 1.10. *On définit sur* $\mathbb{Z}$ *la relation suivante :*

$$\forall x,\ y \in \mathbb{Z},\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 2k.$$

Montrons que $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

1. *Réflexivité de* $\mathcal{R}$: *Soit* $x \in \mathbb{Z}$. *On a*

$$x - x = 0 = 2 \times 0.$$

Donc

$$\exists (k = 0) \in \mathbb{Z} : x - x = 2k \Rightarrow x\mathcal{R}x.$$

Donc $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

2. *Symétrie de* $\mathcal{R}$: *Soient* $x, y \in \mathbb{Z}$ *tels que* $x\mathcal{R}y$

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 2k \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = -2k \\ &\Rightarrow \exists k' = (-k) \in \mathbb{Z} : y - x = 2k' \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ *est symétrique.*

3. *Transitivité de* $\mathcal{R}$: *Soient* $x, y, z \in \mathbb{Z}$ *tels que* $x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}z$

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z &\Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 2k \ldots\ldots (1) \\ \text{et} \\ \exists k' \in \mathbb{Z} : y - z = 2k' \ldots\ldots (2) \end{cases} \\ &\Rightarrow \exists k'' = (k + k') \in \mathbb{Z} : x - z = 2k'' \quad \text{en sommant } (1) \text{ et } (2) \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ *est transitive.*

Conclusion : $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

Définition 1.7. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On appelle classe d'équivalence d'un élément y de E et on note $\overline{y}$ (ou $\dot{y}$ ou cl y), l'ensemble

$$\overline{y} = \{x \in E / x\mathcal{R}y\}.$$

Définition 1.8. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On appelle ensemble quotient de E par la relation $\mathcal{R}$, l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E. On note cet ensemble par $E/\mathcal{R}$ et on a

$$E/\mathcal{R} = \{\overline{y} / y \in E\}.$$

Exemple 1.11. *Dans* $\mathbb{R}$, *on définit la relation binaire* $\mathcal{R}$ *par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y.$$

1. *Montrons que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}$.

(a) *Réflexivité : Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a*

$$[x^2 - x = x^2 - x] \Longrightarrow x\mathcal{R}x.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}x$, *d'où la réflexivité de* $\mathcal{R}$.

(b) *Symétrie : Soient* $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x\mathcal{R}y$. *On a*

$$\begin{array}{rcl} x\mathcal{R}y & \Longrightarrow & x^2 - x = y^2 - y \\ & \Longrightarrow & y^2 - y = x^2 - x \\ & \Longrightarrow & y\mathcal{R}x. \end{array}$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$, *d'où la symétrie de* $\mathcal{R}$.

(c) *Transitivité : Soient* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tels que* $x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}z$. *On a*

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = y^2 - y........(1) \\ \text{et} \\ y^2 - y = z^2 - z........(2) \end{cases}$$

En additionnant les égalités (1) et (2) membres à membres, on obtient

$$\begin{array}{rcl} x^2 - x + y^2 - y = y^2 - y + z^2 - z & \Longrightarrow & x^2 - x = z^2 - z \\ & \Longrightarrow & x\mathcal{R}z. \end{array}$$

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$, *d'où la transitivité de* $\mathcal{R}$.

Finalement, de (a), (b) et (c), $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}$.

2. *Calculons la classe d'équivalence de* 0. *On a*

$$\begin{array}{rcl} \overline{0} & = & \{x \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - x = 0^2 - 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R},\ x(x-1) = 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R},\ x = 0 \text{ ou } x = 1\} \\ & = & \{0, 1\} \end{array}$$

Exemple 1.12. *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *la relation binaire* $\mathcal{R}$ *par :*

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

1. *Montrons que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

   (a) *Réflexivité de* $\mathcal{R}$: *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. *On a*

$$\begin{array}{rl} & a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \\ \Longrightarrow & (a,b)\,\mathcal{R}\,(a,b). \end{array}$$

Donc $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b)\,\mathcal{R}\,(a,b)$. *D'où la réflexivité de* $\mathcal{R}$.

(b) *Symétrie de* $\mathcal{R}$: *Soient* $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$: $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$. *On a*

$$\begin{array}{rcl}(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) & \Longrightarrow & a^2+b^2=c^2+d^2\\ & \Longrightarrow & c^2+d^2=a^2+b^2\\ & \Longrightarrow & (c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b).\end{array}$$

Donc

$$\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2,\ (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)\Longrightarrow (c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b).$$

D'où la symétrie de $\mathcal{R}$.

(c) *Transitivité de* $\mathcal{R}$: *Soient* $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$: $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ *et* $(c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f)$. *On a*

$$\begin{array}{rcl}\left\{\begin{array}{l}(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)\\ et\\ (c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f)\end{array}\right. & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{l}a^2+b^2=c^2+d^2\\ et\\ c^2+d^2=e^2+f^2\end{array}\right.\\ & \Longrightarrow & a^2+b^2=e^2+f^2\\ & \Longrightarrow & (a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f).\end{array}$$

Finalement,

$$\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2 : (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)\ \ et\ \ (c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f)\Longrightarrow (a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f).$$

D'où la transitivité de $\mathcal{R}$.

De (a), (b) et (c), on a $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

2. *Donnons la classe d'équivalence de* $(0,1)$.

$$\begin{array}{rcl}\overline{(0,1)} & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : (a,b)\,\mathcal{R}\,(0,1)\}\\ & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a^2+b^2=0^2+1^2\}\\ & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a^2+b^2=1\}.\end{array}$$

Donc la classe d'équivalence de $(0,1)$ *est le cercle de centre* $(0,0)$ *et de rayon* 1.

1.2.3 Relation d'ordre

Définition 1.9. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur une ensemble E est un relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition 1.10. Soient E un ensemble et $\mathcal{S}$ une relation d'ordre dans E. On dit que $\mathcal{S}$ est d'ordre total si

$$\forall x,y\in E, (x\mathcal{S}y)\ ou\ (y\mathcal{S}x).$$

On dit que $\mathcal{S}$ est d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire

$$\exists x,y\in E, (x\not{\mathcal{S}}y)\ et\ (y\not{\mathcal{S}}x).$$

Exemple 1.13. *On définit sur $\mathbb{R}_*^+$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = x^k.$$

1. *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre*
   (a) *Réflexivité de $\mathcal{R}$: Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a*

$$\begin{aligned} & x = x^1 \\ \Longrightarrow \ & \exists k = 1 \in \mathbb{N} : x = x^k \\ \Longrightarrow \ & x\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

   Donc $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}x$. D'où la réflexivité de $\mathcal{R}$.

   (b) *Antisymétrie de $\mathcal{R}$: Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$: $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. On a*

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ et \\ y\mathcal{R}x \end{cases} & \Longrightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = x^{k_1} \\ et \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : x = y^{k_2} \end{cases} \\ & \Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = \left(y^{k_2}\right)^{k_1} \\ & \Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = y^{k_1 k_2}. \end{aligned}$$

   Donc $k_1 k_2 = 1$ ce qui implique que $k_1 = k_2 = 1$ car $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ et par suite $x = y$. Finalement,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y.$$

   D'où l'antisymétrie de $\mathcal{R}$.

   (c) *Transitivité de $\mathcal{R}$: Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_*^+$: $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a*

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ et \\ y\mathcal{R}z \end{cases} & \Longrightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = x^{k_1} \\ et \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : z = y^{k_2} \end{cases} \\ & \Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : z = \left(x^{k_1}\right)^{k_2} = x^{k_1 k_2} \\ & \Longrightarrow \exists k_3 = k_1.k_2 \in \mathbb{N} : z = x^{k_3} \Longrightarrow x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

   Finalement,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

   D'où la transitivité de $\mathcal{R}$.

   De (a), (b) et (c), on a $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2. *$\mathcal{R}$ est-elle d'ordre total ?*
   L'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas total : En effet, prenons $x = 2$ et $y = 3$. On a

$$\nexists k \in \mathbb{N} : 3 = 2^k \Longrightarrow 2 \not\mathcal{R} 3$$

   et

$$\nexists k \in \mathbb{N} : 2 = 3^k \Longrightarrow 3 \not\mathcal{R} 2.$$