

# Plan Factoriel Complet (PFC)

# 1. Introduction

Constat :

Les problèmes d'optimisation, de caractérisation ou de mise au point de procédés, de méthodes, ..., sont souvent associés à la conjonction de plusieurs paramètres ayant une influence sur la réponse.

La grandeur d'intérêt Y ou **réponse** est une fonction de plusieurs variables  $X_i$  que l'on appelle **facteurs**.

$$Y = f (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Étude du phénomène  $\equiv$  mesure de la réponse en fonction de différentes valeurs ou **niveaux** des facteurs.

On effectue des essais pour mettre en évidence les **effets** de chacun des paramètres sur la réponse.

Les facteurs peuvent être ensuite fixés aux niveaux qui optimisent la réponse.

# 1. Introduction

Expérimentation « *classique* »

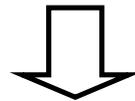
Variation un à un des paramètres

- Méthode lourde si paramètres et/ou niveaux nombreux,
- souvent employée car l'analyse des résultats est simple.

Expérimentation *méthodique*

Variation des niveaux de tous les facteurs à la fois à chaque expérience

- diminution du nombre d'essais
- étude d'un grand nombre de facteurs
- détection des interactions entre facteurs
- obtention de la meilleure précision possible
- obtention d'un modèle du système
- analyse rigoureuse conduisant + rapidement aux résultats espérés



**Les plans d'expériences**

# 1. Introduction

## Terminologie

Facteur : variable qui agit sur le système: { continu  
discret

Réponse : grandeur que l'on mesure pour connaître l'effet des facteurs sur le système: { quantitatif  
qualitatif

Facteur significatif : facteur qui modifie la réponse lorsqu'on le modifie.

Niveau d'un facteur : valeur que prend un facteur au cours des essais.

## Définition

Un plan complet consiste à étudier toutes les combinaisons possibles des facteurs pris en considération dans l'expérience.

Plan  $X^k \Leftrightarrow k$  facteurs à  $X$  niveaux

- Si 3 facteurs à 2 niveaux alors le plans  $2^3 \Rightarrow 2^3 = 8$  expériences
- Si 3 facteurs à 2 niveaux et 2 facteurs à 4 niveaux alors le plans complet comporte  $2^3 \times 4^2 = 128$  expériences

Plan  $2^k \Leftrightarrow$  plan factoriel dont les  $k$  facteurs ne possèdent que 2 niveaux.

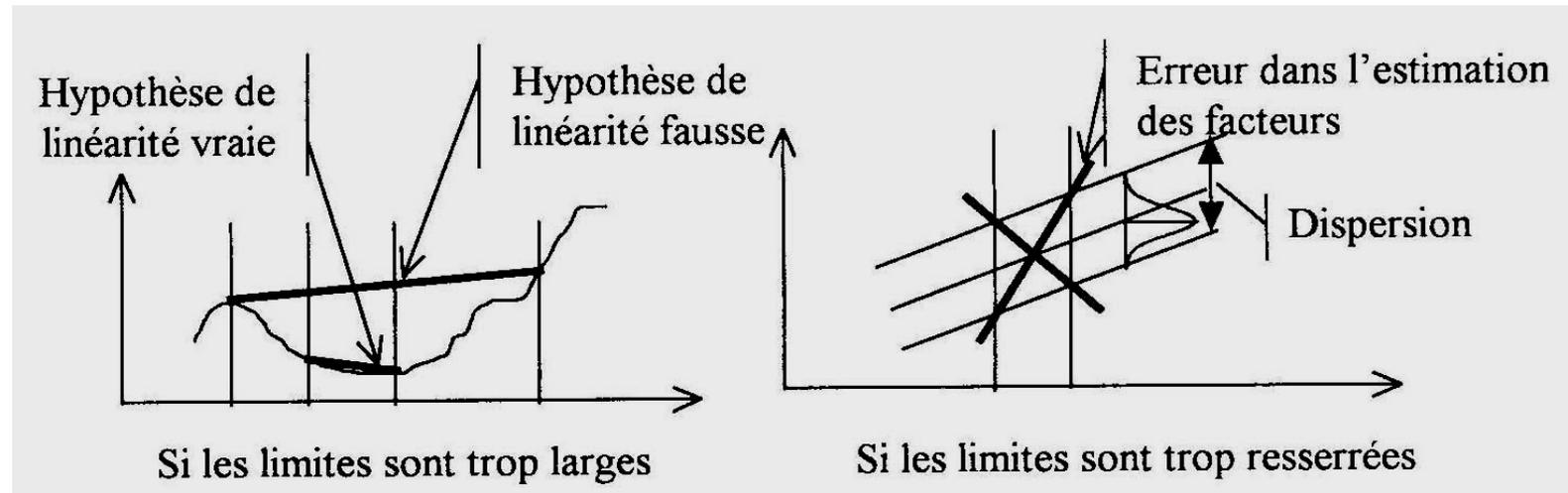
## 2. Plan factoriel complet $2^k$

### Le domaine expérimental

Le domaine de validité de l'expérience correspond aux limites raisonnables de variation des facteurs.

Cas à éviter :

- niveaux trop proches → pas d'effet significatif sur les facteurs
- niveaux trop éloignés → mise en défaut de l'hypothèse de linéarité



## 2. Plan factoriel complet $2^k$

### Stratégie de mise en place d'un plan :

- 1 – Rechercher l'ensemble des facteurs influents sur le système.
- 2 – Trier entre les facteurs contrôlés et non contrôlés (*bruits*).
- 3 – Sélectionner les facteurs contrôlés à retenir pour l'expérience (*les autres seront figés au cours des essais*).
- 4 – Définir le domaine de variation de chacun des facteurs.
- 5 – Faire le plan.
- 6 – Évaluer les dispersions des résultats (*répétition d'essais où tous les facteurs sont figés*).
- 7 – Dépouiller et interpréter (*effets, interactions, signification des effets...*).

## 2.1 matrice d'expérience

La matrice d'expérience → tableau indiquant :

- le nombre d'expérience à réaliser,
- la façon de faire varier les facteurs,
- l'ordre de réalisation des expériences.

Ici pour ce plan  $2^2$ , le niveau bas est codé à l'aide du nombre -1 et le niveau haut à l'aide du nombre +1.  
(notation de Yates)

| Exp | $X_1$ | $X_2$ |
|-----|-------|-------|
| 1   | -1    | -1    |
| 2   | +1    | -1    |
| 3   | -1    | +1    |
| 4   | +1    | +1    |

La matrice d'expérience et des réponses

| Exp | $X_1$ | $X_2$ | Réponse : $Y_{\text{rep}}$ |
|-----|-------|-------|----------------------------|
| 1   | -1    | -1    | $y_1$                      |
| 2   | +1    | -1    | $y_2$                      |
| 3   | -1    | +1    | $y_3$                      |
| 4   | +1    | +1    | $y_4$                      |

## 2.2 effet global et moyen d'un facteur

### Cas d'un seul facteur

- **effet global** d'un facteur (sur la réponse) : variation de la réponse quand le facteur passe du niveau -1 au niveau +1.
- **effet moyen** d'un facteur (sur la réponse) : demi-variation de la réponse quand le facteur passe du niveau -1 au niveau +1.

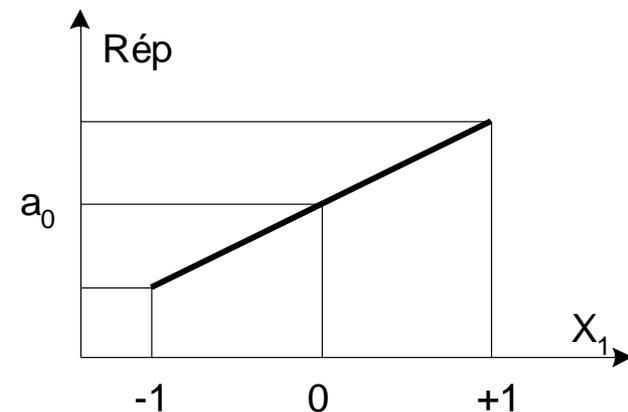
**effet moyen = moitié de l'effet global.**

Effet global de  $X_1$  :  $y_2 - y_1$

| Exp | $X_1$ | Rép : $Y_{\text{rep}}$ |
|-----|-------|------------------------|
| 1   | -1    | $y_1$                  |
| 2   | +1    | $y_2$                  |

Effet moyen de  $X_1$  :  $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{2}$

Effet au centre :  
(moyenne des réponses)  $a_0 = \frac{y_2 + y_1}{2}$



## 2.2 effet global et moyen d'un facteur

### Cas de deux facteurs

- **L'effet moyen** de  $X_1$  : demi-variation de la réponse lorsque  $X_1$  passe de -1 à +1.

Or, pour chacun des niveaux de  $X_1$ , il y a 2 expériences

⇒ à partir des **réponses moyennes**.

| Exp | $X_1$ | $X_2$ | Rép : $Y_{\text{rep}}$ |
|-----|-------|-------|------------------------|
| 1   | -1    | -1    | $y_1$                  |
| 2   | +1    | -1    | $y_2$                  |
| 3   | -1    | +1    | $y_3$                  |
| 4   | +1    | +1    | $y_4$                  |

- Réponse moyenne quand  $X_1$  est au niveau -1 :  $\bar{y}_- = \frac{y_1 + y_3}{2}$

- Réponse moyenne quand  $X_1$  est au niveau +1 :  $\bar{y}_+ = \frac{y_2 + y_4}{2}$

- Effet moyen de  $X_1$  
$$a_1 = \frac{\frac{y_2 + y_4}{2} - \frac{y_1 + y_3}{2}}{2} = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{4}$$

Effet global de  $X_1$  :  $E_{X_1} = \bar{y}_+ - \bar{y}_-$       Effet moyen de  $X_1$  :  $a_1 = \frac{\bar{y}_+ - \bar{y}_-}{2}$  9

## 2.2 effet global et moyen d'un facteur

### Cas de deux facteurs

- Rép. moyenne quand  $X_2$  est au niveau  $-1$  :

$$\bar{y}_{X_2^-} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- Rép. moyenne quand  $X_2$  est au niveau  $+1$  :

$$\bar{y}_{X_2^+} = \frac{y_3 + y_4}{2}$$

| Exp | $X_1$ | $X_2$ | Rép : $Y_{\text{rep}}$ |
|-----|-------|-------|------------------------|
| 1   | -1    | -1    | $y_1$                  |
| 2   | +1    | -1    | $y_2$                  |
| 3   | -1    | +1    | $y_3$                  |
| 4   | +1    | +1    | $y_4$                  |

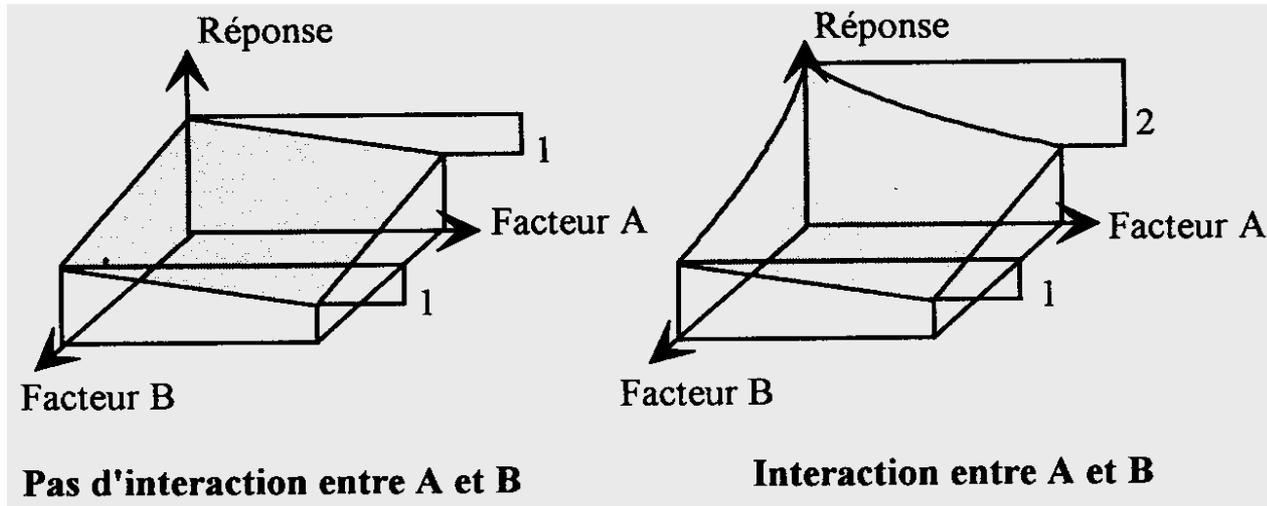
- Effet moyen de  $X_2$

$$a_2 = \frac{\frac{y_3 + y_4}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2}}{2} = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

- Réponse théorique pour  $X_2 = 0$  (au centre de son domaine de variation) :  
moyenne des réponses observées aux niveaux  $-1$  et  $+1$

$$a_0 = \frac{\frac{y_3 + y_4}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2}}{2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

## 2.3 Notion d'interaction entre facteurs



- Il y a interaction entre deux facteurs si l'effet moyen de l'un varie suivant le niveau de l'autre.
- Il y a distorsion de la surface de réponse. La distorsion est d'autant plus importante que l'interaction est grande.

ou

Il existe une interaction entre 2 facteurs A et B si l'effet du facteur A sur la réponse dépend du niveau du facteur B et réciproquement.

## 2.3 Notion d'interaction entre facteurs

### Calcul de l'interaction $X_1X_2$

L'interaction est considérée comme un **nouveau facteur** et l'effet moyen de l'interaction est la  $\frac{1}{2}$  variation de l'effet moyen de  $X_2$  lorsque  $X_1$  passe du niveau bas au niveau haut

| Exp | $X_1$ | $X_2$ | Réponse : $Y_{\text{rep}}$ |
|-----|-------|-------|----------------------------|
| 1   | -1    | -1    | $y_1 = 60$                 |
| 2   | +1    | -1    | $y_2 = 85$                 |
| 3   | -1    | +1    | $y_3 = 75$                 |
| 4   | +1    | +1    | $y_4 = 90$                 |

- Effet moyen de  $X_2$  au **niveau haut** de  $X_1$  :  $\frac{y_4 - y_2}{2} = \frac{90 - 85}{2} = 2.5$
- Effet moyen de  $X_2$  au **niveau bas** de  $X_1$  :  $\frac{y_3 - y_1}{2} = \frac{75 - 60}{2} = 7.5$
- Effet moyen de l'interaction  $X_1X_2$  : 
$$a_{12} = \frac{\frac{y_4 - y_2}{2} - \frac{y_3 - y_1}{2}}{2}$$
$$= \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4}$$

# Plan factoriel complet

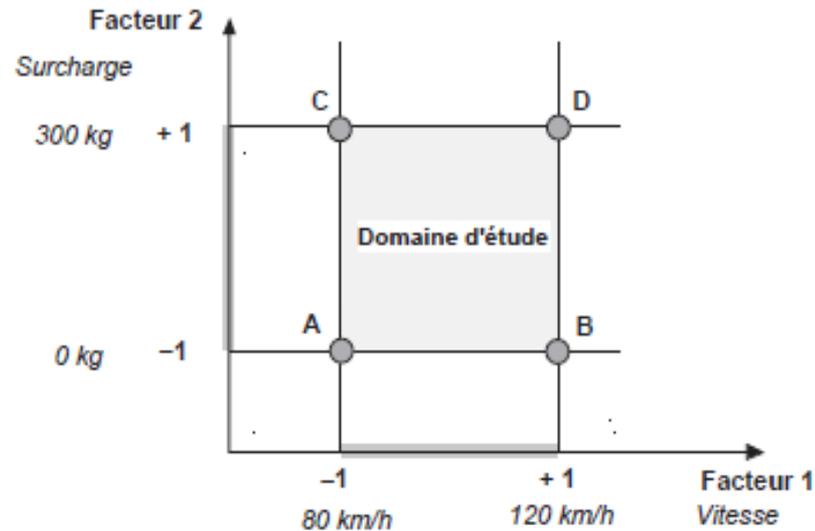
## Étude d'un plan d'expérience

# 1. Facteurs et domaine d'étude:

Consommation de carburant d'un véhicule (L/100km)

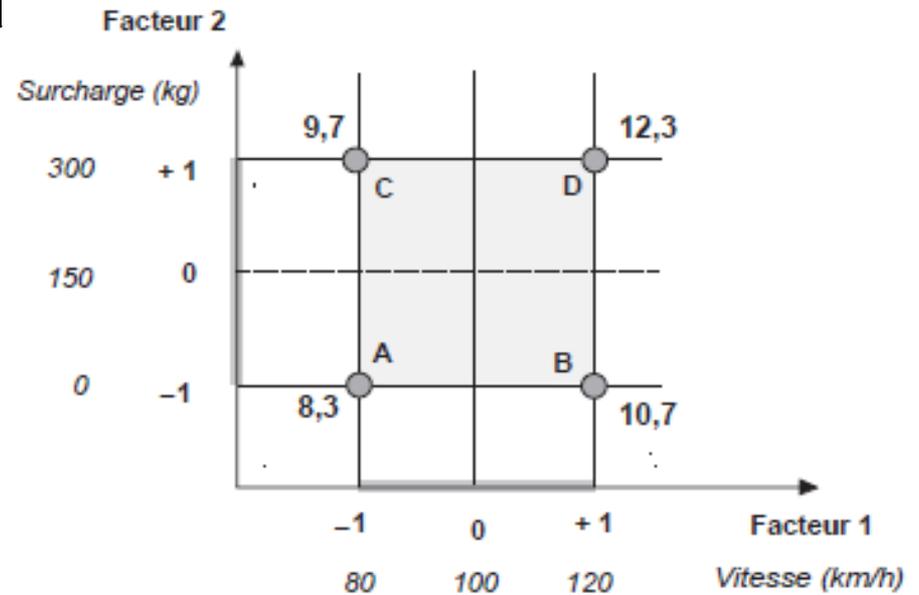
- réponse : consommation d'essence,
- facteurs : vitesse et surcharge,

| Facteur          | Niveau bas | Niveau haut |
|------------------|------------|-------------|
| Vitesse (1) Km/h | 80         | 120         |
| Surcharge (2) kg | 0          | 300         |



## 2. Matrice d'expériences:

| N° essai  | X1 (Km/h) | X2 (Kg)  | Y (L/100Km) |
|-----------|-----------|----------|-------------|
| 1         | 80        | 0        | 8,3         |
| 2         | 120       | 0        | 10,7        |
| 3         | 80        | 300      | 9,7         |
| 4         | 120       | 300      | 12,3        |
| Niveau -1 | 80 Km/h   | 120 Km/h |             |
| Niveau +1 | 0 Kg      | 300 Kg   |             |



### 3. Modèle postulé :

Le modèle postulé pour un plan factoriel complet (PFC)  $2^2$  est :

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_{12} x_1 x_2 + \hat{e}$$

Modèle polynomial de 1<sup>er</sup> degré avec interactions.

Avec:

- $a_0$  = coefficient constant
- $a_1$  = coefficient du facteur (1)
- $a_2$  = coefficient du facteur (2)
- $a_{12}$  = coefficient de l'interaction ( $x_1 x_2$ )

### 3.1 Calcul des coefficients :

| essai | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_1X_2$ | $Y_{\text{exp}}$ |
|-------|-------|-------|-------|----------|------------------|
| 1     | +1    | -1    | -1    | +1       | 8,3              |
| 2     | +1    | +1    | -1    | -1       | 10,7             |
| 3     | +1    | -1    | +1    | -1       | 9,7              |
| 4     | +1    | +1    | +1    | +1       | 12,3             |

|          |                  |                 |                 |                     |
|----------|------------------|-----------------|-----------------|---------------------|
| Diviseur | 4                | 4               | 4               | 4                   |
| Effets   | $\alpha_0=10,25$ | $\alpha_1=1,25$ | $\alpha_2=0,75$ | $\alpha_{1,2}=0,05$ |

### 3.1 Signification des coefficients :

**Signification de  $a_0$**  : on prend  $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$

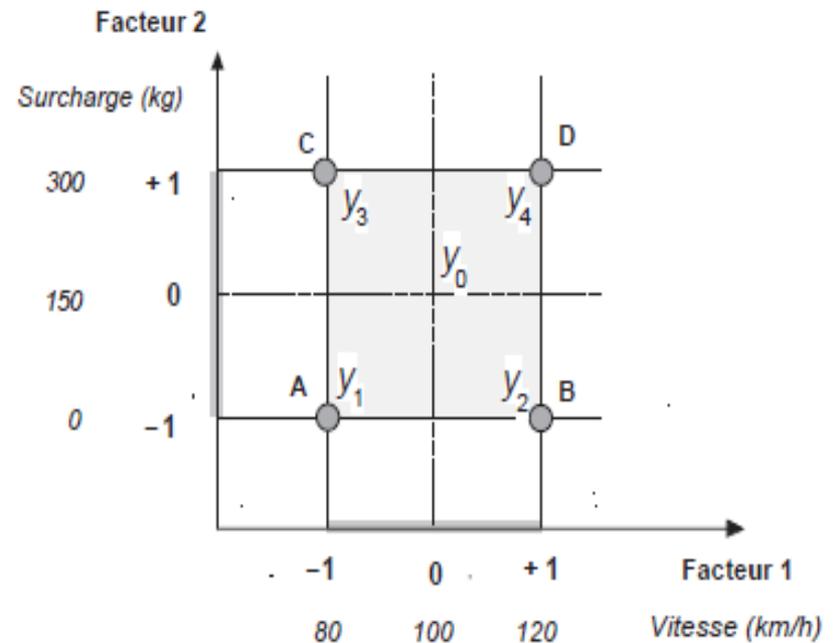
$$\hat{y}_0 = a_0 + a_1 0 + a_2 0 + a_{12} 0 * 0$$

$$\hat{y}_0 = a_0 \quad \text{centre du domaine}$$

AN: 
$$a_0 = \frac{1}{4} [y_1 + y_2 + y_3 + y_4]$$

$$a_0 = 10,25$$

$$\hat{y}_0 = a_0 = 10,25 \text{ L/100Km}$$



### 3.1 Signification des coefficients :

#### **Signification de $a_1$ :**

on considère les points B et D de coordonnées:

$$B: x_1=+1 \text{ et } x_2=-1 \quad D: x_1=+1 \text{ et } x_2=+1$$

$$B: y_2 = a_0 + a_1 - a_2 - a_{12} \quad D: y_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_{12}$$

$$A: x_1=-1 \text{ et } x_2=-1 \quad C: x_1=-1 \text{ et } x_2=+1$$

$$A: y_1 = a_0 - a_1 - a_2 + a_{12} \quad C: y_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_{12}$$

$$\text{La somme: } y_2 + y_4 = 2(a_0 + a_1) \text{ et } y_1 + y_3 = 2(a_0 - a_1)$$

$$\text{soit: } (y_2 + y_4) - (y_1 + y_3) = 4(a_1)$$

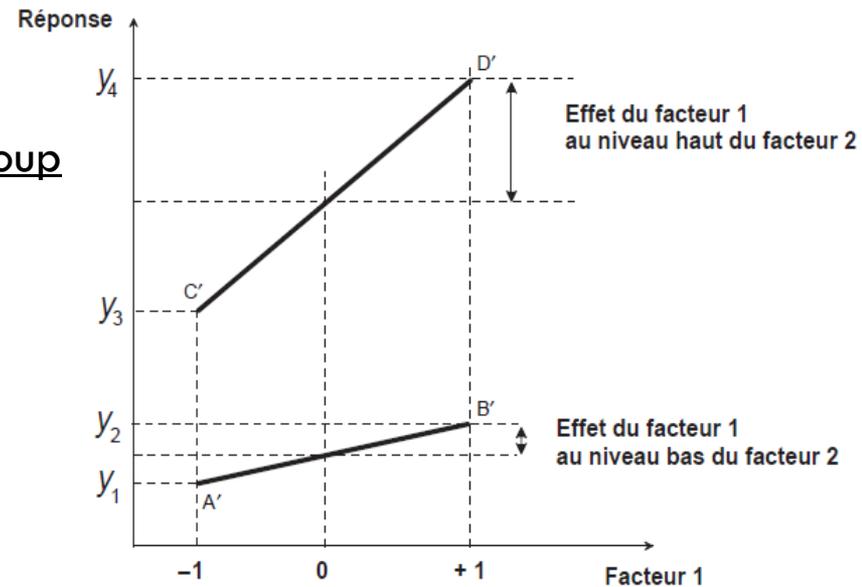
$$\text{d'où: } a_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{(y_2 + y_4)}{2} - \frac{(y_1 + y_3)}{2} \right]$$

### 3. Signification des coefficients :

on note:  $\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}^- = \frac{1}{2} (y_1 + y_3) \text{ moyenne des réponses au niveau (+1)} \\ \bar{y}^+ = \frac{1}{2} (y_2 + y_4) \text{ moyenne des réponses au niveau (-1)} \end{array} \right.$

alors:  $a_1 = \frac{1}{2} (\bar{y}^+ - \bar{y}^-)$

si:  $\left\{ \begin{array}{l} (\bar{y}^+ - \bar{y}^-) \text{ élevée} = \text{réponse varie } \underline{\text{beaucoup}} \\ (\bar{y}^+ - \bar{y}^-) \text{ faible} = \text{réponse varie } \underline{\text{peu}} \end{array} \right.$



### 3. Signification des coefficients :

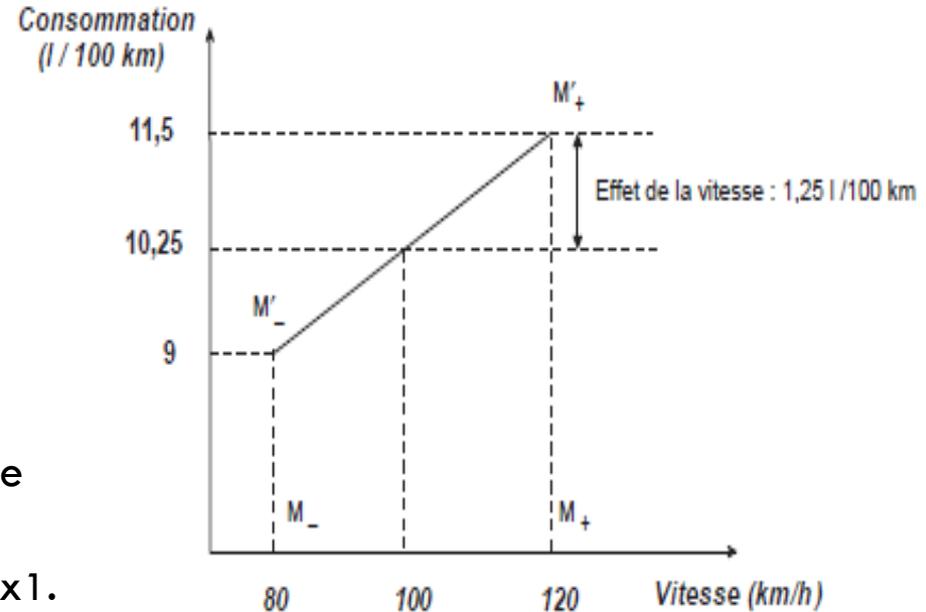
#### Représentation de $a_1$ :

$M^+$ :  $x_1=+1$  et  $x_2=0$  milieu du segment BD

$M^-$ :  $x_1=+1$  et  $x_2=0$  milieu du segment AC

$$a_1 = \frac{1}{2} (\overline{y^+} - \overline{y^-})$$

$a_1$ : est la moitié de la variation entre la moyenne des réponses au niveau(+1) du facteur  $x_1$  et la moyenne des réponses au niveau(-1) du facteur  $x_1$ .



$$\overline{y^+} = \frac{1}{2} (y_2 + y_4) = \frac{10,7 + 12,3}{2} = 11,5 \quad \overline{y^-} = \frac{1}{2} (y_1 + y_3) = \frac{8,3 + 9,7}{2} = 9$$

La consommation passe de 9 à 11,5 L/100 Km quand la vitesse passe de 80 à 120 Km/h.

**soit:** la consommation au centre est:

$$\frac{1}{2} (\overline{y^+} - \overline{y^-}) = \frac{11,5 - 9}{2} = 1,25 \text{ l/100Km}$$

### 3. Signification des coefficients :

#### **Signification de $a_2$ :**

on considère les points B et D de coordonnées:

$$B: x_1=+1 \text{ et } x_2=-1 \quad D: x_1=+1 \text{ et } x_2=+1$$

$$B: y_2 = a_0 + a_1 \cdot -a_2 - a_{12} \quad D: y_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_{12}$$

$$A: x_1=-1 \text{ et } x_2=-1 \quad C: x_1=-1 \text{ et } x_2=+1$$

$$A: y_1 = a_0 - a_1 - a_2 + a_{12} \quad C: y_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_{12}$$

La moyenne de consommation au niveau(+1) du facteur  $x_2$ :

$$\overline{y^+} = \frac{1}{2} (y_3 + y_4) = \frac{9,7 + 12,3}{2} = 11 \text{ l/100Km}$$

Et la moyenne de consommation au niveau(-1) du facteur  $x_2$

$$\overline{y^-} = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) = \frac{8,3 + 10,7}{2} = 9,5 \text{ L/100Km}$$

La consommation passe de 9,5 à 11 L/100 Km quand la charge passe de 0 à 300 Kg.

### 3.1 Significations des coefficients :

#### Représentation de $a_2$ :

$M'^+$ :  $x_1=0$  et  $x_2=+1$  milieu du segment B'D'

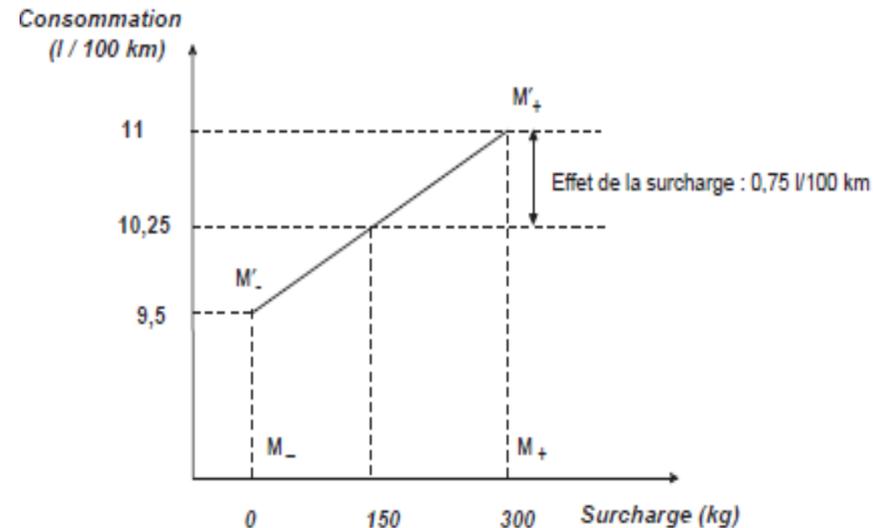
$M'^-$ :  $x_1=0$  et  $x_2=-1$  milieu du segment A'C'

$$\frac{1}{2} (\overline{y^+} - \overline{y^-}) = \frac{11 - 9,5}{2} = 0,75 \text{ l/100Km}$$

$a_2$ : est la moitié de la variation entre la moyenne des réponses au niveau(+1) du facteur  $x_2$  et la moyenne des réponses au niveau(-1) du facteur  $x_2$ .

$$a_2 = \frac{1}{2} (\overline{y'^+} - \overline{y'^-}) = \frac{11 - 9,5}{2} = 0,75 \text{ L/100Km}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} [-y_1 - y_2 + y_3 + y_4] = 0,75 \text{ L/100Km}$$



Ce qui signifie que l'effet de la surcharge (facteur 2) est de 0,75 L/100 Km.

## 3.2 Signification des coefficients :

### Signification de $a_{12}$ :

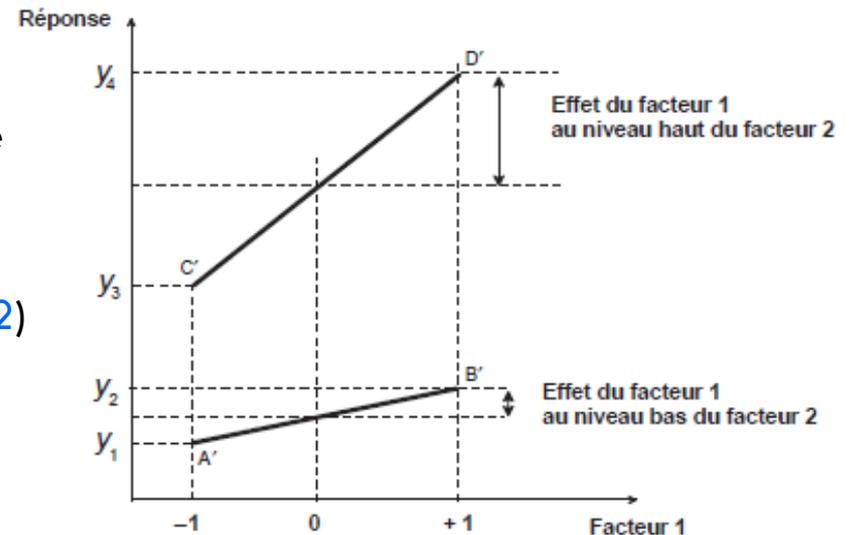
$$a_{12} = \frac{1}{4} [+y_1 - y_2 - y_3 + y_4]$$

$$a_{12} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (y_4 - y_3) - \frac{1}{2} (y_2 - y_1) \right]$$

on note:  $\left\{ \begin{array}{l} e^{f+} = \frac{1}{2} (y_4 - y_3) \text{ effet de } x(1) \text{ au niveau } (+1) \text{ de } x(2) = \text{segment } C'D' \\ e^{f-} = \frac{1}{2} (y_2 - y_1) \text{ effet de } x(1) \text{ au niveau } (-1) \text{ de } x(2) = \text{segment } A'B' \end{array} \right.$

Le coefficient  $a_{12}$  est la moitié de la différence entre ces deux effets.

$a_{12}$  mesure la variation de l'effet du facteur 1 (2) quand le niveau du facteur 2 (1) est modifié. Interaction entre le facteur (1) et le facteur (2).

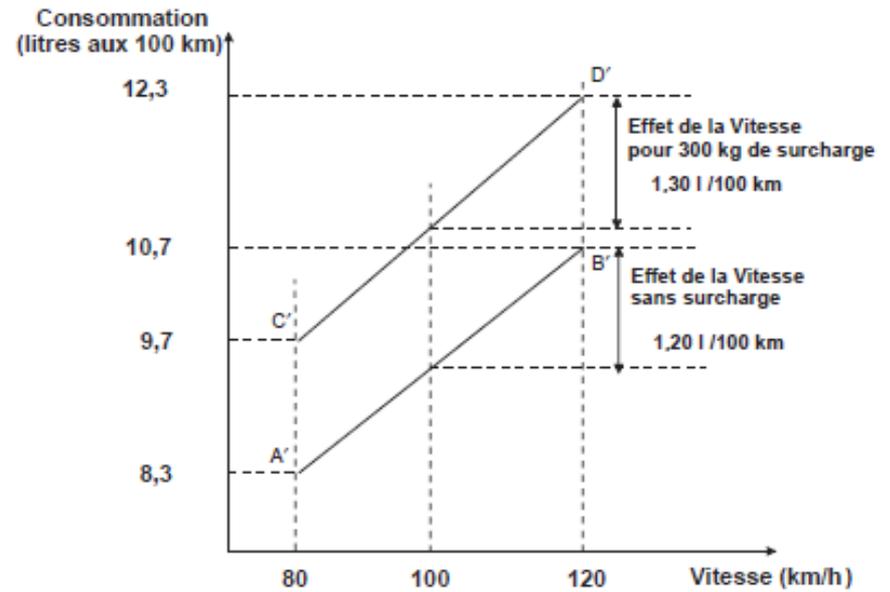


## 3.2 Signification des coefficients :

### Calcul de $a_{12}$ :

$$a_{12} = \frac{1}{4} [+y_1 - y_2 - y_3 + y_4]$$

$$a_{12} = \frac{1}{4} [+8,3 - 10,7 - 9,7 + 12,3] = 0,05 \text{ L}/100 \text{ Km}$$



• L'interaction entre  $x_1$  et  $x_2$  est de  $0,05 \text{ L}/100 \text{ km}$

= l'effet de la vitesse est un peu plus élevé quand on se trouve en surcharge.

- À 80 km/h, l'effet de la surcharge est de  $0,7 \text{ L}/100 \text{ km}$
- À 120 km/h, l'effet de la surcharge est de  $0,8 \text{ L}/100 \text{ km}$ .

= l'effet de la surcharge est plus important quand on roule vite.

- avec surcharge 0 kg, l'effet de la vitesse est de  $1,2 \text{ l}$  aux 100 km.
- Avec surcharge 300 kg, l'effet de la vitesse est de  $1,3 \text{ l}$  aux 100 km

#### 4. Interprétation des résultats :

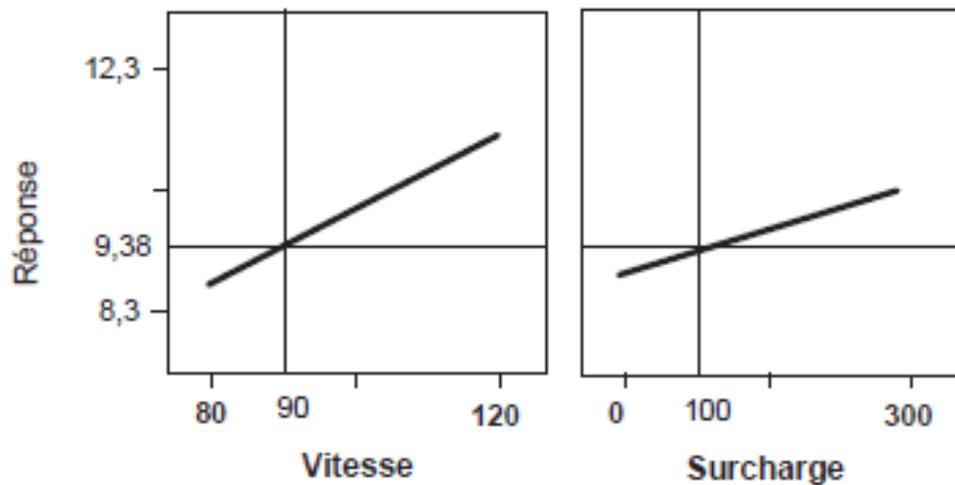
Écriture de l'équation du modèle (unités centrées réduites) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 10,25 \\ a_1 = 1,25 \\ a_2 = 0,75 \\ a_{12} = 0,05 \end{array} \right. \quad \hat{y}_0 = 10,25 + 1,25 \cdot x_1 + 0,75 \cdot x_2 + 0,05 \cdot x_1 \cdot x_2$$

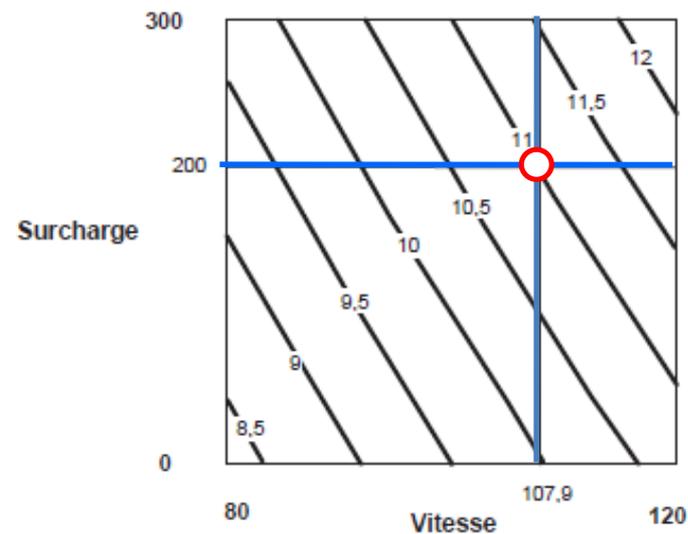
Conversion: vitesse:  $x_1 = \frac{Z_1 - Z_1^0}{\Delta Z_1} = \frac{Z_1 - 100}{20}$

surcharge:  $x_2 = \frac{Z_2 - Z_2^0}{\Delta Z_2} = \frac{Z_2 - 150}{150}$

$$\hat{y}_0 = 3,5 + 0,06 \cdot Z_1 + 0,0033 \cdot Z_2 + 0,0000167 \cdot Z_1 \cdot Z_2$$



Valeur de la réponse en divers points du domaine d'étude.



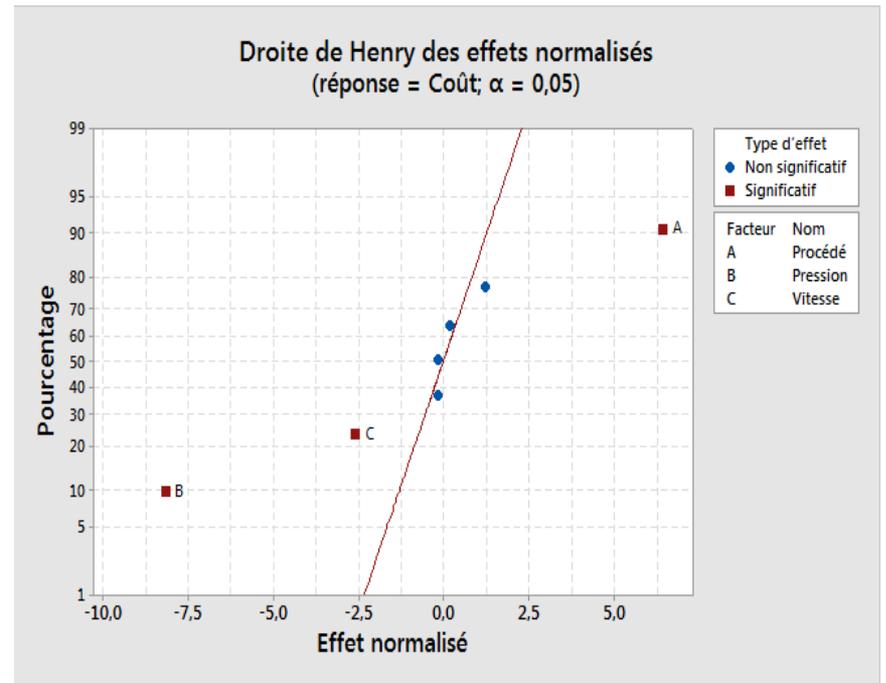
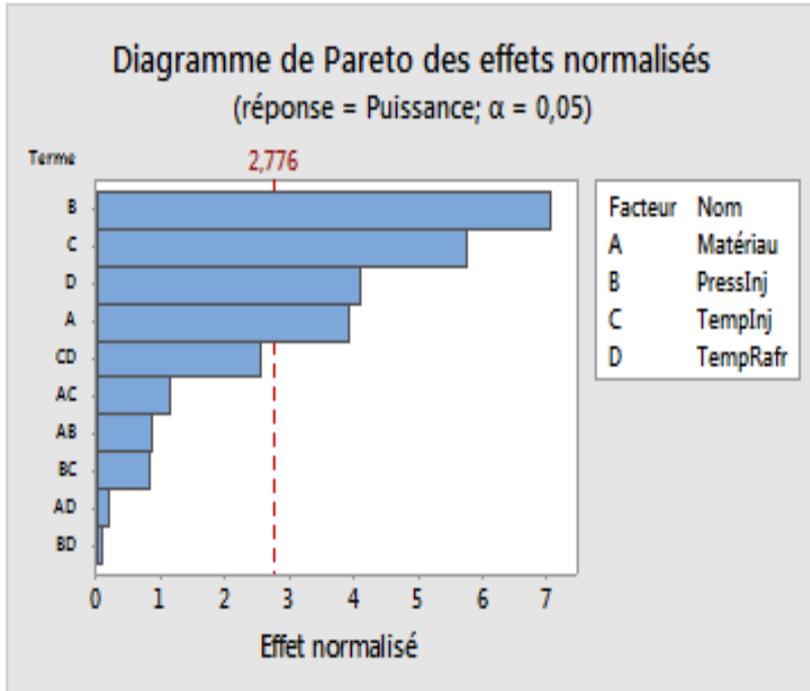
- Avec une surcharge de 200 kg on limitera la vitesse à 107,9 km/h pour ne pas consommer plus de 11 l aux 100 km.

# Analyse de la variance (ANOVA)

# 1. Coefficients du modèle

## Signification des coefficients

représentation graphique (Pareto, Henry)



# 1. Coefficients du modèle

## Intervalle de confiance des effets

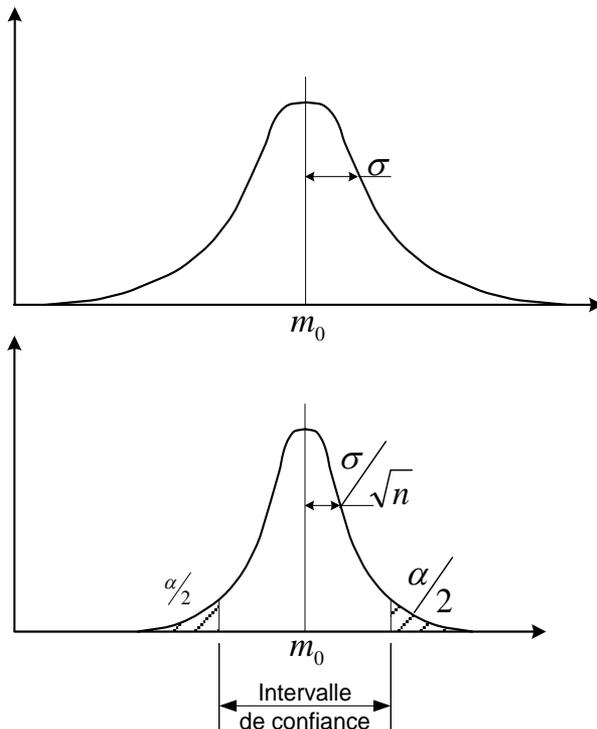
### a/ variance expérimentale connue

On suppose que compte tenu de nombreuses expériences faites on connaît l'écart type expérimental  $\sigma$ . L'intervalle de confiance d'un effet est donné, par :

risque 5% :  $[(a_i - 1,96 \sigma_i) ; (a_i + 1,96 \sigma_i)]$

risque 1% :  $[(a_i - 2,58 \sigma_i) ; (a_i + 2,58 \sigma_i)]$

où  $\sigma_i^2$  est la variance commune des estimateurs des coefficients.



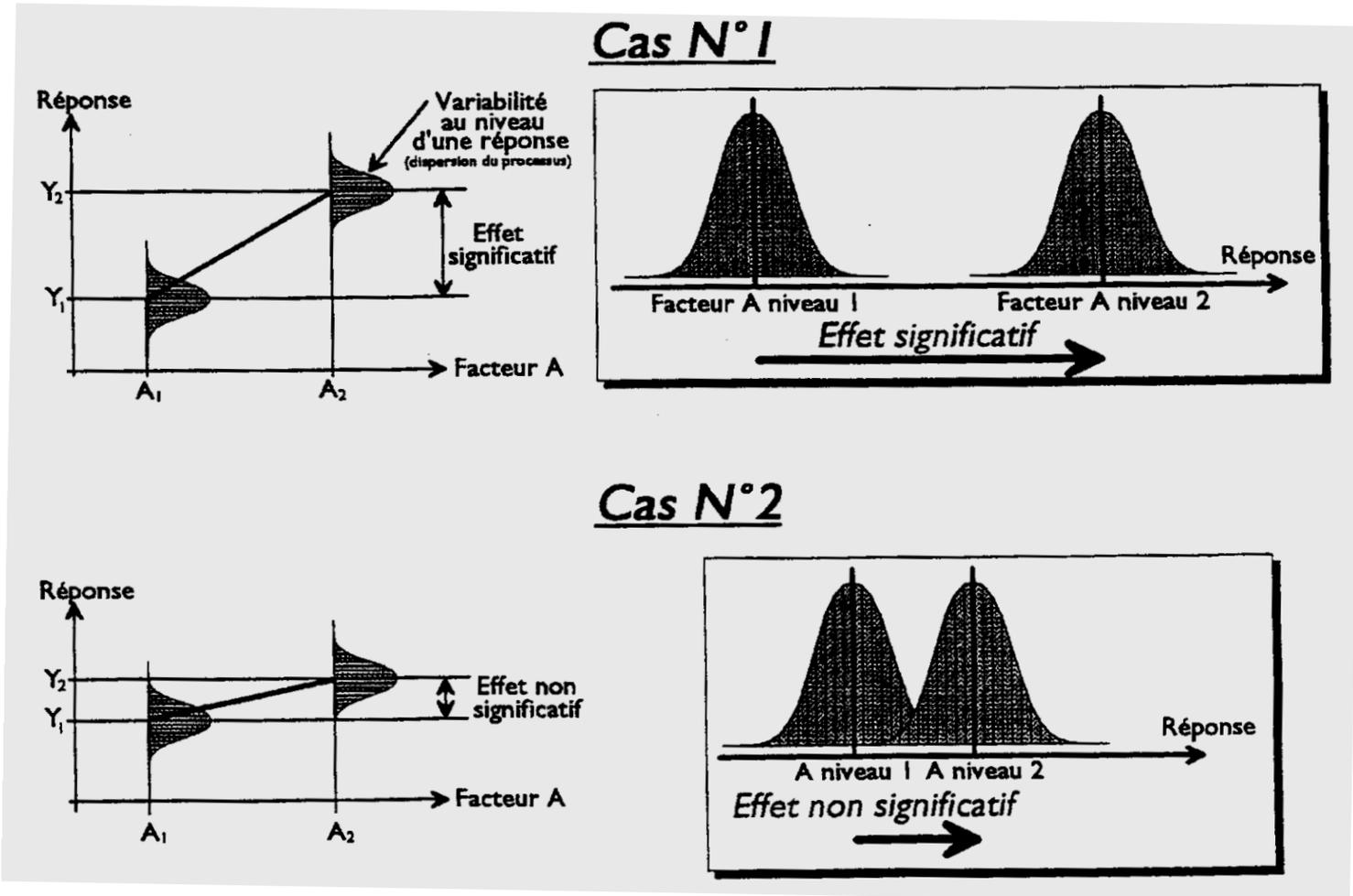
| $\nu$    | P=0.90 | P=0.95 | 0.975  | 0.990  | 0.995  | 0.999   | 0.9995  |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
| 1        | 3.078  | 6.314  | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 318.302 | 636.619 |
| 2        | 1.886  | 2.920  | 4.303  | 6.965  | 9.925  | 22.327  | 31.598  |
| ⋮        | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮       | ⋮       |
| 100      | 1.290  | 1.660  | 1.984  | 2.364  | 2.626  | 3.174   | 3.391   |
| 200      | 1.286  | 1.653  | 1.972  | 2.345  | 2.601  | 3.131   | 3.340   |
| $\infty$ | 1.282  | 1.645  | 1.960  | 2.326  | 2.576  | 3.090   | 3.291   |



# 1. Coefficients du modèle

- Lever le doute quant à la significativité des effets

## Analyse de la variance



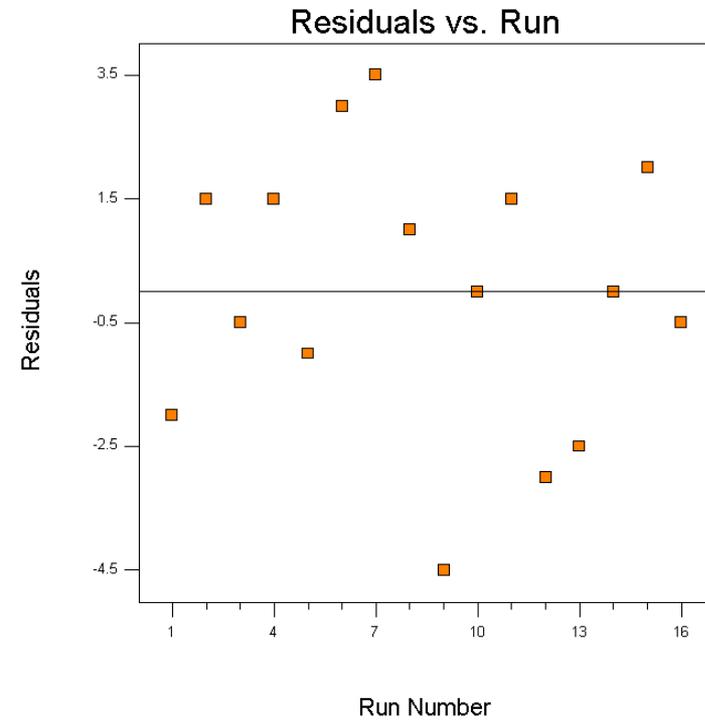
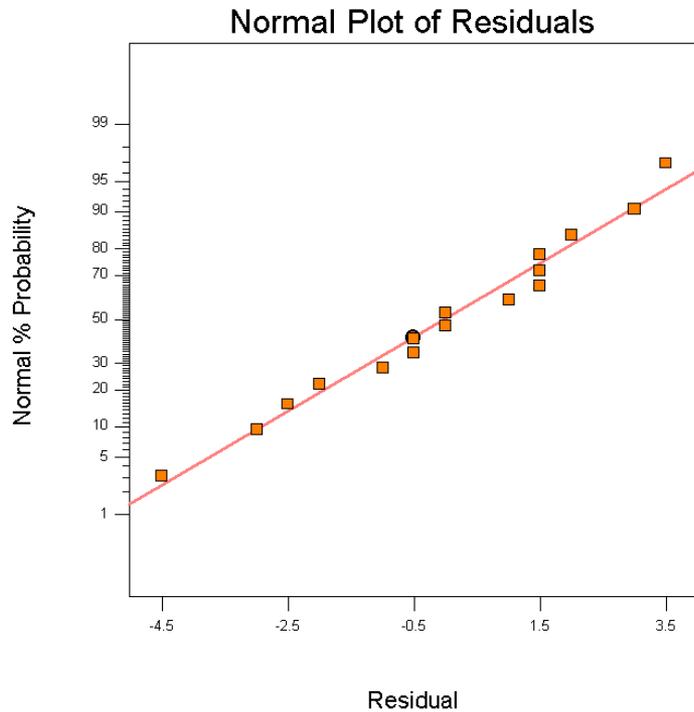
## 2. Validation du modèle

Tableau ANOVA

| source de variation                       | Somme Carrés                      | ddl           | SCM                 | F                                 | Ftab                                  |
|---|-----------------------------------|---------------|---------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| aléatoire                                 | no au centre<br>m répliques       | no-1<br>N*m-1 | S <sup>2</sup> repr | $F = \frac{S^2_{rés}}{S^2_{rep}}$ | F(α, N-p, no-1)<br>F(α, N-p, N.(m-1)) |
| résiduelle                                |                                   | N-p           | S <sup>2</sup> rés  |                                   |                                       |
| régression                                |                                   | p-1           | S <sup>2</sup> reg  |                                   | F(α, p-1, N-p)                        |
| Modèle corrigé de la moyenne              | $\sum (y_i^{\wedge} - y_{moy})^2$ | p-1           | S <sup>2</sup> reg  | $F = \frac{S^2_{reg}}{S^2_{rés}}$ |                                       |
| Résidus                                   | $\sum (y_i - y_i^{\wedge})^2$     | N-p           | S <sup>2</sup> rés  |                                   |                                       |
| Réponses mesurées corrigées de la moyenne | $\sum (y_i - y_{moy})^2$          | N-1           |                     |                                   |                                       |

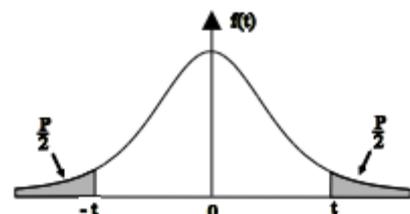
## 2. Validation du modèle

### Analyse des résidus



Valeurs de **T** ayant la probabilité **P** d'être dépassées en valeur absolue

| $\nu$    | $P=0,90$ | 0,80  | 0,70  | 0,60  | 0,50  | 0,40  | 0,30  | 0,20  | 0,10  | 0,05   | 0,02   | 0,01   |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 1        | 0,158    | 0,325 | 0,510 | 0,727 | 1,000 | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 |
| 2        | 0,142    | 0,289 | 0,445 | 0,617 | 0,816 | 1,061 | 1,386 | 1,886 | 2,920 | 4,303  | 6,965  | 9,925  |
| 3        | 0,137    | 0,277 | 0,424 | 0,584 | 0,765 | 0,978 | 1,250 | 1,638 | 2,353 | 3,182  | 4,541  | 5,841  |
| 4        | 0,134    | 0,271 | 0,414 | 0,569 | 0,741 | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,132 | 2,776  | 3,747  | 4,604  |
| 5        | 0,132    | 0,267 | 0,408 | 0,559 | 0,727 | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,015 | 2,571  | 3,365  | 4,032  |
| 6        | 0,131    | 0,265 | 0,404 | 0,553 | 0,718 | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,943 | 2,447  | 3,143  | 3,707  |
| 7        | 0,130    | 0,263 | 0,402 | 0,549 | 0,711 | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,895 | 2,365  | 2,998  | 3,499  |
| 8        | 0,130    | 0,262 | 0,399 | 0,546 | 0,706 | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,860 | 2,306  | 2,896  | 3,355  |
| 9        | 0,129    | 0,261 | 0,398 | 0,543 | 0,703 | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,833 | 2,262  | 2,821  | 3,250  |
| 10       | 0,129    | 0,260 | 0,397 | 0,542 | 0,700 | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,812 | 2,228  | 2,764  | 3,169  |
| 11       | 0,129    | 0,260 | 0,396 | 0,540 | 0,697 | 0,876 | 1,088 | 1,363 | 1,796 | 2,201  | 2,718  | 3,106  |
| 12       | 0,128    | 0,260 | 0,395 | 0,539 | 0,695 | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,782 | 2,179  | 2,681  | 3,055  |
| 13       | 0,128    | 0,259 | 0,394 | 0,538 | 0,694 | 0,870 | 1,079 | 1,350 | 1,771 | 2,160  | 2,650  | 3,012  |
| 14       | 0,128    | 0,258 | 0,393 | 0,537 | 0,692 | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,761 | 2,145  | 2,624  | 2,977  |
| 15       | 0,128    | 0,258 | 0,393 | 0,536 | 0,691 | 0,866 | 1,074 | 1,341 | 1,753 | 2,131  | 2,602  | 2,947  |
| 16       | 0,128    | 0,258 | 0,392 | 0,535 | 0,690 | 0,865 | 1,071 | 1,337 | 1,746 | 2,120  | 2,583  | 2,921  |
| 17       | 0,128    | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,689 | 0,863 | 1,069 | 1,333 | 1,740 | 2,110  | 2,567  | 2,898  |
| 18       | 0,127    | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,688 | 0,862 | 1,067 | 1,330 | 1,734 | 2,101  | 2,552  | 2,878  |
| 19       | 0,127    | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,688 | 0,861 | 1,066 | 1,328 | 1,729 | 2,093  | 2,539  | 2,861  |
| 20       | 0,127    | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,687 | 0,860 | 1,064 | 1,325 | 1,725 | 2,086  | 2,528  | 2,845  |
| 21       | 0,127    | 0,257 | 0,391 | 0,532 | 0,686 | 0,859 | 1,063 | 1,323 | 1,721 | 2,080  | 2,518  | 2,831  |
| 22       | 0,127    | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,686 | 0,858 | 1,061 | 1,321 | 1,717 | 2,074  | 2,508  | 2,819  |
| 23       | 0,127    | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,685 | 0,858 | 1,060 | 1,319 | 1,714 | 2,069  | 2,500  | 2,807  |
| 24       | 0,127    | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,685 | 0,857 | 1,059 | 1,318 | 1,711 | 2,064  | 2,492  | 2,797  |
| 25       | 0,127    | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,316 | 1,708 | 2,060  | 2,485  | 2,787  |
| 26       | 0,127    | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,315 | 1,706 | 2,056  | 2,479  | 2,779  |
| 27       | 0,127    | 0,256 | 0,389 | 0,531 | 0,684 | 0,855 | 1,057 | 1,314 | 1,703 | 2,052  | 2,473  | 2,771  |
| 28       | 0,127    | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,855 | 1,056 | 1,313 | 1,701 | 2,048  | 2,467  | 2,763  |
| 29       | 0,127    | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,311 | 1,699 | 2,045  | 2,462  | 2,756  |
| 30       | 0,127    | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,310 | 1,697 | 2,042  | 2,457  | 2,750  |
| $\infty$ | 0,126    | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,674 | 0,842 | 1,036 | 1,282 | 1,645 | 1,96   | 2,326  | 2,576  |



Nota.  $\nu$  est le nombre de degrés de liberté.  
 Le quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  se lit dans la colonne  $P = \alpha$ .  
 Le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  se lit dans la colonne  $P = 2\alpha$ .

# Table de Fisher - Snedecor

## Table de Snedecor pour p = 0,95

| v2  | v1 - Degré de liberté du numérateur (facteur ou interaction) |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 1  | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
| 1   | 161,45   | 199,50 | 215,71 | 224,58 | 230,16 | 233,99 | 236,77 | 238,88 | 240,54 | 241,88 |
| 2   | 18,51  | 19,00  | 19,16  | 19,25  | 19,30  | 19,33  | 19,35  | 19,37  | 19,38  | 19,40  |
| 3   | 10,13  | 9,55   | 9,28   | 9,12   | 9,01   | 8,94   | 8,89   | 8,85   | 8,81   | 8,79   |
| 4   | 7,71   | 6,94   | 6,59   | 6,39   | 6,26   | 6,16   | 6,09   | 6,04   | 6,00   | 5,96   |
| 5   | 6,61   | 5,79   | 5,41   | 5,19   | 5,05   | 4,95   | 4,88   | 4,82   | 4,77   | 4,74   |
| 6   | 5,99   | 5,14   | 4,76   | 4,53   | 4,39   | 4,28   | 4,21   | 4,15   | 4,10   | 4,06   |
| 7   | 5,59   | 4,74   | 4,35   | 4,12   | 3,97   | 3,87   | 3,79   | 3,73   | 3,68   | 3,64   |
| 8   | 5,32   | 4,46   | 4,07   | 3,84   | 3,69   | 3,58   | 3,50   | 3,44   | 3,39   | 3,35   |
| 9   | 5,12   | 4,26   | 3,86   | 3,63   | 3,48   | 3,37   | 3,29   | 3,23   | 3,18   | 3,14   |
| 10  | 4,96   | 4,10   | 3,71   | 3,48   | 3,33   | 3,22   | 3,14   | 3,07   | 3,02   | 2,98   |
| 11  | 4,84   | 3,98   | 3,59   | 3,36   | 3,20   | 3,09   | 3,01   | 2,95   | 2,90   | 2,85   |
| 12  | 4,75   | 3,89   | 3,49   | 3,26   | 3,11   | 3,00   | 2,91   | 2,85   | 2,80   | 2,75   |
| 13  | 4,67   | 3,81   | 3,41   | 3,18   | 3,03   | 2,92   | 2,83   | 2,77   | 2,71   | 2,67   |
| 14  | 4,60   | 3,74   | 3,34   | 3,11   | 2,96   | 2,85   | 2,76   | 2,70   | 2,65   | 2,60   |
| 15  | 4,54   | 3,68   | 3,29   | 3,06   | 2,90   | 2,79   | 2,71   | 2,64   | 2,59   | 2,54   |
| 16  | 4,49   | 3,63   | 3,24   | 3,01   | 2,85   | 2,74   | 2,66   | 2,59   | 2,54   | 2,49   |
| 17  | 4,45   | 3,59   | 3,20   | 2,96   | 2,81   | 2,70   | 2,61   | 2,55   | 2,49   | 2,45   |
| 18  | 4,41   | 3,55   | 3,16   | 2,93   | 2,77   | 2,66   | 2,58   | 2,51   | 2,46   | 2,41   |
| 19  | 4,38   | 3,52   | 3,13   | 2,90   | 2,74   | 2,63   | 2,54   | 2,48   | 2,42   | 2,38   |
| 20  | 4,35   | 3,49   | 3,10   | 2,87   | 2,71   | 2,60   | 2,51   | 2,45   | 2,39   | 2,35   |
| 21  | 4,32   | 3,47   | 3,07   | 2,84   | 2,68   | 2,57   | 2,49   | 2,42   | 2,37   | 2,32   |
| 22  | 4,30   | 3,44   | 3,05   | 2,82   | 2,66   | 2,55   | 2,46   | 2,40   | 2,34   | 2,30   |
| 23  | 4,28   | 3,42   | 3,03   | 2,80   | 2,64   | 2,53   | 2,44   | 2,37   | 2,32   | 2,27   |
| 24  | 4,26   | 3,40   | 3,01   | 2,78   | 2,62   | 2,51   | 2,42   | 2,36   | 2,30   | 2,25   |
| 25  | 4,24   | 3,39   | 2,99   | 2,76   | 2,60   | 2,49   | 2,40   | 2,34   | 2,28   | 2,24   |
| 26  | 4,23   | 3,37   | 2,98   | 2,74   | 2,59   | 2,47   | 2,39   | 2,32   | 2,27   | 2,22   |
| 27  | 4,21   | 3,35   | 2,96   | 2,73   | 2,57   | 2,46   | 2,37   | 2,31   | 2,25   | 2,20   |
| 28  | 4,20   | 3,34   | 2,95   | 2,71   | 2,56   | 2,45   | 2,36   | 2,29   | 2,24   | 2,19   |
| 29  | 4,18   | 3,33   | 2,93   | 2,70   | 2,55   | 2,43   | 2,35   | 2,28   | 2,22   | 2,18   |
| 30  | 4,17   | 3,32   | 2,92   | 2,69   | 2,53   | 2,42   | 2,33   | 2,27   | 2,21   | 2,16   |
| 32  | 4,15   | 3,29   | 2,90   | 2,67   | 2,51   | 2,40   | 2,31   | 2,24   | 2,19   | 2,14   |
| 35  | 4,12   | 3,27   | 2,87   | 2,64   | 2,49   | 2,37   | 2,29   | 2,22   | 2,16   | 2,11   |
| 40  | 4,08   | 3,23   | 2,84   | 2,61   | 2,45   | 2,34   | 2,25   | 2,18   | 2,12   | 2,08   |
| 50  | 4,03   | 3,18   | 2,79   | 2,56   | 2,40   | 2,29   | 2,20   | 2,13   | 2,07   | 2,03   |
| 60  | 4,00   | 3,15   | 2,76   | 2,53   | 2,37   | 2,25   | 2,17   | 2,10   | 2,04   | 1,99   |
| 80  | 3,96   | 3,11   | 2,72   | 2,49   | 2,33   | 2,21   | 2,13   | 2,06   | 2,00   | 1,95   |
| 100 | 3,94   | 3,09   | 2,70   | 2,46   | 2,31   | 2,19   | 2,10   | 2,03   | 1,97   | 1,93   |
| 150 | 3,90   | 3,06   | 2,66   | 2,43   | 2,27   | 2,16   | 2,07   | 2,00   | 1,94   | 1,89   |

v2 - Degré de liberté du dénominateur (résidus)



# EXEMPLE DE PFC 2<sup>4</sup>

# Exemple de PFC 2<sup>4</sup>

## 1. Matrice des expériences

**Tableau I:** le domaine d'étude des facteurs

| Symbole        | Variable         | Niveau (-1) | Niveau (0) | Niveau (+1) |
|----------------|------------------|-------------|------------|-------------|
| X <sub>1</sub> | débit            | 650         | 725        | 800         |
| X <sub>2</sub> | Vitesse de coupe | 10          | 18         | 26          |
| X <sub>3</sub> | profondeur       | 0,05        | 0,125      | 0,20        |
| X <sub>4</sub> | Vitesse d'avance | 0,5         | 0,75       | 1           |

**Tableau II:** matrice des expériences

| N <sup>o</sup> essai | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | Y (h) |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| 1                    | -1             | -1             | -1             | -1             | 26,1  |
| 2                    | 1              | -1             | -1             | -1             | 22,2  |
| 3                    | -1             | 1              | -1             | -1             | 10,1  |
| 4                    | 1              | 1              | -1             | -1             | 12,2  |
| 5                    | -1             | -1             | 1              | -1             | 14,2  |
| 6                    | 1              | -1             | 1              | -1             | 12,7  |
| 7                    | -1             | 1              | 1              | -1             | 5,9   |
| 8                    | 1              | 1              | 1              | -1             | 5,6   |
| 9                    | -1             | -1             | -1             | 1              | 23    |
| 10                   | 1              | -1             | -1             | 1              | 20,1  |
| 11                   | -1             | 1              | -1             | 1              | 2,4   |
| 12                   | 1              | 1              | -1             | 1              | 3,7   |
| 13                   | -1             | -1             | 1              | 1              | 11    |
| 14                   | 1              | -1             | 1              | 1              | 13,4  |
| 15                   | -1             | 1              | 1              | 1              | 0,5   |
| 16                   | 1              | 1              | 1              | 1              | 1,7   |
| 17                   | 0              | 0              | 0              | 0              | 11,1  |
| 18                   | 0              | 0              | 0              | 0              | 12,6  |
| 19                   | 0              | 0              | 0              | 0              | 10,4  |
| 20                   | 0              | 0              | 0              | 0              | 11,9  |

# Exemple de PFC 2<sup>4</sup>

## 2. Calcul des coefficients

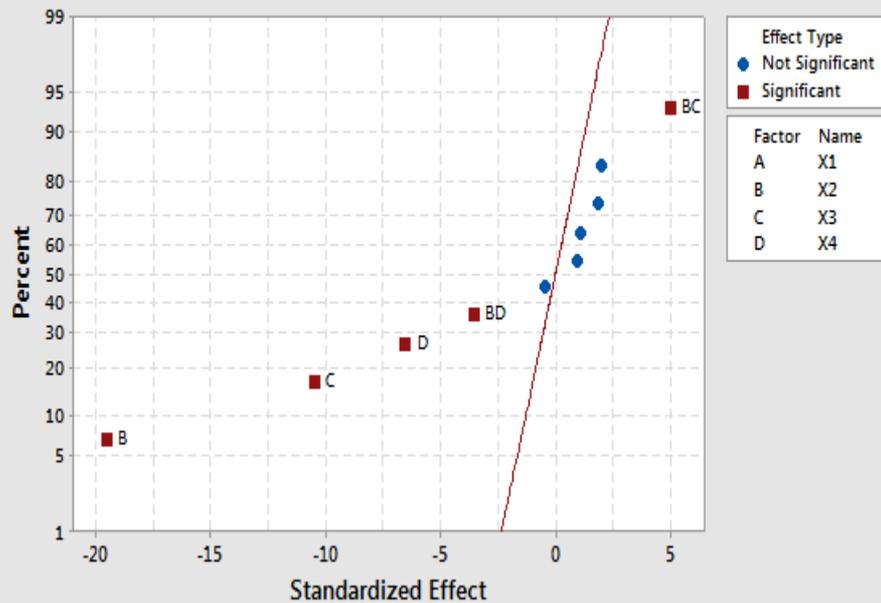
| Term     | Effect  | Coef   | SE Coef | T-Value | P-Value | VIF  |
|----------|---------|--------|---------|---------|---------|------|
| Constant |         | 11,512 | 0,325   | 35,47   | 0,000   |      |
| X1       | -0,275  | -0,137 | 0,325   | -0,42   | 0,683   | 1,00 |
| X2       | -12,650 | -6,325 | 0,325   | -19,49  | 0,000   | 1,00 |
| X3       | -6,775  | -3,388 | 0,325   | -10,44  | 0,000   | 1,00 |
| X4       | -4,225  | -2,112 | 0,325   | -6,51   | 0,000   | 1,00 |
| X1*X2    | 1,200   | 0,600  | 0,325   | 1,85    | 0,102   | 1,00 |
| X1*X3    | 0,725   | 0,362  | 0,325   | 1,12    | 0,296   | 1,00 |
| X1*X4    | 0,625   | 0,313  | 0,325   | 0,96    | 0,364   | 1,00 |
| X2*X3    | 3,250   | 1,625  | 0,325   | 5,01    | 0,001   | 1,00 |
| X2*X4    | -2,300  | -1,150 | 0,325   | -3,54   | 0,008   | 1,00 |
| X3*X4    | 1,275   | 0,638  | 0,325   | 1,96    | 0,085   | 1,00 |
| Ct Pt    |         | -0,012 | 0,726   | -0,02   | 0,987   | 1,00 |

$$Y = 11,512 - 0,137 X1 - 6,325 X2 - 3,388 X3 - 2,112 X4 + 0,600 X1*X2 + 0,362 X1*X3 + 0,313 X1*X4 + 1,625 X2*X3 - 1,150 X2*X4 + 0,638 X3*X4 - 0,012 Ct Pt$$

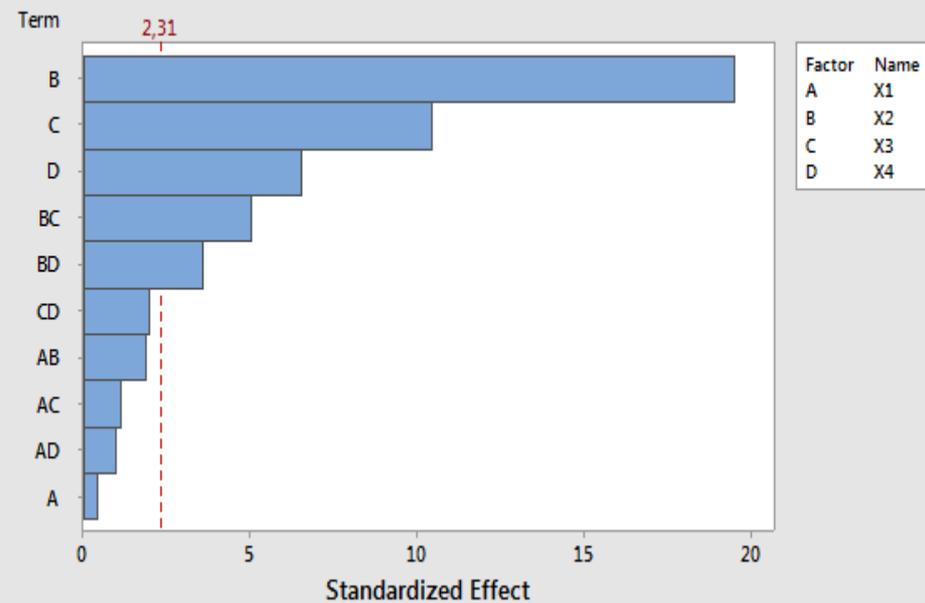
## 2. Validation du modèle

### 3. signification des coefficients

Normal Plot of the Standardized Effects  
(response is Y;  $\alpha = 0,05$ )



Pareto Chart of the Standardized Effects  
(response is Y;  $\alpha = 0,05$ )



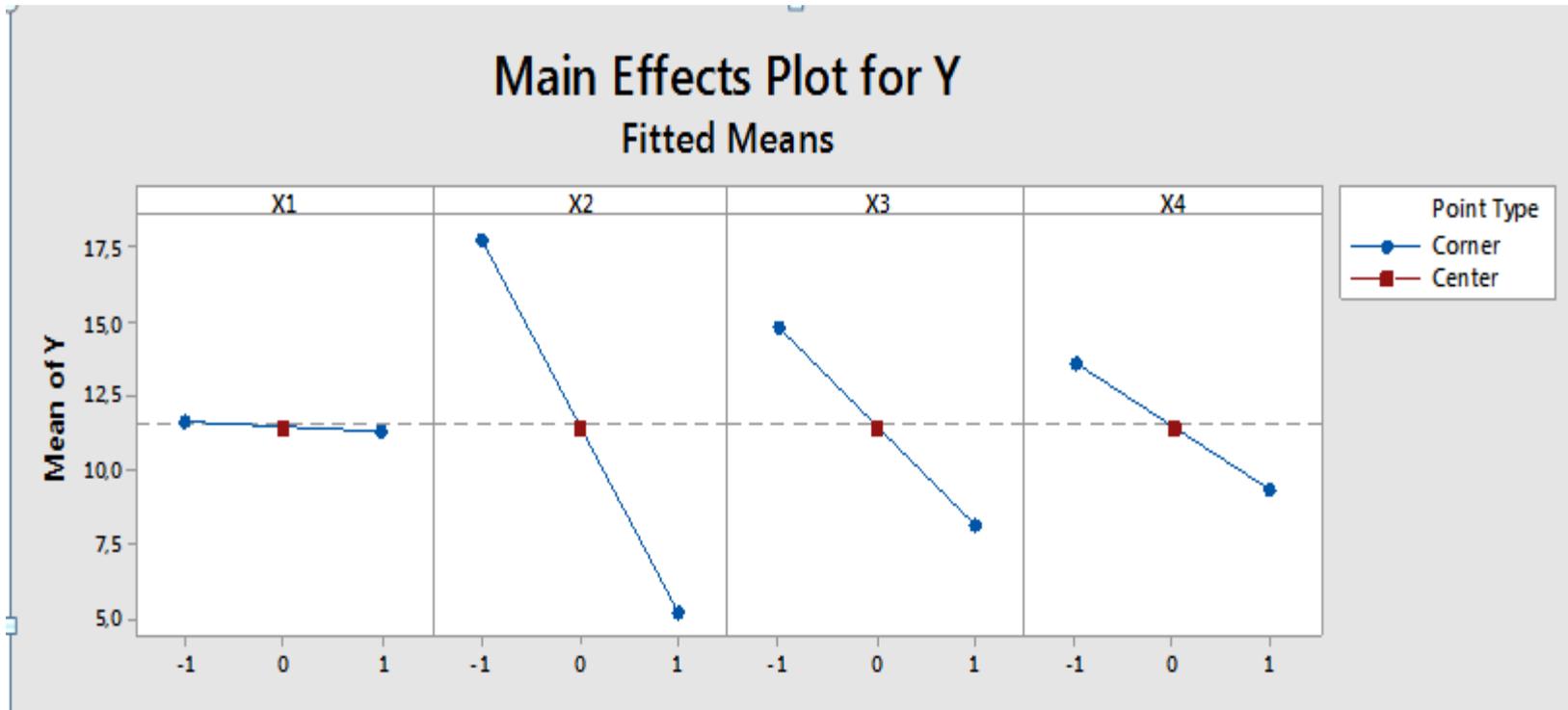
## 2. Validation du modèle

### 4. Analyse des variances

| Source                    | DF        | Adj SS         | Adj MS         | F-Value       | P-Value      |
|---------------------------|-----------|----------------|----------------|---------------|--------------|
| <b>Model</b>              | <b>11</b> | <b>974,736</b> | <b>88,612</b>  | <b>52,58</b>  | <b>0,000</b> |
| <b>Linear</b>             | <b>4</b>  | <b>895,398</b> | <b>223,849</b> | <b>132,82</b> | <b>0,000</b> |
| X1                        | 1         | 0,302          | 0,302          | 0,18          | 0,683        |
| X2                        | 1         | 640,090        | 640,090        | 379,80        | 0,000        |
| X3                        | 1         | 183,603        | 183,603        | 108,94        | 0,000        |
| X4                        | 1         | 71,403         | 71,403         | 42,37         | 0,000        |
| <b>2-Way Interactions</b> | <b>6</b>  | <b>79,338</b>  | <b>13,223</b>  | <b>7,85</b>   | <b>0,005</b> |
| X1*X2                     | 1         | 5,760          | 5,760          | 3,42          | 0,102        |
| X1*X3                     | 1         | 2,103          | 2,103          | 1,25          | 0,296        |
| X1*X4                     | 1         | 1,563          | 1,563          | 0,93          | 0,364        |
| X2*X3                     | 1         | 42,250         | 42,250         | 25,07         | 0,001        |
| X2*X4                     | 1         | 21,160         | 21,160         | 12,56         | 0,008        |
| X3*X4                     | 1         | 6,503          | 6,503          | 3,86          | 0,085        |
| <b>Curvature</b>          | <b>1</b>  | <b>0,000</b>   | <b>0,000</b>   | <b>0,00</b>   | <b>0,987</b> |
| <b>Error</b>              | <b>8</b>  | <b>13,482</b>  | <b>1,685</b>   |               |              |
| Lack-of-Fit               | 5         | 10,742         | 2,148          | 2,35          | 0,256        |
| Pure Error                | 3         | 2,740          | 0,913          |               |              |
| <b>Total</b>              | <b>19</b> | <b>988,218</b> |                |               |              |

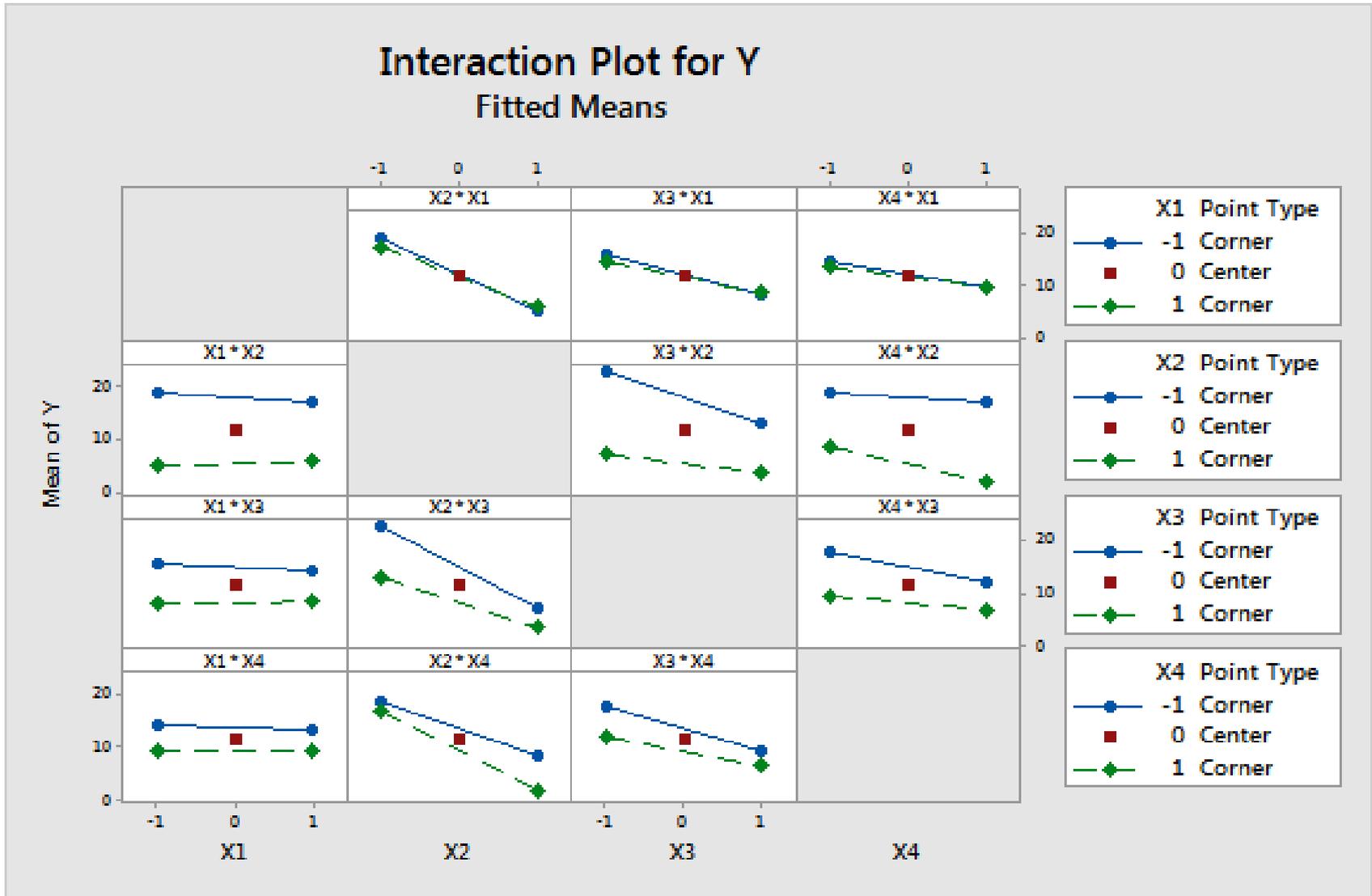
## 2. Validation du modèle

### 5. Effets principaux



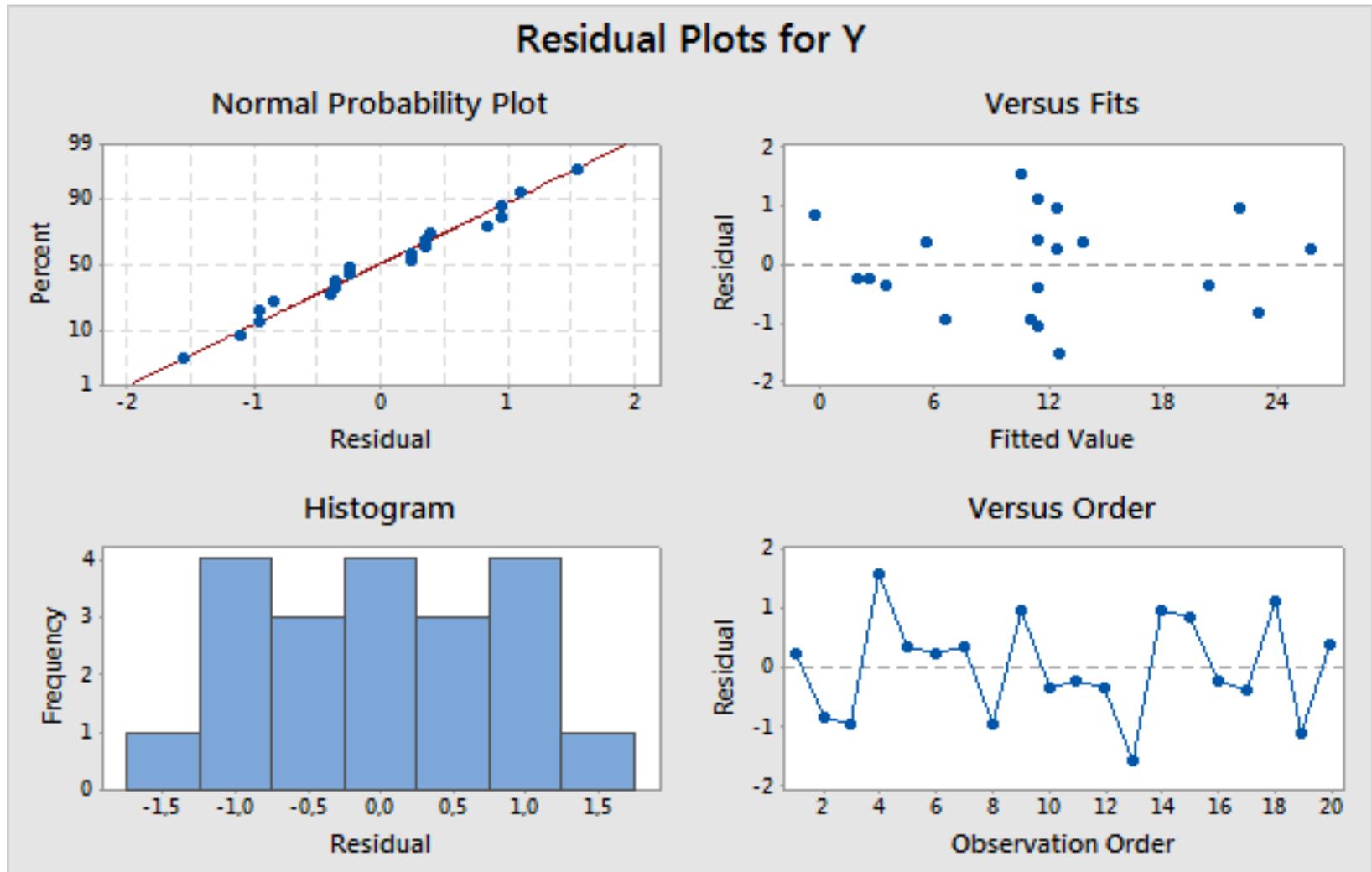
## 2. Validation du modèle

### 6. Interactions



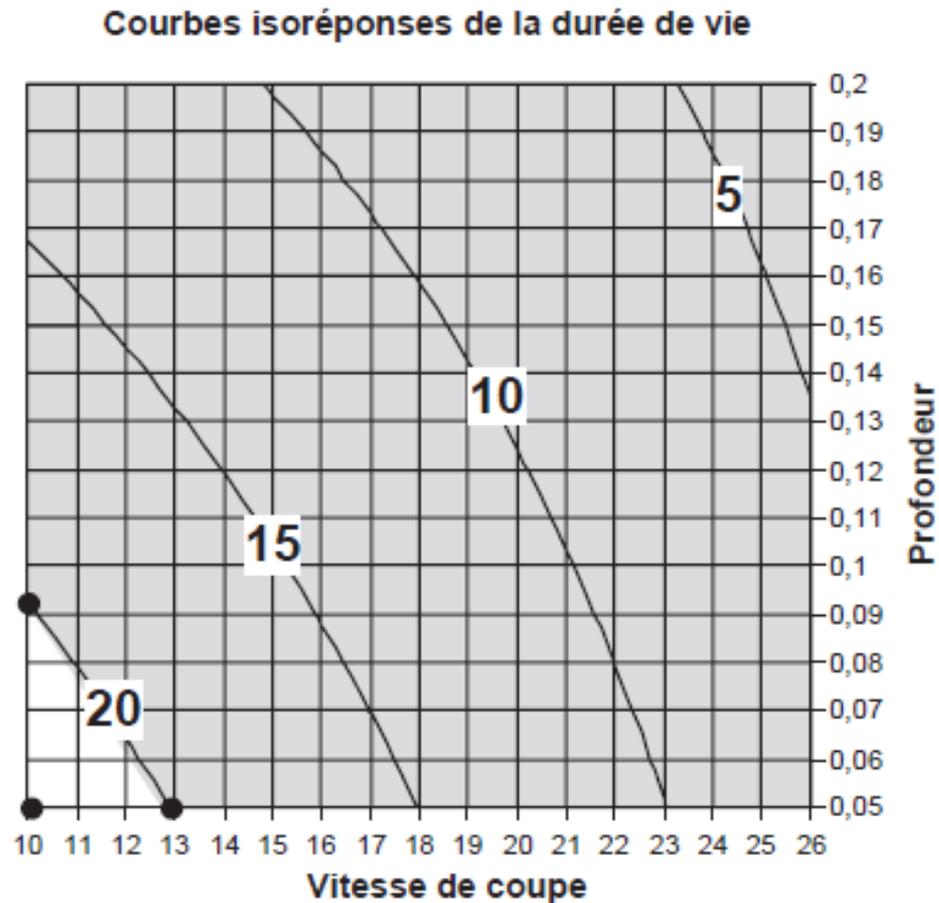
## 2. Validation du modèle

### 7. Residus



## 2. Validation du modèle

### 8. Surface des réponse



**Courbes isoréponses de la durée de vie des outils de coupe** en fonction de la vitesse de coupe et de la profondeur.

Le débit et la vitesse d'avance sont fixés respectivement à 725 et à 0,75.



**FIN**