République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.MIRA-BEJAIA

Faculté de Technologie

Département de Technologie

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Polycopié de cours

Rédigé par

Mr KESSI Ferhat

Année Universitaire 2016/2017

TABLE DE MATIERES

CHAPITRE 2 CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

CHAPITRE 3 : DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

INTRODUCTION

Ce manuscrit est un cours de mécanique du point matériel, destiné aux étudiants de première année ST (Sciences et Technologie). Il constitue le contenu pédagogique de la matière fondamentale intitulée « Physique 1 » enseignée durant le premier semestre de la première année.

Ce cours est conforme au nouveau programme élaboré dans le cadre du système LMD. Il constitue le fruit de plusieurs années d'enseignement et d'une recherche bibliographique riche et variée. Il est également appuyé par de nombreux exemples et exercices d'applications.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit les outils mathématiques nécessaires à l'étude de la mécanique du point matériel, en particulier le calcul vectoriel et le calcul différentiel et intégral.

Le second chapitre est consacré à la cinématique, c'est-à-dire, la description mathématique du mouvement. Après avoir défini le cadre spatio-temporelle de la mécanique de Newton, nous avons introduit les grandeurs cinématiques nécessaires à l'étude du mouvement, en l'occurrence les vecteurs position, vitesse et accélération. Ensuite, nous avons exprimé ces vecteurs dans les différents systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindrico-polaires et sphériques) et étudier quelques mouvements particuliers. Nous avons terminé ce chapitre par l'étude de la notion de changement de référentiels.

Dans le troisième chapitre, nous avons abordé la dynamique, c'est-à-dire, l'étude du mouvement en relation avec ses causes que sont les forces. Après avoir introduit quelques notions fondamentales, telles que la masse et la force, nous avons énoncé les trois lois de Newton et fait un bilan non exhaustif des différentes forces connues. Enfin, nous avons indiqué la démarche à suivre dans l'étude d'un système mécanique à travers l'application du PFD pour différents types de forces. Notre approche est basée sur la notion d'équation et système d'équations différentielles.

Le dernier chapitre constitue une alternative équivalente à l'approche vectorielle de la mécanique de Newton à travers les notions de travail, de puissance et d'énergie avec ses trois variantes : cinétique, potentielle et mécanique. Les théorèmes de l'énergie cinétique et mécanique sont énoncés avec quelques applications.

L'auteur.

CHAPITRE 1

RAPPELS MATHEMATIQUES

1- GENERALITES SUR LES GRANDEURS PHYSIQUES

Une grandeur physique est une quantité qui peut se mesurer et qui se rapporte à un phénomène ou une propriété physique. Elle peut être de différentes natures : scalaire ou vectorielle.

Une grandeur physique peut être fonction d'une ou plusieurs variables. Par exemple, la position d'un corps qui se déplace sur l'axe (OX) est une fonction du temps $x(t)$. Les variables utilisées en physique sont le temps et l'espace (par exemple : les coordonnées cartésiennes x, y et z).

En physique, on utilise beaucoup plus la notion de champ que celle de fonction. On parle alors de champ scalaire ou vectoriel.

2- EQUATIONS AUX DIMENSIONS

2-1. Grandeurs physiques fondamentales

Pratiquement, toutes les grandeurs physiques peuvent être définies à partir de sept grandeurs fondamentales. Ces grandeurs sont : La longueur (L), le temps (T), la masse (M), l'intensité du courant électrique (I), la température thermodynamique (Θ), l'intensité lumineuse (J) et la quantité de matière (N). Elles sont dites également de base.

En mécanique et en électricité, on n'utilisera que les quatre grandeurs fondamentales suivantes : la longueur, la masse, le temps et l'intensité du courant électrique.

2-2. Grandeurs physiques dérivées

Dites aussi secondaires. Elles sont définies à partir des grandeurs fondamentales. Comme exemples, citons les grandeurs suivantes :

La surface = (longueur) * (longueur) ;

La vitesse linéaire = déplacement (longueur) / temps ;

L'accélération linéaire = vitesse / temps = longueur / (temps * temps) ;

La fréquence = 1 / temps ;

La force = (masse) * (accélération) = (masse * vitesse) / temps = (masse * longueur) / (temps * temps) ;

2-3. Dimension d'une grandeur physique

Elle représente la nature de cette grandeur. La dimension d'une grandeur G est notée $[G]$. Les dimensions des grandeurs fondamentales sont notées directement par leurs symboles donnés dans le paragraphe 2-1., par exemple :

[Masse] = M ; [Longueur] = L ; [Temps] = T ; [Intensité du courant électrique] = I

Notons que :

- Lorsqu'on écrit les dimensions d'une grandeur physique, on ne tient pas compte de son caractère scalaire ou vectoriel. Par exemple dans le cas de la force, on écrit $[F]$ et pas $[\vec{F}]$;
- Lorsque la grandeur en question est une grandeur dérivée, on utilise le pluriel, c'est-à-dire, on dit les dimensions de cette grandeur.

2-4. Equations aux dimensions

Elles sont des écritures conventionnelles qui résument la définition des grandeurs dérivées à partir des grandeurs fondamentales. Elles sont établies à partir de lois connues.

On montre que la dimension de toute grandeur dérivée G peut s'écrire comme suit :

$$[G] = M^a L^b T^c I^d \Theta^e J^f N^g$$

où a, b, c, d, e, f et g sont des nombres rationnels.

Si G_1 et G_2 sont deux grandeurs physiques de dimensions $[G_1]$ et $[G_2]$ et a un nombre réel, on a alors :

$$[a] = 1$$

$$[G_1 G_2] = [G_1][G_2]$$

$$\left[\frac{G_1}{G_2}\right] = \frac{[G_1]}{[G_2]}$$

$$[G_1^n] = [G_1]^n$$

Notons que $[G_1 \pm G_2] \neq [G_1] \pm [G_2]$. Si dans une loi physique, on trouve une formule qui s'écrit sous la forme $G_1 \pm G_2$ alors $[G_1] = [G_2]$.

Si dans une loi physique, on trouve des expressions du type $\sin G$, $\cos G$, e^G et $\ln G$ alors la grandeur G est sans dimension ($[G] = 1$).

Pour déterminer les dimensions d'une grandeur physique G, on procède de la manière suivante :

- On cherche une loi physique connue où figure cette grandeur et on calcule ses dimensions ;
- Si dans cette loi se trouve des grandeurs dérivées, alors il faudra faire appel à d'autres lois physiques où apparaissent ces grandeurs et calculer leurs dimensions, ainsi de suite, jusqu'à aboutir à une expression où il y a uniquement des grandeurs fondamentales.

Exemple :

Cherchons les dimensions de la force :

$$F = ma \Rightarrow [F] = [ma] = [m][a] = [m]\left[\frac{V}{t}\right] = \frac{[m][V]}{[t]} = \frac{[m]\left[\frac{l}{t}\right]}{[t]} = \frac{[m][l]}{[t]^2} = \frac{ML}{T^2} = MLT^{-2}$$

$$(a = 1, b = 1, c = -2)$$

On dit que la force est homogène à MLT^{-2}.

2-5. Systèmes d'unités en physique

Dans une expérience, on effectue des mesures. Une mesure consiste à associer aux phénomènes ou propriétés physiques un certain nombre de grandeurs. Le processus de mesure proprement dit consiste à comparer ces grandeurs à des grandeurs de même nature, choisies comme unité (étalon). Par exemples : le mètre est l'unité de la longueur et la seconde est celle du temps. Cette comparaison s'exprime sous forme d'un chiffre. Si l'on peut reporter 10 fois de suite le mètre le long de notre salle de cours, nous dirons qu'elle à dix mètres de longueur. La grandeur "la longueur de la salle" s'exprime par le nombre 10 suivi de l'unité utilisée, soit 10 mètres ou 10 m en abrégé. Il existe plusieurs systèmes d'unités et on peut en définir d'autres.

2-5.1. Système international (SI)

Ce système d'unités cohérent et rationalisé repose sur 07 unités fondamentales associées aux sept grandeurs fondamentales :

La longueur : mètre (m) ; La masse : kilogramme (kg) ; Le temps : seconde (s) ; L'intensité du courant électrique : Ampère (A) ; Température thermodynamique : kelvin (K) ; Intensité lumineuse : candela (cd) ; Quantité de matière : mole (mol).

Ce système est également appelé système MKSA (Mètre, Kilogramme, Seconde, Ampère).

En mécanique et en électricité, on n'aura besoin que des quatre premières unités dont les définitions sont les suivantes :

- La seconde est la durée de 9192631770 périodes de radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.
- Le mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide en une durée égale à $1/c$ seconde, la vitesse de la lumière ayant la valeur exacte suivante :

$$c = 2.99792458 \,.\, 10^8 \; m/s$$

- Le kilogramme est la masse d'un certain cylindre en platine iridié, appelé prototype international du kilogramme, déposé au bureau des poids et mesures.
- L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs rectilignes, parallèles, de longueur infinie et de section négligeable, placés à un mètre l'un de l'autre, produit entre ces conducteurs une force égale à $2 \,.\, 10^{-7} N$ par mètre.

2-5.2. Système CGS

Le symbole CGS signifie (centimètre, gramme, seconde). Historiquement, ce fut le premier système d'unités utilisé. Il est aisé de passé de ce système au système MKSA et inversement par simple conversion d'unités :

$$1m = 10^2 cm \;\; ; \;\; 1kg = 10^3 g$$

$$1\, cm = 10^{-2} m \;\; ; \;\; 1g = 10^{-3} kg$$

Il existe aussi d'autres systèmes comme le système MTS (mètre, tonne, seconde)…etc.

2-5.3. Unité d'une grandeur dérivée

L'unité d'une grandeur dérivée, dite unité dérivée ou secondaire, peut être déterminée en suivant la procédure suivante :

- On écrit l'équation aux dimensions de cette grandeur ;
- On remplace la dimension de chaque grandeur fondamentale par son unité correspondante.

On montre, de la même manière, que l'unité de toute grandeur physique dérivée peut s'écrire sous la forme :

$$kg^a.m^b.s^c.A^d.K^e.cd^f.mol^g$$

où a, b, c, d, e, f et g sont des nombres rationnels.

Exemple :

On a déjà établi que $[F] = MLT^{-2}$, par conséquent l'unité de la force est le $kg.m.s^{-2}$.

Des noms et des préfixes sont attribués aux unités secondaires. Par exemple, l'unité de la force est le Newton de symbole N : $1N = 1\ kg.m.s^{-2}$

L'unité du travail ou de l'énergie est le joule de symbole J. L'unité de la puissance est le Watt de symbole W...etc.

Remarques :

- Il ne faut jamais confondre les dimensions d'une grandeur physiques, qui représentent sa nature et son unité qui est reliée au processus de sa mesure.
- Il existe des grandeurs physiques sans dimensions mais dont on a attribué des unités. Citons comme exemples : l'angle plan dont l'unité est le radian et l'angle solide dont l'unité est le stéradian.

2-6. Applications des équations aux dimensions

L'utilisation des équations aux dimensions s'appelle aussi l'analyse dimensionnelle. On a déjà vu qu'elle permet de déterminer les dimensions et les unités des grandeurs dérivées. Nous citons ci-dessous quelques autres applications de l'analyse dimensionnelle.

2-6.1. Détermination des dimensions et des unités des constantes physiques

En effet, en physique il existe deux types de constantes :

- Des constantes mathématiques sans dimensions qui sont des nombres réels comme $4, \pi$,...etc ;
- Des constantes physiques qui ont des dimensions et des unités comme la constante de la gravitation G, la vitesse de la lumière c...etc.

Exemple : Force de Coulomb

L'expérience montre qu'entre deux charge ponctuelle q_1 et q_2 distantes de r s'exerce une force dont l'intensité est donnée par la loi de Coulomb :

$$F = K\frac{|q_1q_2|}{r^2}$$

Déterminons les dimensions et les unités de la constante physique K. D'après la loi de Coulomb, l'expression de K est donnée par :

$$K = \frac{Fr^2}{|q_1q_2|}$$

L'analyse dimensionnelle de cette expression donne :

$$[K] = \frac{[F][r]^2}{[q_1][q_2]} = \frac{[F][r]^2}{[q_1][q_2]}$$

Sachant que :

$$\begin{cases} [F] = MLT^{-2} \\ [q_1] = [q_2] = IT \end{cases}$$

il s'en suit que :

$$[K] = \frac{MLT^{-2}L^2}{I^2T^2} = ML^3T^{-4}I^{-2}$$

L'unité de K est le $kg.m^3.s^{-4}.A^{-2}$. Sachant que :

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Il s'ensuit que les dimensions et l'unité de ε_0, dite permittivité diélectrique du vide, sont $M^{-1}L^{-3}T^4I^2$ et $kg^{-1}.m^{-3}.s^4.A^2$, respectivement.

2-6.2. Vérification de l'homogénéité d'une loi physique

Une loi physique $A = B$ est dite homogène si et seulement si $[A] = [B]$.

Exemple :

Vérifier que l'expression mgh, où m est une masse, g l'accélération de la pesanteur et h une hauteur est homogène à une énergie E.

$$[E] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = [m][v]^2 = ML^2T^{-2}$$

où v est une vitesse.

$$[mgh] = [m][g][h] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2} = [E]$$

Par conséquent, l'expression mgh est homogène à une énergie. Ainsi, une grandeur physique peut avoir plusieurs expressions (lois) mais leurs dimensions sont le mêmes.

2-6.3. Elaboration de certaines lois physiques

Si on connait (à partir de l'expérience) la dépendance d'une grandeur physique G en fonction d'autres grandeurs $(G_1, G_2, G_3 \dots)$, l'analyse dimensionnelle permet de trouver l'expression mathématique de cette dépendance, à condition qu'elle soit de la forme suivante :

$$G = kG_1^{\alpha} G_2^{\beta} G_3^{\gamma} \dots$$

où k est une constante sans dimension et α, β et γ des nombres rationnels. L'analyse dimensionnelle permet justement de déterminer les valeurs des nombres α, β et γ.

Exemple : Période d'un pendule simple

Intuitivement, on peut penser que la période T d'un pendule simple pourrait dépendre de la longueur l du fil, de la masse m du corps et de l'accélération de la pesanteur g. Etablissons la relation qui décrit cette dépendance.
Expression de T en fonction des autres grandeurs :

$$T = km^{\alpha} l^{\beta} g^{\gamma}$$

L'équation aux dimensions de cette expression est alors :

$$[T] = \left[km^{\alpha} l^{\beta} g^{\gamma}\right] \Rightarrow T = M^{\alpha} L^{\beta} L^{\gamma} T^{-2\gamma} \Rightarrow T = M^{\alpha} L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma}$$

Cette équation doit être homogène, il en résulte les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\gamma = \dfrac{1}{2} \\ \gamma = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La relation devient alors :

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Cette analyse montre que la période du pendule ne dépend pas de sa masse. La valeur de constante k dépend du système d'unités choisi et vaut 2π dans le S.I.

3- CALCUL VECTORIEL

Beaucoup de grandeurs physiques sont représentées par des vecteurs. Il est donc plus que nécessaire d'étudier leurs propriétés. Nous abordons en premier lieu les vecteurs constants et par la suite les champs vectoriels.

3-1. Définition d'un vecteur

Un vecteur est un segment de droite AB. Il est complètement défini si l'on se donne :

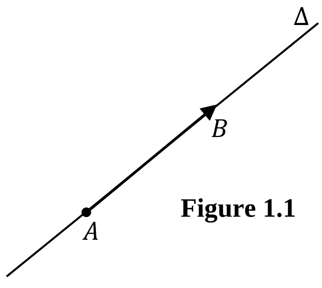

Figure 1.1

- Son origine ou point d'application qui est le point A ;
- Sa direction qui est celle de la droite (Δ), dite aussi support ;
- Son sens qui est symbolisé par la flèche indiquant que ce sens va du point A vers le point B ;
- Son module ou intensité qui est égal à la longueur AB.

Ces caractéristiques sont représentées sur la figure 1.1.

On note symboliquement un vecteur par $\overrightarrow{AB}, \vec{A}, \vec{B}, \vec{U}, \vec{V}, \overrightarrow{OM}$.

Deux vecteurs d'origines différentes sont dits égaux lorsqu'ils ont la même direction, même sens et même module.

Le module ou l'intensité du vecteur $\vec{V}$ est représenté par $\|\vec{V}\|$ ou V, c'est une grandeur positive.

Il existe plusieurs types de vecteurs :

- Vecteur libre : si son origine n'est pas spécifiée ;
- Vecteur glissant : si son point d'application peut être quelconque sur un support ;
- Vecteur lié ou fixe : lorsque son origine est déterminée ;

Un vecteur est dit unitaire si son module est égal à l'unité. On peut alors exprimer tout vecteur $\vec{V}$ sous la forme :

$$\vec{V} = \|\vec{V}\|\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$$

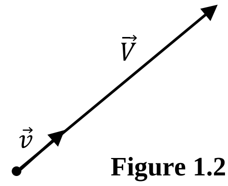

Figure 1.2

où $\vec{v}$ est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}$ (Fig. 1.2).

3-2. Somme vectorielle

Soient $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ deux vecteurs. Leur somme géométrique (dite aussi résultante) est aussi un vecteur :

$$\vec{S} = \vec{R} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$$

On obtient cette somme en utilisant la règle du parallélogramme ou du triangle, comme indiquée sur la figure 1.3.

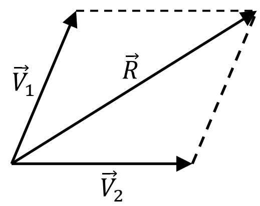

Figure 1.3

La règle du triangle consiste, dans un premier temps, à joindre l'extrémité du premier vecteur avec l'origine du second et ensuite, à joindre l'origine du premier vecteur avec l'extrémité du second.

Le vecteur nulle $\vec{0}$ est le vecteur de module égal à 0 et qui ne possède aucune direction :

$$\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$$

Le vecteur opposé à un vecteur $\vec{V}$ est le vecteur noté $(-\vec{V})$, tel que $\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$. Ce vecteur est de même module et direction que $\vec{V}$ mais de sens opposé. Les vecteurs $\vec{V}$ et $(-\vec{V})$ sont dits directement opposés lorsqu'ils sont portés par le même support. Les deux situations sont représentées sur la figure 1.4.

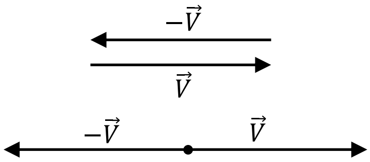

Figure 1.4

La règle de Chasles permet de décomposer n'importe quel vecteur comme la somme de deux ou plusieurs vecteurs en introduisant des points intermédiaires :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

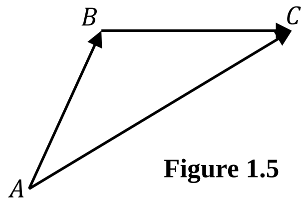

Figure 1.5

La figure 1.5 représente cette somme.

On peut également faire la somme de plusieurs vecteurs. Cette somme peut être calculée de deux manières :

- Sommer les vecteurs deux à deux ;
- Joindre l'extrémité de chaque vecteur par l'origine du vecteur suivant et ensuite, on joint l'origine du premier vecteur avec l'extrémité du dernier.

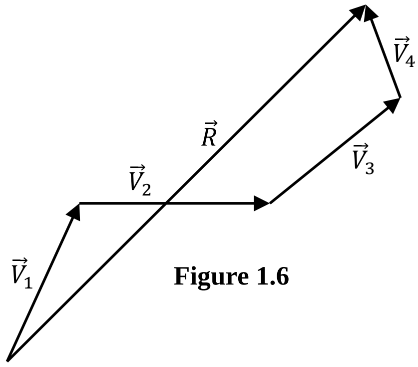

Figure 1.6

La figure 1.6 représente la somme géométrique de quatre vecteurs :

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4$$

3-3. Soustraction vectorielle

La différence ou soustraction entre deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$et $\overrightarrow{V_2}$ se ramène à une somme entre $\overrightarrow{V_1}$ et l'opposé de $\overrightarrow{V_2}$:

$$\vec{D} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} + \left(-\overrightarrow{V_2}\right)$$

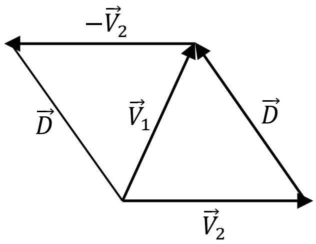

Figure 1.7

La figure 1.7 représente la différence $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$.

3-4. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit $\vec{V}$ un vecteur et λ un nombre réel. Le produit $(\lambda\vec{V})$ est un vecteur de même origine, même direction que $\vec{V}$, mais :

- de module égal à $|\lambda|\|\vec{V}\|$.
- de même sens que $\vec{V}$ si $\lambda > 0$ et de sens opposé si $\lambda < 0$.

La figure 1.8 illustre le produit entre un vecteur $\vec{V}$ et les nombres $(+2)$ et (-2).

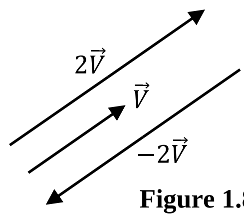

Figure 1.8

La multiplication d'un vecteur par un scalaire permet aussi de définir la notion de deux vecteurs colinéaires : les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$et $\overrightarrow{V_2}$ sont dit colinéaires si $\overrightarrow{V_1} = \lambda\overrightarrow{V_2}$ et on note $\overrightarrow{V_1} \,//\, \overrightarrow{V_2}$. Ils sont dits parallèles si $\lambda > 0$ et antiparallèles si $\lambda < 0$.

3-5. Composantes d'un vecteur

Soit $\vec{V}$ un vecteur dans un plan. En utilisant la règle du parallélogramme, il est facile de montrer que $\vec{V}$ est la somme de deux vecteurs orthogonaux :

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y}$$

Les directions des vecteurs $\vec{V_x}$ et $\vec{V_y}$ définissent deux axes $(X'X)$ et $(Y'Y)$. Ces axes associés au point O (leur intersection dit l'origine), définissent ce qu'on appelle un repère d'espace. Il est noté $\mathcal{R}(OXY)$. Ce repère est dans le plan. Il est facile de définir un repère dans l'espace en introduisant un troisième axe $(Z'Z)$ perpendiculaire simultanément aux deux autres. Dans ce cas, on le note $\mathcal{R}(OXYZ)$ et le vecteur $\vec{V}$ s'écrit :

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{V_z}$$

Soient $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs unitaires portés par les axes $(X'X)$, $(Y'Y)$ et $(Z'Z)$, respectivement. Alors, on peut écrire :

$$\vec{V_x} = V_x\vec{\imath} \ ; \ \vec{V_y} = V_y\vec{\jmath} \ ; \ \vec{V_z} = V_z\vec{k}$$

Il est clair alors que :

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$

Le triplet (V_x, V_y, V_z) est dit composantes cartésiennes du vecteur $\vec{V}$. Le triplet $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dit base cartésienne du repère ou base des coordonnées cartésiennes. Le système de coordonnées ainsi définit est appelée « système des coordonnées cartésiennes ». On le note $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On représente généralement un vecteur $\vec{V}$ par ses composantes et on le note $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ ou $\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$.

La figure 1.9 représente le système des coordonnées cartésiennes ainsi que les composantes du vecteur $\vec{V}$.

Le système de coordonnées qu'on vient de définir est dit orthonormé car :

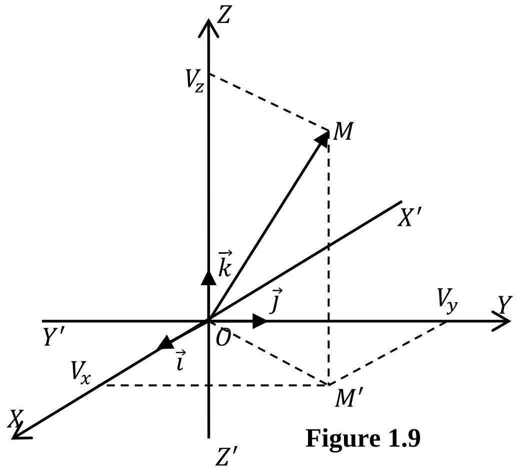

Figure 1.9

$$\begin{cases} \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1 \\ \vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k} \end{cases}$$

Si M est l'extrémité de $\vec{V}$, on peut écrire $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$. On obtient les composantes du vecteur $\vec{V}$ en effectuant des projections orthogonales du point M :

- Sur l'axe $(Z'Z)$, ce qui donne la composante V_z ;
- Dans le plan (OXY), ce qui donne le point M'. Les projections orthogonales de ce dernier sur les axes $(X'X)$ et $(Y'Y)$ donne finalement les composantes V_x et V_y, respectivement.

La notion de composante est essentielle car elle permet de faire des calculs avec les vecteurs. En effet :

$$\vec{U}+\vec{V}=(U_x+V_x)\vec{\imath}+(U_y+V_y)\vec{\jmath}+(U_z+V_z)\vec{k}$$
$$\vec{U}-\vec{V}=(U_x-V_x)\vec{\imath}+(U_y-V_y)\vec{\jmath}+(U_z-V_z)\vec{k}$$
$$\lambda\vec{V}=(\lambda V_x)\vec{\imath}+(\lambda V_y)\vec{\jmath}+(\lambda V_z)\vec{k}$$

Remarques :

- Il faut distinguer la composante d'un vecteur qui est une grandeur scalaire algébrique (positive ou négative) et le module d'un vecteur qui est une grandeur scalaire toujours positive.
- Il existe d'autres systèmes de coordonnées qui seront introduits dans le chapitre suivant (la cinématique).

Exemple :

Soient les deux vecteurs suivants : $\vec{U}=2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+5\vec{k}$; $\vec{V}=-\vec{\imath}+8\vec{\jmath}-7\vec{k}$

Evaluons les opérations suivantes :

$$\vec{U}+\vec{V}=\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-2\vec{k}$$

$$\vec{U}-\vec{V}=3\vec{\imath}-11\vec{\jmath}+12\vec{k}$$

$$-2\vec{V}=-2\vec{\imath}-16\vec{\jmath}+14\vec{k}$$

$$3\vec{U}-2\vec{V}=\left(6\vec{\imath}-9\vec{\jmath}+15\vec{k}\right)-\left(-2\vec{\imath}+16\vec{\jmath}-14\vec{k}\right)=8\vec{\imath}-25\vec{\jmath}+29\vec{k}$$

3-6. Produit scalaire
3-6.1. Définition

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un scalaire définit comme suit :

$$\vec{U}.\vec{V}=\|\vec{U}\|\|\vec{V}\|\cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Comme son nom l'indique, le produit scalaire entre deux vecteurs donne un scalaire, c'est-à-dire, un nombre réel qui peut être positif ($\cos\theta>0$), négatif ($\cos\theta<0$) ou nul ($\cos\theta=0$).

3-6.2. Propriétés

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes :

- Commutativité : $\vec{U}.\vec{V}=\vec{V}.\vec{U}$
- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle (linéarité):
$$\vec{U}.\left(\vec{V}+\vec{W}\right)=\left(\vec{U}.\vec{V}\right)+\left(\vec{U}.\vec{W}\right)$$
- Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire :
$$\lambda\left(\vec{U}.\vec{V}\right)=\left(\lambda\vec{U}\right).\vec{V}=\vec{U}.\left(\lambda\vec{V}\right)$$
$$\left(\lambda_1\vec{U}\right).\left(\lambda_2\vec{V}\right)=(\lambda_1\lambda_2)\left(\vec{U}.\vec{V}\right)$$
- Si $\vec{U}\,//\vec{V}\Rightarrow\theta=0\;ou\;\theta=\pi\Rightarrow\vec{U}.\vec{V}=\pm UV$

3-6.3. Conséquences

- Le produit scalaire permet de définir un critère d'orthogonalité entre deux vecteurs. En effet :

$$\vec{U}.\vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{U} = \vec{0} \; ou \; \vec{V} = \vec{0} \; ou \; \vec{U} \perp \vec{V} \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$$

- Les produits scalaires entre les vecteurs de la base cartésienne orthonormée sont donnés par :

$$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$
$$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0$$

- Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même donne le carré de son module :

$$\vec{U}.\vec{U} = UU = U^2 = \left\|\vec{U}\right\|^2$$

  Ce qui implique :

$$\left\|\vec{U}\right\| = \sqrt{\vec{U}.\vec{U}}$$

- Si $\vec{U} = U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath} + U_z\vec{k}$ et $\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$ sont deux vecteurs, en utilisant les propriétés du produit scalaire, il est aisé d'établir que :

$$\vec{U}.\vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$$

  Ce résultat représente l'expression analytique du produit scalaire dans le système de coordonnées cartésiennes. Le module du vecteur $\vec{V}$ est alors donnée par :

$$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Exemple :

Soient les deux vecteurs suivants :

$$\vec{U} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k} \;\; ; \;\; \vec{V} = -\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 7\vec{k}$$

Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs et leurs modules :

$$\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U} = -2 - 24 - 35 = -61$$

$$\left\|\vec{U}\right\| = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}$$

$$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{1 + 64 + 49} = \sqrt{114}$$

Les composantes des vecteurs unitaires portés par ces deux vecteurs sont données par :

$$\vec{u} = \frac{\vec{U}}{\left\|\vec{U}\right\|} = \frac{2}{\sqrt{38}}\vec{\imath} - \frac{3}{\sqrt{38}}\vec{\jmath} + \frac{5}{\sqrt{38}}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{V}}{\left\|\vec{V}\right\|} = -\frac{1}{\sqrt{114}}\vec{\imath} + \frac{8}{\sqrt{114}}\vec{\jmath} - \frac{7}{\sqrt{114}}\vec{k}$$

3-7. Produit vectoriel

3-7.1. Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un vecteur noté $\vec{U} \wedge \vec{V}$ (on utilise également le symbole $\times$) :

- de module $\|\vec{U}\|\|\vec{V}\||\sin\theta|$, où $\theta = (\vec{U}, \vec{V})$;
- de direction perpendiculaire au plan défini par $\vec{U}$ et $\vec{V}$;
- de sens tel que le trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$ soit direct, c'est-à-dire, qu'il satisfait la règle du tire-bouchon de Maxwell : si on ramène le vecteur $\vec{U}$ sur le vecteur $\vec{V}$, le sens du vecteur $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est celui d'un tire-bouchon vissé dans le même sens (Fig. 1.10).

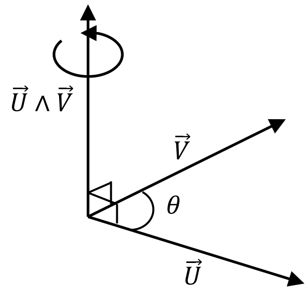

Figure 1.10

3-7.2. Propriétés

Le produit vectoriel possède les propriétés suivantes :

- Il est anticommutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$
- Il n'est pas associatif : $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W} \neq \vec{U} \wedge (\vec{V}\vec{W})$
- Il est distributif par rapport à l'addition vectorielle :

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}) + (\vec{U} \wedge \vec{W})$$

- Il est associatif par rapport à la multiplication par un scalaire :

$$\lambda(\vec{U} \wedge \vec{V}) = (\lambda\vec{U}) \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge (\lambda\vec{V})$$

3-7.3. Conséquences

- Le produit vectoriel permet de vérifier si deux vecteurs sont colinéaires (parallèles ou antiparallèles) :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \vec{U} = \vec{0} \vee \vec{V} = \vec{0} \vee \sin\theta = 0\ (\theta = 0, \pi)(\vec{U} \,//\, \vec{V})$$

- Le produit vectoriel permet de définir le caractère direct d'une base. Une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est directe si et seulement si :

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$$

Ainsi, la base des coordonnées cartésiennes $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est directe si seulement si : $\vec{k} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$

Les produits vectoriels entre les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont donnés par :

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}, \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}, \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

Ce dernier résultat peut être obtenu par permutation circulaire des vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ (Fig. 1.11).

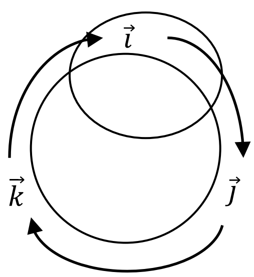

Figure 1.11

- Si $\vec{U} = U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath} + U_z\vec{k}$ et $\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$ sont deux vecteurs, en utilisant les propriétés du produit vectoriel, il est aisé d'établir que :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = (U_yV_z - U_zV_y)\vec{\imath} - (U_xV_z - U_zV_x)\vec{\jmath} + (U_xV_y - U_yV_x)\vec{k}$$

qui représente l'expression analytique du produit vectoriel dans le système de coordonnées cartésiennes. Cette expression peut être obtenue autrement en utilisant la notion de déterminant :

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ U_x & U_y & U_z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}U_y & U_z\\ V_y & V_z\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}U_x & U_z\\ V_x & V_z\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}U_x & U_y\\ V_x & V_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left(U_yV_z-U_zV_y\right)\vec{\imath}-\left(U_xV_z-U_zV_x\right)\vec{\jmath}+\left(U_xV_y-U_yV_x\right)\vec{k}$$

Exemple :

Calculons le produit vectoriel entre les deux vecteurs suivants :

$$\vec{U}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-3\vec{k}\ \ ;\ \ \vec{V}=-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-4\vec{k}$$

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ -2 & 3 & -4\end{vmatrix}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+7\vec{k}$$

3-7.4. Interprétation géométrique

Géométriquement, le module du produit vectoriel entre deux vecteurs est égal à l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs (Fig. 1.12).

$$S=\|\vec{U}\|\|\vec{V}\||\sin\theta|=\|\vec{U}\wedge\vec{V}\|$$

Ce résultat permet de déduire l'aire S' du triangle ABC :

$$S'=\frac{1}{2}\|\vec{U}\wedge\vec{V}\|$$

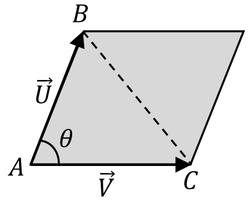

Figure 1.12

3-8. Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{U},\vec{V}$ et $\vec{W}$, pris dans cet ordre, le nombre réel défini par :

$$\vec{U}.\left(\vec{V}\wedge\vec{W}\right)$$

Ce produit est donc un scalaire. Il est nul si :

- L'un des vecteurs est nul ;
- Les trois vecteurs sont dans le même plan (coplanaires) ;
- Deux vecteurs sont colinéaires.

On note $\vec{U}.\left(\vec{V}\wedge\vec{W}\right)$ par $\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)$

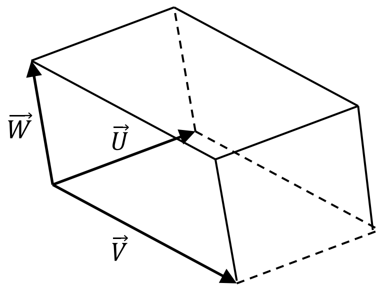

Figure 1.13

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire direct des trois vecteurs $\vec{U},\vec{V}$ et $\vec{W}$, car le produit scalaire est commutatif :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = (\vec{W},\vec{U},\vec{V}) = (\vec{V},\vec{W},\vec{U})$$

Géométriquement, la valeur absolue du produit mixte est égale au volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs (Fig. 1.13).

Exemple :

Calculons le produit mixte des trois vecteurs suivant :

$$\vec{U}(1,-1,2)\ ;\ \vec{V}(-2,1,1)\ ;\ \vec{W}(1,2,-1)$$

Ce produit peut être calculé en deux étapes :

$$(\vec{V}\wedge\vec{W}) = -3\vec{\imath}-\vec{\jmath}-5\vec{k}$$

$$\vec{U}.(\vec{V}\wedge\vec{W}) = -3+1-10 = -12$$

3-9. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{U},\vec{V}$ et $\vec{W}$, pris dans cet ordre, est le vecteur définit par :

$$\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W})$$

D'après la définition du double produit vectoriel, il est clair qu'il est perpendiculaire au vecteurs $\vec{U}$ et $(\vec{V}\wedge\vec{W})$, ce qui implique que ce vecteur est dans le plan formé par les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$:

$$\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W}) = \alpha\vec{V}+\beta\vec{W}\ (\alpha,\beta\in R)$$

On montre alors que :

$$\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W}) = (\vec{U}.\vec{W})\vec{V}-(\vec{U}.\vec{V})\vec{W}\ \ ;\ \ (\alpha = (\vec{U}.\vec{W})\,,\beta = -(\vec{U}.\vec{V})\,)$$

Exemple :

Calculons le double produit vectoriel des trois vecteurs suivant :

$$\vec{U}(1,-1,2)\ ;\ \vec{V}(-2,1,1)\ ;\ \vec{W}(1,2,-1)$$

Ce produit peut être calculé en deux étapes :

$$(\vec{V}\wedge\vec{W}) = -3\vec{\imath}-\vec{\jmath}-5\vec{k}$$

$$\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W}) = 7\vec{\imath}-\vec{\jmath}-4\vec{k}$$

3-10. Dérivée d'un vecteur

3-10.1. Définition

Soit $\vec{V}(t)$ une fonction vectorielle (champ vectoriel) d'une seule variable réelle t. Analytiquement, dans un repère $\mathcal{R}$ muni d'une base cartésienne orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, cela veut dire que l'on se donne trois fonctions scalaires $V_x(t), V_y(t), V_z(t)$ de la variable t qui sont les composantes du vecteur $\vec{V}(t)$:

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{\jmath} + V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k}$$

Notons que toutes les propriétés et opérations définies pour les vecteurs constants sont aussi valables pour les champs vectoriels. En plus, nous pouvons également définir la dérivée de $\vec{V}(t)$ par rapport à la variable t comme suit :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dV_z(t)}{dt}\vec{\jmath}$$

Ce résultat est obtenu par simple application des règles de dérivation usuelles, dans la condition où les vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont constants, c'est-à-dire, indépendants de t :

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{o}$$

On voit bien que la dérivée d'un vecteur est également un vecteur.

La dérivée seconde de $\vec{V}(t)$ est alors donnée par :

$$\frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{V}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2V_x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2V_y(t)}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2V_z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

Si le vecteur $\vec{V}$ est constant (ses composantes sont constantes), sa dérivée est le vecteur nul.

Exemples :

Calculons la première et seconde dérivée des vecteurs suivants :

$$\vec{V}(t) = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{\imath} + (2t+1)\vec{\jmath} + (t^2 + t + 1)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{V}}{dt} = 2\vec{\jmath} + (2t+1)\vec{k} \\ \dfrac{d^2\vec{V}}{dt^2} = 2\vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{V}(t) = \cos(\omega t)\,\vec{\imath} + \sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + e^{-\alpha t}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{V}}{dt} = -\omega\sin(\omega t)\,\vec{\imath} + \omega\cos(\omega t)\,\vec{\jmath} - \alpha e^{-\alpha t}\vec{k} \\ \dfrac{d^2\vec{V}}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{\imath} - \omega^2\sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + \alpha^2 e^{-\alpha t}\vec{k} \end{cases}$$

3-10.2. Propriétés

Si $\vec{U}(t)$ et $\vec{V}(t)$ sont deux champs vectorielles et $f(t)$ est un champ scalaire de la variable réelle t, alors on a les propriétés suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\vec{U} \mp \beta\vec{V}\right) = \alpha\frac{d\vec{U}}{dt} \mp \beta\frac{d\vec{V}}{dt} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{U}.\vec{V}\right) = \frac{d\vec{U}}{dt}.\vec{V} + \vec{U}.\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{U}\times\vec{V}\right) = \frac{d\vec{U}}{dt}\times\vec{V} + \vec{U}\times\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)\vec{V}(t)\right) = \frac{df(t)}{dt}\vec{V}(t) + f(t)\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

Dans le cas où le vecteur $\vec{V}(t)$ a un module constant :

$$\left\|\vec{V}\right\|^2 = \vec{V}.\vec{V} = cste \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{V}.\vec{V}\right) = 0 \Rightarrow 2\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{V} \perp \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Donc, la dérivée d'un vecteur de module constant est un vecteur qui lui est perpendiculaire. Ce résultat est d'une grande importance lors de l'étude des systèmes des coordonnées polaires, cylindriques et sphériques en cinématique car, les bases correspondantes sont des fonctions vectorielles du temps mais de modules constants (vecteurs unitaires).

Exemple :

Soit le vecteur suivant :

$$\vec{V}(t) = \cos t\,\vec{\imath} - \sin t\,\vec{\jmath}$$

Il est clair que le module de ce vecteur est constant (il est égal à 1), en d'autres termes, c'est un vecteur unitaire. Sa dérivée est le vecteur :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\sin t\,\vec{\imath} - \cos t\,\vec{\jmath}$$

On vérifie bien que :

$$\vec{V}(t).\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$$

3-11. Intégration d'un vecteur

3-11.1. Définition

L'intégrale du champ vectoriel $\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{\jmath} + V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k}$ est définie comme suit :

$$\int \vec{V}(t)dt = \left(\int V_x(t)dt\right)\vec{\imath} + \left(\int V_y(t)dt\right)\vec{\jmath} + \left(\int V_z(t)dt\right)\vec{k} + \vec{V}_0$$

Ce résultat est obtenu par simple application des règles d'intégration usuelles, dans la condition où les vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont constants, c'est-à-dire, indépendants de t.

On voit bien que l'intégrale d'un vecteur est également un vecteur.

La constante d'intégration $\vec{V}_0$ est un vecteur constant déterminé à partir des conditions initiales (temps) ou aux limites (espace). Dans ce cas, on parle d'intégrale indéfinie.

Si $\vec{U}(t)$ et $\vec{V}(t)$ sont deux champs vectorielles de la variable réelle t et α une constante réelle, on a les propriétés suivantes :

$$\int [\vec{U}(t) \pm \vec{V}(t)]dt = \int \vec{U}(t)dt \pm \int \vec{V}(t)dt$$

$$\int \alpha\vec{U}(t)dt = \alpha \int \vec{U}(t)dt \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exemple :

Calculons l'intégrale du champ vectoriel $\vec{V}(t) = (t+1)\vec{\imath} + (e^{-t} - 1)\vec{\jmath} + (\sin t)\vec{k}$:

$$\int \vec{V}dt = \int [(t+1)\vec{\imath} + (e^{-t} - 1)\vec{\jmath} + (\sin t)\vec{k}]dt$$

$$= \left(\int (t+1)dt\right)\vec{\imath} + \left(\int (e^{-t} - 1)dt\right)\vec{\jmath} + \left(\int (\sin t)\right)\vec{k} + \vec{V}_0$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\vec{\imath} + (-e^{-t} - t)\vec{\jmath} - (\cos t)\vec{k} + \vec{V}_0$$

Si $\vec{V}(t=0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_0 = \vec{\jmath} + \vec{k}$. On a finalement :

$$\int \vec{V}dt = \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\vec{\imath} + (-e^{-t} - t + 1)\vec{\jmath} - (\cos t + 1)\vec{k}$$

3-11.2. Intégrale définie

Si les bornes d'intégration sont données, on parle alors d'intégrale définie ou intégrale du champ vectoriel $\vec{V}(t)$ sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\int_a^b \vec{V}(t)dt = \left(\int_a^b V_x(t)dt\right)\vec{\imath} + \left(\int_a^b V_y(t)dt\right)\vec{\jmath} + \left(\int_a^b V_z(t)dt\right)\vec{k}$$

Si $\vec{U}(t)$ et $\vec{V}(t)$ sont deux champs vectorielles de la variable réelle t, on a les propriétés suivantes :

$$\int_a^b [\vec{U}(t) \pm \vec{V}(t)]dt = \int_a^b \vec{U}(t)dt \pm \int_a^b \vec{V}(t)dt$$

$$\int_a^b \alpha\vec{U}(t)dt = \alpha\int_a^b \vec{U}(t)dt \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\int_a^b \vec{U}(t)dt = \int_a^c \vec{U}(t)dt + \int_c^b \vec{U}(t)dt \quad (c \in]a, b[)$$

Exemple :

Calculons l'intégrale définie suivante :

$$\int_0^1 [(t+1)\vec{\imath} - (t^2+t)\vec{\jmath} + (t^3)\vec{k}]dt = \left(\int_0^1 (t+1)dt\right)\vec{\imath} - \left(\int_0^1 (t^2+t)dt\right)\vec{\jmath} + \left(\int_0^1 t^3dt\right)\vec{k}$$

$$\left[\frac{1}{2}t^2 + t\right]_0^1 \vec{\imath} - \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 \vec{\jmath} + \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 \vec{k} = \frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{5}{6}\vec{\jmath} + \frac{1}{4}\vec{k}$$

3-12. Opérateurs différentiels vectoriels

3-12.1. Introduction

Ces opérateurs ont été introduits pour rendre compte de certaines caractéristiques et propriétés des champs vectoriels. Ils permettent également une écriture concise de certaines lois de la physique comme les équations de Maxwell.

Toutes les définitions ultérieures seront données dans un repère muni d'une base cartésienne orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

3-12.2. Dérivée partielle et différentielle totale

Lorsque la grandeur physique est un champ scalaire de plusieurs variables $G(x, y, z, t)$, on définit la notion de dérivée partielle, c'est-à-dire, la dérivée par rapport à une seule variable. Cette dernière se calcule en considérant les autres variables comme des constantes, on la note comme suit :

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}, \frac{\partial G}{\partial t}$$

Pour calculer une dérivée partielle, on use des mêmes règles et propriétés que celles utilisées dans le calcul de la dérivée simple.

La différentielle totale de G est définie comme suit :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz + \frac{\partial G}{\partial t}dt$$

Exemple :

Calculons les dérivées partielles et la différentielle totale du champ scalaire suivant :

$$G(x,y,z) = xy^2z^3$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} = y^2z^3 \;\; ; \;\; \frac{\partial G}{\partial y} = 2xyz^3 \;\; ; \;\; \frac{\partial G}{\partial z} = 3xy^2z^2$$
$$df = (y^2z^3)dx + (2xyz^3)dy + (3xy^2z^2)dz$$

Remarque :

On peut éventuellement définir les dérivées partielles d'ordre supérieures. Citons comme exemples, les dérivées partielles d'ordre deux :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}$$

3-12.3. Gradient

Soit $U(x,y,z)$ un champ scalaire. On sait que :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right).\left(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}\right) =$$

$$\overrightarrow{grad}U.\,d\vec{r} = \vec{\nabla}U.\,\overrightarrow{dr}$$

où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla (ou del) défini comme suit :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

L'opérateur gradient s'applique sur un champ scalaire et donne un champ vectoriel

En divisant la relation $dU = \overrightarrow{grad}U.\overrightarrow{dr}$ par dr, on obtient la quantité :

$$\frac{dU}{dr} = \overrightarrow{grad}U.\frac{\overrightarrow{dr}}{dr} = \vec{u}.\,\overrightarrow{grad}U$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction $\vec{r}$, en effet :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dr} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Physiquement, la quantité (dU/dr) représente le taux de variation de U dans la direction $\vec{r} = r\vec{u}$. Ce taux est aussi égal à la projection du gradient du champ scalaire U suivant cette direction. Par conséquent, l'opérateur gradient d'un champ scalaire indique la direction de variation de ce champ.

Le vecteur gradient possède également les propriétés suivantes :

- Il est perpendiculaire aux surfaces de niveau (surface pour lesquelles U est une constante) :
$$dU = \overrightarrow{grad}U.\,d\vec{r} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{grad}U \perp d\vec{r}$$

- Il est orienté dans le sens des valeurs croissantes du champ scalaire U et indique la direction de variation la plus rapide de ce champ.

Dans le système de coordonnées polaires, cylindriques et sphériques, l'opérateur gradient s'écrit comme suit :

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

La circulation du gradient le long d'une courbe orientée $(\mathcal{C})$ (allant de A à B, par exemple) est donnée par :

$$C_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{grad}U.d\vec{r} = \int_{U(A)}^{U(B)} dU = U(A) - U(B)$$

Cette circulation est égale à la variation du champ U et ne dépend pas du chemin parcouru. Cette relation facilite parfois le calcul de la circulation d'un vecteur le long du chemin. Encore faut-il que ce vecteur soit un gradient.
Dans le cas d'un contour fermé, la circulation est nulle :

$$C_{AA} = \oint \overrightarrow{grad}U.d\vec{r} = 0$$

On dit que le champ de vecteur $\overrightarrow{grad}U$ est à circulation conservative ou un champ à gradient et on écrit :

$$\vec{V} = -\overrightarrow{grad}U$$

On dit également que le champ de vecteur $\vec{V}$ dérive d'un champ scalaire U (appelé généralement potentiel).

Exemple :

Calculons le gradient du champ scalaire suivant :

$$U(x,y,z) = 3xy - 2xz + 5yz \Rightarrow \overrightarrow{grad}U = (3y - 2z)\vec{\imath} + (3x + 5z)\vec{\jmath} + (-2x + 5y)\vec{k}$$

3-12.4. Divergence

La divergence, notée div, du champ vectoriel $\vec{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\vec{\imath} + V_y(x,y,z)\vec{\jmath} + V_z(x,y,z)\vec{k}$ est la quantité définie par le produit scalaire entre l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ et le champ de vecteur $\vec{V}$:

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}\right) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

L'opérateur divergence s'applique sur un champ vectoriel et donne un champ scalaire.

Exemple :

Calculons la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (xyz)\vec{\imath} + (x+y+z)\vec{\jmath} + (x^2y^2z^2)\vec{k} \Rightarrow div\vec{V} = yz + 1 + 2x^2y^2z$$

3-12.5. Rotationnel

Le rotationnel, noté $\overrightarrow{rot}$, du champ vectoriel $\vec{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\vec{\imath} + V_y(x,y,z)\vec{\jmath} + V_z(x,y,z)\vec{k}$ est la quantité définie par le produit vectoriel entre l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ et le champ de vecteur $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \wedge \left(V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Le rotationnel d'un champ vectoriel est également un champ vectoriel.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteur $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire U (c'est-à-dire $\vec{V} = -\overrightarrow{grad}U$) est que son rotationnel soit nul (le champ est dit irrotationnel). En effet, on montre que :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = -\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}U\right) = \vec{0}$$

Exemple :

Calculons le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (xy)\vec{\imath} + (xz)\vec{\jmath} + (yz)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & yz \end{vmatrix} = (z-x)\vec{\imath} + (z-x)\vec{k} = (z-x)(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

3-12.6. Laplacien

Le gradient d'un champ scalaire U étant le vecteur :

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \vec{A}$$

On peut calculer sa divergence :

$$div\vec{A} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

On définit ainsi un nouvel opérateur, le Laplacien :

$$\Delta = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On peut également définir le Laplacien d'un champ de vecteurs :

$$\vec{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\vec{\imath} + V_y(x,y,z)\vec{\jmath} + V_z(x,y,z)\vec{k}$$

Dans ce cas, on montre que c'est un champ de vecteurs ayant pour composantes le Laplacien des composantes du champ de vecteurs $\vec{V}$:

$$\Delta\vec{V}(x,y,z) = \Delta V_x(x,y,z)\vec{\imath} + \Delta V_y(x,y,z)\vec{\jmath} + \Delta V_z(x,y,z)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

Exemples :

Calculons le Laplacien des champs scalaire et vectorielle suivants :

$$U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \Delta U = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$\vec{V} = (x^2 + y^3 + z^4)\vec{\imath} + (x^3 + y^4 + z^3)\vec{\jmath} + (x^4 + y^2 + z^3)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Delta\vec{V} = (2 + 6y + 12z^2)\vec{\imath} + (6x + 12y^2 + 6z)\vec{\jmath} + (12x^2 + 2 + 6z)\vec{k}$$

3-12.7. Quelques propriétés des opérateurs différentiels vectoriels

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux champ vectoriels et f et g deux champs scalaires. On montre que :

$$\overrightarrow{grad}(fg) = f\overrightarrow{grad}g + g\overrightarrow{grad}f$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \Delta f$$

$$div\left(\overrightarrow{rot}\vec{V}\right) = 0$$

$$div\left(f\vec{V}\right) = \vec{V}.\overrightarrow{grad}f + f div\vec{V}$$

$$div\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) = \vec{V}.\overrightarrow{rot}\vec{U} - \vec{U}.\overrightarrow{rot}\vec{V}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(f\vec{V}\right) = \overrightarrow{grad}f \wedge \vec{V} + f\overrightarrow{rot}\vec{V}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{V}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{V}\right) - \Delta\vec{V}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \;;\; \frac{\partial}{\partial t}\left(div\vec{V}\right) = div\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right) \;;\; \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{V}\right) = \overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)$$

CHAPITRE 2

CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

1- DEFINITION DE LA CINEMATIQUE

La cinématique est l'étude du mouvement d'un corps en fonction du temps, indépendamment de toute cause pouvant le provoquer ou le modifier. L'objet de la cinématique est la description mathématique du mouvement à partir des notions de position (rayon vecteur), de trajectoire (vecteur déplacement) et des vecteurs vitesse et accélération en fonction du temps, par rapport à un repère d'espace. Dans ce qui suit, nous représenterons les corps matériel en mouvement comme des points géométriques (on néglige leur extension spatiale). Nous reviendrons avec plus de détails sur cette approximation dans le chapitre consacré à la dynamique.

2- NECESSITE D'UN REFERENTIEL

L'étude du mouvement d'un corps matériel implique nécessairement la présence simultanée de ce corps et d'un observateur qui analyse son mouvement. L'observateur est le pilier de l'étude du mouvement car selon sa position par rapport à l'objet en mouvement ses conclusions quant à la nature du mouvement seront très variables. Un mouvement est donc toujours lié à un observateur. On dit qu'il est relatif. Il est donc nécessaire de définir ce que l'on appelle un référentiel ou solide de référence dans lequel l'observateur est fixe. On entend par solide de référence un ensemble de points fixes les uns par rapport aux autres.

Pour caractériser le mouvement de l'objet, l'observateur a ensuite besoin de se repérer dans l'espace qui l'environne. Il lui faut, pour déterminer la nature du mouvement, connaître la position du corps au cours du temps. Pour ce faire ; il choisit :

- Un repère d'espace : défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence (XYZ) qui permettent à l'observateur de juger dans quelle direction se déplace l'objet. Ces axes sont liés au référentiel. En toute logique, l'origine O du repère doit être placée sur l'observateur. Pour un référentiel donné, il existe autant de repères d'espace que de choix d'origine et d'axes possibles, c'est-à-dire, une infinité. Par contre, à un repère d'espace donné ne correspond qu'un seul référentiel, constitué par tout ce qui est fixe par rapport à ce repère.
- Un repère de temps, c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. Cette variable est continue et croissante, ce qui traduit l'irréversibilité du temps. Elle est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre à partir d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire (échelle du temps) fixant une chronologie. L'unité du temps étant la seconde dans le système international. Il est naturel d'adopter comme origine (instant initial), l'instant pour lequel le mouvement de l'objet est connu ; les instants ultérieurs correspondent alors à une évolution vers le futur où le mouvement est encore inconnu. À chaque instant, on associe un nombre réel appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que :

- Le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres ;
- Les longueurs et les durées de temps sont absolues, c'est-à-dire, indépendantes du référentiel choisi pour décrire le mouvement.

Un référentiel est représenté par le symbole $\mathcal{R}$ associé à un repère d'espace et de temps. La notation suivante est d'usage courant : $\mathcal{R}(OXYZt)$ ou $\mathcal{R}(OXYZ)$

3- VECTEUR POSITION DANS LES DIFFERENTS SYSTEMES DE COORDONNEES

3-1. Vecteur position

La position d'un point M dans un référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O en fonction du temps t, est donnée par son vecteur position ou rayon vecteur :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

3-2. Vecteur déplacement

Si le point M se déplace de la position $M(t)$ à la position $M(t')$, pendant un intervalle de temps $\Delta t = t' - t$, alors le vecteur déplacement moyen est défini par :

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t') - \vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t') - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) = \Delta\overrightarrow{OM}$$

Le vecteur déplacement élémentaire s'obtient pour des intervalles de temps infinitésimaux ($\Delta t \to 0$) :

$$d\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \Delta\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)\right] = d\overrightarrow{OM}(t)$$

3-3. Trajectoire

La trajectoire est l'ensemble de toutes les positions successivement occupées par un corps lors de son déplacement (mouvement). Géométriquement, la trajectoire une courbe. La trajectoire peut avoir ou non une réalité matérielle. Elle peut aussi être ouverte ou fermée.

Exemple : trajectoire rectiligne (ligne droite), circulaire…etc.

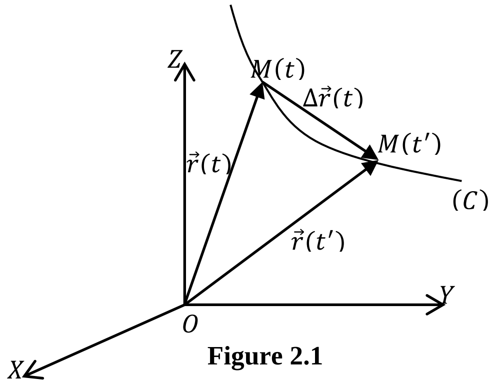

Figure 2.1

Dans la figure 2.1, on a représenté la trajectoire, les vecteurs position et déplacement d'un point M.

3-4. Systèmes de coordonnées

Ils sont utilisés pour la description mathématique du mouvement, ils attribuent des valeurs numériques à la position d'un corps. On les appelle également base de projection. De ce fait, le mouvement d'un corps peut être décrit par une ou plusieurs fonctions du temps (coordonnées), résultat de la projection du vecteur position sur cette base.

Divers systèmes de coordonnées peuvent être utilisés. Un même mouvement peut être décrit dans différents systèmes de coordonnées. Le choix judicieux d'un système de coordonnées peut souvent faciliter la résolution d'un problème. Ce choix repose généralement sur des considérations de symétrie.

Il est important de noter que suivant le choix effectué, la base utilisée, comme outil mathématique, peut être fixe ou mobile dans le référentiel donné. Ceci a des conséquences

importantes sur la dérivation des vecteurs. Pour éviter toute erreur ou confusion, on notera, à chaque fois qu'une étude est entreprise, le choix de la base en précisant si elle est fixe ou pas.
Dans ce qui suit, on considère toujours des bases orthonormées et directes.

3-4.1. Système de coordonnées cartésiennes

Ce système de coordonnées a été déjà introduit dans le chapitre précédent.

Le vecteur position du point M est donnée par :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

On le note également par : $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

Les fonctions $x(t), y(t)$ et $z(t)$ représentent les équations horaires ou paramétriques du mouvement de M.

Le module du vecteur position est :

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

En différentiant le vecteur position, on obtient le vecteur déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dr}(t) = dx(t)\vec{\imath} + dy(t)\vec{\jmath} + dz(t)\vec{k}$$

Le module de ce vecteur donne l'élément de longueur :

$$dl = \sqrt{\big(dx(t)\big)^2 + \big(dy(t)\big)^2 + \big(dz(t)\big)^2}$$

3-4.2. Système de coordonnées polaires

La symétrie polaire consiste à privilégier un point O fixe autour duquel tourne le point M. Si le vecteur position du point M en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$$

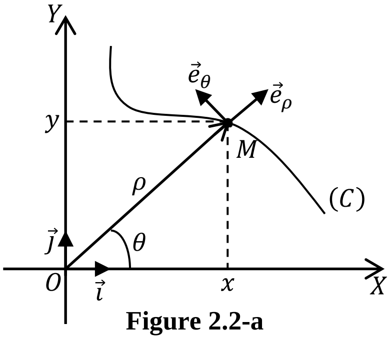

Figure 2.2-a

On peut introduire, dans le plan (OXY), les paramètres ρ et θ, tels que :

$$\rho^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$
$$\theta(t) = \big(OX, \rho(t)\big).$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} x(t) = \rho\,(\mathrm{t})\cos\theta(t) \\ y(t) = \rho\,(\mathrm{t})\sin\theta(t) \end{cases}$$

Par définition, ρ est une distance et est donc positif. On peut noter alors que pour décrire la totalité des points du plan, l'angle θ doit décrire un segment d'amplitude 2π. Habituellement on prend θ dans l'intervalle $[0,2\pi]$.
Ainsi, on peut repérer invariablement le point M par ses coordonnées cartésiennes $\big(x(t), y(t)\big)$ ou par les coordonnées $\big(\rho(t), \theta(t)\big)$ dites polaires ; qui deviennent les équations horaires du mouvement.

Les coordonnées polaires du point M sont schématisées sur la figure 2.2-a.
Le système de coordonnées polaires est donc définit dans le plan, dont les coordonnées sont la distance ρ du point M à l'origine (pôle) et l'angle θ (angle polaire) entre le vecteur position et une direction de référence (axe polaire ; sens positif de l'axe (OX) par exemple).

On peut également exprimer les coordonnées polaires en fonction des coordonnées cartésiennes :

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$
$$\tan\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \Rightarrow \theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)[\pi]$$

Comme pour les coordonnées cartésiennes, on définit une base pour les coordonnées polaires, qu'on note $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, comme suit :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{\rho}\ ;\ \vec{e}_\theta = \vec{e}_\rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

La seconde relation signifie que le vecteur unitaire $\vec{e}_\theta$ est obtenu par rotation d'un angle $(\pi/2)$ dans le plan à partir de $\vec{e}_\rho$.
Il est clair que les vecteurs $\vec{e}_\rho$et $\vec{e}_\theta$ dépendent de la position du point M, en d'autres termes, de l'angle θ. La base est alors dite locale ou mobile.

D'après la figure 2.2-b, les relations de passage entre les bases des coordonnées cartésiennes et polaires sont obtenues par de simples projections :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_\theta \end{cases}$$

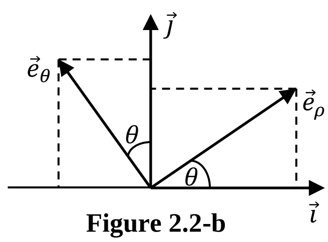

Figure 2.2-b

Dés lors, il nous est facile de calculer les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ par rapport à θ :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta, \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_\rho$$

Il en résulte que les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ par rapport au temps sont données par :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho \quad \left(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

D'après la figure 2-2.a, le vecteur position du point M en coordonnées polaires est donné par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho$$

et son module par :

$$\|\vec{r}(t)\| = \rho(t)$$

Le déplacement élémentaire se calcule par différentiation du vecteur position :

$$\overrightarrow{dr}(t) = d\big(\rho(t)\vec{e}_\rho\big) = d\rho(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)d(\vec{e}_\rho)$$

Or, on sait que :

$$\frac{d(\vec{e}_\rho)}{d\theta} = \vec{e}_\theta \Rightarrow d\big(\vec{e}_\rho\big) = d\theta\vec{e}_\theta$$

D'où :

$$\overrightarrow{dr}(t) = d\big(\rho(t)\vec{e}_\rho\big) = d\rho(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)d\theta\vec{e}_\theta$$

Il s'en suit que l'élément de longueur en coordonnées polaires est donné par :

$$dl = \sqrt{\big(d\rho(t)\big)^2 + (\rho(t)d\theta)^2}$$

3-4.3. Système de coordonnées cylindriques

On généralise les coordonnées polaires par les coordonnées cylindriques en ajoutant le même axe (OZ) que pour les coordonnées cartésiennes. La symétrie cylindrique consiste à privilégier cet axe qui est souvent l'axe de symétrie du problème. Le point M est alors repéré par :

- Les coordonnées polaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$ de sa projection M' dans le plan (OXY) ;
- Sa coordonnée axiale $z(t)$.

Dans ce cas, les équations horaires sont : $\begin{cases}\rho(t)\\ \theta(t)\\ z(t)\end{cases}$

Les coordonnées cylindriques ne sont qu'une extension des coordonnées polaires au cas tridimensionnel. Les coordonnées cylindriques du point M sont schématisées sur la figure 2.3. D'après cette figure :

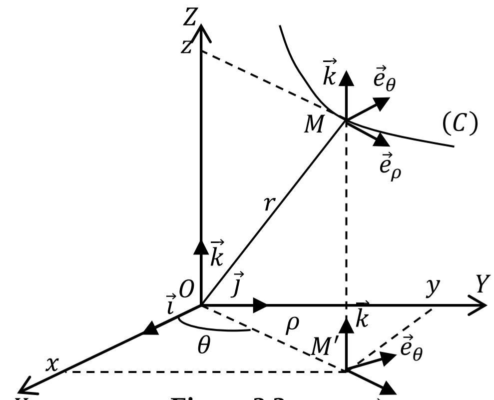

Figure 2.3

- Les relations de passage entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes sont données par :

$$\begin{cases} x = \rho(t)\cos\theta(t) \\ y = \rho(t)\sin\theta(t) \\ z(t) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \\ \theta(t) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right) \\ z(t) \end{cases}$$

- La base des coordonnées cylindriques $\left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k}\right)$ est définie comme suit :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{\rho} \ ; \ \vec{e}_\theta = \vec{e}_\rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \ ; \ \vec{k} = \vec{k}$$

Il est clair que les vecteurs $\vec{e}_\rho$et $\vec{e}_\theta$ dépendent de la position du point M, en d'autres termes, de l'angle θ $\left(\vec{e}_\rho(\theta), \vec{e}_\theta(\theta)\right)$, contrairement au vecteur $\vec{k}$ qui est constant. La base est alors dite locale ou mobile.

D'après les figures 2-2.b et 2.3, les relations de passage entre les bases des coordonnées cartésiennes et cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_\theta \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{k}$ par rapport à θ et leurs dérivées par rapport au temps sont données par :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta, \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_\rho, \quad \frac{d\vec{k}}{d\theta} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho, \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0} \quad \left(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

D'après la figure 2.3, le vecteur position s'écrit comme suit:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho + z(t)\vec{k}$$

et son module par :

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{\rho^2(t) + z^2(t)}$$

En différentiant le vecteur position, on obtient le vecteur déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dr}(t) = d\rho(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)d\theta(t)\vec{e}_\theta + dz(t)\,\vec{k}$$

dont le module donne l'élément de longueur en coordonnées cylindriques :

$$dl = \sqrt{\left(d\rho(t)\right)^2 + (\rho(t)d\theta)^2 + \left(dz(t)\right)^2}$$

3-4.4. Système de coordonnées sphériques

La symétrie sphérique consiste à privilégier un point O et les rotations autour de ce point. Les coordonnées sphériques d'un point M sont :

- Sa distance à l'origine : $r = OM$ $(r \geq 0)$;
- L'angle azimuthal : $\theta = \left(\vec{k}, \overrightarrow{OM}\right)$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$;
- L'angle polaire φ, formé par la projection M' de M dans le plan (OXY) et l'axe (OX) : $\varphi = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'}\right)$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

Les coordonnées sphériques du point M sont schématisées sur la figure 2.4.

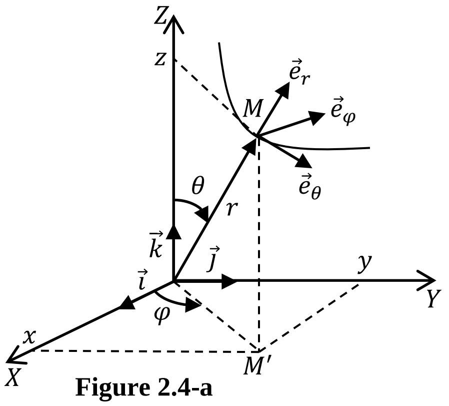

Figure 2.4-a

Dans ce cas, les équations horaires sont :

$$\begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{cases}$$

D'après la figure 2.4-a, les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et sphériques sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = r\,(t)\cos\varphi(t)\sin\theta(t) \\ y(t) = r(t)\sin\varphi(t)\sin\theta(t) \\ z(t) = r(t)\cos\theta(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} \\ \varphi(t) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right) \\ \theta(t) = \cos^{-1}\left(\dfrac{z(t)}{r(t)}\right) \end{cases}$$

La base des coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est définie comme suit :

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Cette base est orthonormée et directe, il s'en suit que $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$.

Il est clair que les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ dépendent de la position du point M, en d'autres termes, des angles θ et φ. La base sphérique est donc dite locale ou mobile.

Les relations de passage entre les bases des coordonnées cartésiennes et sphériques, d'après la figure 2.4-b, sont données par :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = (\sin\theta\cos\varphi)\vec{\imath} + (\sin\theta\sin\varphi)\vec{\jmath} + (\cos\theta)\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi)\vec{\imath} + (\sin\varphi\cos\theta)\vec{\jmath} + (-\sin\theta)\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi)\vec{\imath} + (\cos\varphi)\vec{\jmath} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \vec{\imath} = (\sin\theta\cos\varphi)\vec{e}_r + (\cos\theta\cos\varphi)\vec{e}_\theta + (-\sin\varphi)\vec{e}_\varphi \\ \vec{\jmath} = (\sin\theta\sin\varphi)\vec{e}_r + (\sin\varphi\cos\theta)\vec{e}_\theta + (\cos\varphi)\vec{e}_\varphi \\ \vec{k} = (\cos\theta)\vec{e}_r + (-\sin\theta)\vec{e}_\theta \end{cases}$$

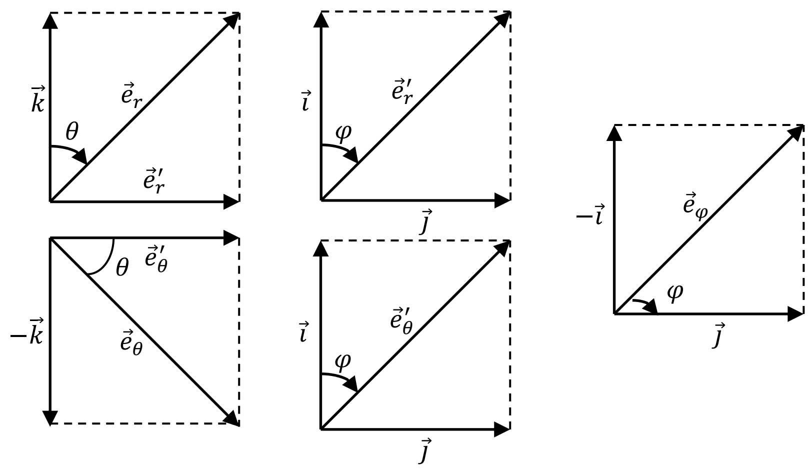

Figure 2.4-b

où $\vec{e}_r'$ et $\vec{e}_\theta'$ sont respectivement les projections des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans la plan (OXY).

Les dérivées des vecteurs de base $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ par rapport à θ et φ et leurs dérivées par rapport au temps sont alors données par

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta, \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r, \qquad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\theta} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi, \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} = \cos\varphi\,\vec{e}_r, \qquad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}(t)\sin\theta(t)\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\theta}(t)\vec{e}_r + \dot{\varphi}(t)\cos\theta(t)\,\vec{e}_\varphi,$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(t)[\sin\theta(t)\,\vec{e}_r + \cos\theta(t)\,\vec{e}_\theta]$$

D'après la figure 2.4, le vecteur position s'écrit comme suit:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r$$

et son module par :

$$\|\vec{r}(t)\| = r(t)$$

En différentiant le vecteur position, on obtient le vecteur déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dr}(t) = dr(t)\vec{e}_r + r(t)d\theta(t)\vec{e}_\theta + r(t)\sin\theta(t)\,d\varphi(t)\vec{e}_\varphi$$

dont le module donne l'élément de longueur en coordonnées sphériques :

$$\left\|\overrightarrow{dr}(t)\right\| = \sqrt{[dr(t)]^2 + [r(t)d\theta(t)]^2 + [r(t)\sin\theta(t)\,d\varphi(t)]^2}$$

3-4.5. Système de coordonnées curvilignes

Le terme curviligne signifie ligne courbée ou tout simplement courbe. Ce système est dit également système de coordonnées intrinsèques.

Si la trajectoire d'un point M est connue on peut :

- L'orienter dans un sens arbitraire ;
- Choisir un point origine M_0 fixe sur cette trajectoire ;
- Choisir une unité graphique.

La valeur algébrique de l'arc $(\widehat{M_0M})$ est l'abscisse curviligne $s(t)$ du point M à un instant t (Fig. 2.5-a).

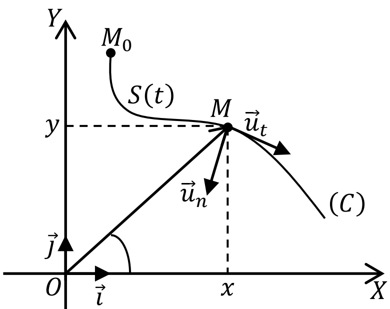

Figure 2.5-a

Exemple: Sur une carte routière, les distances sont déterminées à partir des abscisses curvilignes. L'origine est le point kilométrique zéro et l'unité est le kilomètre.

Comme pour les autres systèmes, on peut définir également un repère curviligne (fig. 2.5-a) formé :

- d'un axe tangentiel (MT) muni du vecteur unitaire tangent $\vec{u}_t$ en M et orienté dans le sens du mouvement ;
- d'un axe normal (MN) muni du vecteur unitaire $\vec{u}_n$ perpendiculaire à $\vec{u}_t$ et orienté vers le côté concave de la trajectoire.

Le vecteur $\vec{u}_t$ étant unitaire (de module égal à 1), on a :

$$\vec{u}_t.\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \vec{0}$$

On en déduit que :

$$\vec{u}_t \perp \frac{d\vec{u}_t}{dt_t}$$

Donc le vecteur $\vec{u}_n$ est colinéaire à $\left(\frac{d\vec{u}_t}{\vec{u}_t}\right)$.

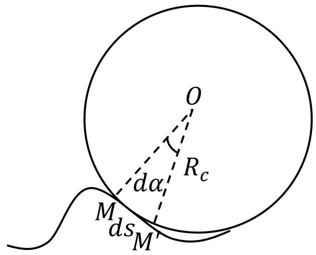

Figure 2.5-b

Soit un cercle tangent à la trajectoire en M de centre O et de rayon R_c.
Si M et M' sont deux points très proches, on a d'après la figure 2.5-b :

$$\widehat{MM'} = R_c d\alpha = ds$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{d\vec{u}_t}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds}$$

Sachant que :

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\alpha} = \vec{u}_n$$

on obtient :

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{1}{R_c}\vec{u}_n$$

où :

$$\frac{1}{R_c} = \frac{d\alpha}{ds} = \left\|\frac{d\vec{u}_t}{ds}\right\|$$

La quantité R_c (qu'on note également ρ ou ρ_c) est appelée rayon de courbure de la trajectoire au point M.
Le repère $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$ est un repère local défini au point M. C'est le repère de Frénet – Serret. C'est un repère intrinsèque qui ne dépend que de la trajectoire et des caractéristiques cinématiques du mouvement.

Remarques :

- Le plan $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$ est dit plan tangent ou osculateur.
- Si la trajectoire est suffisamment régulière, il y a toujours un cercle et un seul qui lui est tangent; R_c est alors son rayon.

4- VECTEURS VITESSE ET ACCELERATION DANS LES DIFFERENTS SYSTEMES DE COORDONNEES

4-1. Vecteur vitesse

La vitesse est une grandeur vectorielle qui, à chaque instant, caractérise les variations du vecteur position d'un corps. On distingue la vitesse moyenne et la vitesse instantanée.

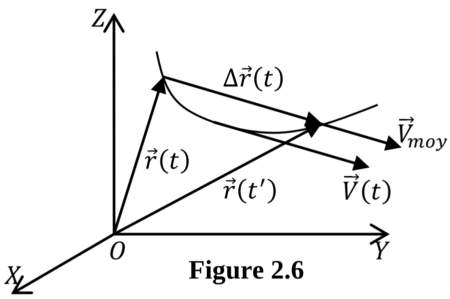

Figure 2.6

Si $\vec{r}(t)$ est la position d'un point M à un instant t et $\vec{r}(t')$ sa position à un instant t', la vitesse moyenne (Fig. 2.6), dans l'intervalle de temps $\Delta t = t' - t$, est définie par :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Comme pour le déplacement élémentaire, la vitesse instantanée (voir figure 2.6) est obtenue pour des intervalles de temps infinitésimaux ($\Delta t \to 0$) :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

Le vecteur vitesse instantanée est donc la dérivée première, par rapport au temps, du vecteur position. Ce vecteur est tangent à la trajectoire et il est orienté dans le sens du mouvement. L'unité de la vitesse est le mètre par seconde (m/s) dans le SI.

Le diagramme des vitesses est la représentation graphique des composantes du vecteur vitesse instantanée en fonction du temps.

4-2. Vecteur accélération

Le vecteur accélération décrit les variations du vecteur vitesse d'un corps. Comme pour la vitesse, on distingue l'accélération moyenne et l'accélération instantanée.

Si $\vec{v}(t)$ est la vitesse d'un point M à un instant t et $\vec{v}(t')$ sa vitesse à un instant t', l'accélération moyenne (Fig. 2.7), dans l'intervalle de temps $\Delta t = t' - t$, est définie par :

$$\vec{a}_{moy}(\vec{\gamma}_{moy}) = \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

De la même manière, que la vitesse instantanée, l'accélération instantanée (Fig. 2.7) est définie par :

$$\vec{a}(t) = \vec{\gamma}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Le vecteur accélération est donc la dérivée première du vecteur vitesse ou seconde du vecteur position par rapport au temps. Il est toujours orienté vers le côté concave de la trajectoire. L'unité de l'accélération est le mètre par seconde au carré (m/s^2) dans le SI.

Une augmentation de vitesse (accélération) ainsi qu'une diminution de vitesse (décélération) sont appelées accélération positive ou négative respectivement.

Les diagrammes des accélérations est la représentation graphique des composantes du vecteur vitesse instantanée en fonction du temps.

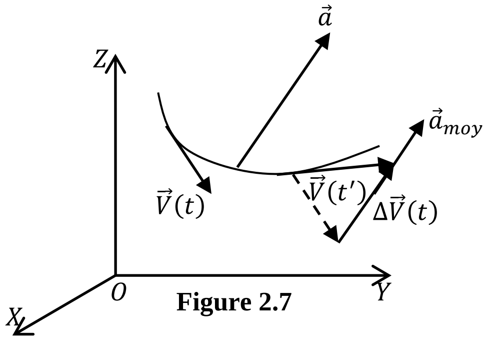

Figure 2.7

Remarques :

- Les vecteurs cinématiques (position, vitesse et accélération) permettent de comprendre la nature du mouvement et de prévoir ces différentes phases. Pour ce faire, on utilise le produit scalaire entre ces deux vecteurs :
    - a- Si $\vec{v}.\vec{a} > 0$, alors le mouvement est dit accéléré ;
    - b- Si $\vec{v}.\vec{a} < 0$, alors le mouvement est dit décéléré (retardé) ;

c- Si $\vec{v}.\vec{a} = 0$, alors le mouvement dit uniforme.

- Si on connait le vecteur accélération, on peut obtenir les vecteurs vitesse et position par intégration :

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{C}_1$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \vec{C}_2$$

où les vecteurs $\vec{C}_1$ et $\vec{C}_2$ sont des constantes d'intégration, qu'on détermine en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{r}(t = t_0) \\ \vec{v}_0 = \vec{v}(t = t_0) \end{cases}$$

où t_0 est un temps où la position et la vitesse du point M sont connues. Généralement, c'est l'instant initial (début du mouvement) qu'on prend égal à zéro.

- Les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération peuvent être positives ou négatives (grandeurs algébriques), contrairement à leurs modules qui sont des nombres réels strictement positifs.

4-3. Vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées cartésiennes

Le vecteur vitesse moyenne est donné par :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = v_{x,moy}\vec{\imath} + v_{y,moy}\vec{\jmath} + v_{z,moy}\vec{k}$$

$$\|\vec{v}_{moy}\| = \sqrt{v_{x,moy}^2 + v_{y,moy}^2 + v_{z,moy}^2}$$

où :

$$\begin{cases} v_{x,moy} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_{y,moy} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \\ v_{z,moy} = \dfrac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases}$$

Le vecteur vitesse instantanée et son module sont donnés par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath} + v_z(t)\vec{k}$$

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \\ v_z(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t) \end{cases}$$

Le vecteur accélération moyenne et son module sont donnés par :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = a_{x,moy}\vec{\imath} + a_{y,moy}\vec{\jmath} + a_{z,moy}\vec{k}$$

$$\|\vec{a}_{moy}\| = \sqrt{a_{x,moy}^2 + a_{y,moy}^2 + a_{z,moy}^2}$$

$$\begin{cases} a_{x,moy} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = \dfrac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \\ a_{y,moy} = \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t} = \dfrac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} \\ a_{z,moy} = \dfrac{\Delta v_z}{\Delta t} = \dfrac{v_z(t+\Delta t) - v_z(t)}{\Delta t} \end{cases}$$

Le vecteur accélération instantanée et son module sont donnés par :

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\imath} + a_y(t)\vec{\jmath} + a_z(t)\vec{k} &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k} \\ &= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k} \end{aligned}$$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = \dot{v_x}(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = \dot{v_y}(t) = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) \\ a_z(t) = \dfrac{dv_z(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t) \end{cases}$$

4-4. Vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées polaires

En dérivant par rapport au temps le vecteur position, en tenant compte des dérivées des vecteurs de base $\vec{e}_\rho$et $\vec{e}_\theta$ par rapport au temps, il est aisé d'établir que le vecteur vitesse est donné par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{e}_\rho + \rho(t)\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta = v_\rho(t)\vec{e}_\rho + v_\theta(t)\vec{e}_\theta$$

où le terme $v_\rho(t) = \dot{\rho}(t)$ représente la vitesse radiale et le terme $v_\theta(t) = \rho(t)\dot{\theta}(t)$ représente la vitesse orthoradiale. Le module du vecteur vitesse est alors donné par :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2(t) + \rho^2(t)\dot{\theta}^2(t)}$$

De même, le vecteur accélération (dérivée du vecteur vitesse) s'écrit comme suit :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)\right)\vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)\right)\vec{e}_\theta = a_\rho(t)\vec{e}_\rho + a_\theta(t)\vec{e}_\theta$$

où le terme $a_\rho = \ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)$ représente l'accélération radiale et le terme $a_\theta(t) = 2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)$ représente l'accélération orthoradiale. Le module du vecteur accélération est alors donné par :

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_\rho^2(t) + a_\theta^2(t)} = \sqrt{\left[\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)\right]^2 + \left[2\rho(t)\theta(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)\right]^2}$$

4-5. Vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées cylindriques

En dérivant par rapport au temps le vecteur position, en tenant compte des dérivées des vecteurs de base $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{k}$ par rapport au temps, il est aisé d'établir que le vecteur vitesse est donné par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta + \dot{z}(t)\vec{k}$$
$$= v_\rho(t)\vec{e}_\rho + v_\theta(t)\vec{e}_\theta + v_z(t)\vec{k}$$

où le terme $v_\rho(t) = \dot{\rho}(t)$ représente la vitesse radiale, le terme $v_\theta(t) = \rho(t)\dot{\theta}(t)$ représente la vitesse orthoradiale et le terme $v_z(t) = \dot{z}(t)$ la vitesse axiale. Le module du vecteur vitesse est alors donné par :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2(t) + v_\theta^2(t) + v_z^2(t)} = \sqrt{\left(\rho(\dot{t})\right)^2 + \left(\rho(t)\dot{\theta}(t)\right)^2 + \left(\dot{z}(t)\right)^2}$$

De même, le vecteur accélération (dérivée du vecteur vitesse) s'écrit comme suit :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left[\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\left[\dot{\theta}(t)\right]^2\right]\vec{e}_\rho + \left[\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t)\right]\vec{e}_\theta + \ddot{z}(t)\vec{k}$$
$$= a_\rho(t)\vec{e}_\rho + a_\theta(t)\vec{e}_\theta + a_z(t)\vec{k}$$

où le terme $a_\rho(t) = \ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)$ représente l'accélération radiale, le terme $a_\theta(t) = 2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)$ représente l'accélération orthoradiale et le terme $a_z(t) = \ddot{z}(t)$ représente l'accélération axiale. Le module du vecteur accélération est alors donné par :

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_\rho^2(t) + a_\theta^2(t) + a_z^2(t)} = \sqrt{\left(\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)\right)^2 + \left(2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)\right)^2 + \left(\ddot{z}(t)\right)^2}$$

4-6. Vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées sphériques

En dérivant par rapport au temps le vecteur position, en tenant compte des dérivées des vecteurs de base $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ par rapport au temps, il est aisé d'établir que le vecteur vitesse est donné par :

$$\vec{v}(t) = v_r(t)\vec{e}_r + v_\theta(t)\vec{e}_\theta + v_\varphi(t)\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} v_r(t) = \dfrac{dr(t)}{dt} = \dot{r}(t) \\ v_\theta(t) = r(t)\dfrac{d\theta(t)}{dt} = r(t)\dot{\theta}(t) \\ v_\varphi(t) = r(t)\,sin\,\theta(t)\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = r(t)\,sin\,\theta(t)\,\dot{\varphi}(t) \end{cases}$$

où le terme $v_r(t)$ représente la vitesse radiale, le terme $v_\theta(t) = \rho(t)\dot{\theta}(t)$ représente la vitesse orthoradiale et le terme v_φ la vitesse azimutale. Le module du vecteur vitesse est alors donné par :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2(t) + v_\theta^2(t) + v_z^2(t)} = \sqrt{\left(\dot{r}(t)\right)^2 + \left(r(t)\dot{\theta}(t)\right)^2 + \left(r(t)\,sin\,\theta(t)\,\dot{\varphi}(t)\right)^2}$$

De même, le vecteur accélération (dérivée du vecteur vitesse) s'écrit comme suit :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = a_r(t)\vec{e}_r + a_\theta(t)\vec{e}_\theta + a_\varphi(t)\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} a_r(t) = \ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}(t) - r(t)\dot{\varphi}^2(t)sin^2\theta(t) \\ a_\theta(t) = r(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) - r(t)\dot{\varphi}^2(t)\,sin\,\theta(t)\,cos\,\theta(t) \\ a_\varphi(t) = r(t)\ddot{\varphi}(t)\,sin\,\theta(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t)\,sin\,\theta(t) + 2r(t)\dot{\varphi}(t)\dot{\theta}(t)\,cos\,\theta(t) \end{cases}$$

où le terme $a_\rho(t)$ représente l'accélération radiale, le terme $a_\theta(t)$ représente l'accélération orthoradiale et le terme $a_z(t)$ représente l'accélération azimutale. Le module du vecteur accélération est alors donné par :

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_\rho^2(t) + a_\theta^2(t) + a_\varphi^2(t)}$$

4-7. Vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées intrinsèques

On définit la vitesse curviligne (intrinsèque) par la relation :

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Comme le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, il s'écrit dans le repère de Frénet :

$$\vec{v}(t) = v(t)\,\vec{u}_t$$

où $v(t)$ est le module de la vitesse (qu'on a noté $\|\vec{v}(t)\|$). Dérivons cette expression par rapport au temps pour trouver l'accélération:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_t + v(t)\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$$

Notons que :

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds}\frac{ds(t)}{dt}$$

Rappelons que :

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t)$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{1}{R_c}\vec{u}_n$$

Il en résulte l'expression explicite suivante de l'accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2(t)}{R_c}\vec{u}_n = a_t(t)\vec{u}_t + a_n(t)\vec{u}_n$$

$$\begin{cases} a_t(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} \\ a_n(t) = \dfrac{v^2(t)}{R_c} \end{cases}$$

où a_t est la composante tangentielle de l'accélération et a_n sa composante normale.
Dans la figure 2.8, on a représenté les vecteurs vitesse et accélération d'un point M et leurs composantes dans la base intrinsèque.

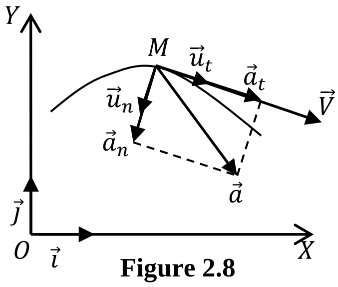

Figure 2.8

Interprétation:

- La composante tangentielle $a_t(t)$ est liée au changement du module de la vitesse, c'est-à-dire, si le point M se déplace plus ou moins vite.
- • Si cette accélération est nulle, le mouvement est uniforme ;
- • Si cette accélération est constante, le mouvement est uniformément varié. Il est accéléré si $a_t > 0$ et décéléré si $a_t < 0$.
- La présence de R_c dans l'expression de l'accélération normale indique que la trajectoire est courbée. En conséquence, cette accélération mesure la variation de la direction du vecteur vitesse.
- • Si le mouvement est rectiligne (trajectoire sous forme d'une ligne droite), il n'y a pas de variation de la direction du vecteur vitesse. Dans ce cas, le rayon de courbure R_c de la trajectoire est infini et de ce fait $a_n = 0$;
- • Si le rayon de courbure R_c est constant, le mouvement est circulaire

Remarques :

- Il est évident que si l'on connait le rayon de courbure de la trajectoire ; l'accélération normale est donnée par la relation :

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R_c}$$

Par contre, si ce rayon n'est pas donné à priori, il faut tout d'abord calculer le vecteur accélération et son module (en coordonnées cartésiennes par exemple) et ensuite calculer l'accélération normale via la relation :

$$a^2(t) = a_t^2(t) + a_n^2(t) \Rightarrow a_n(t) = \sqrt{a^2(t) - a_t^2(t)}$$

- Les modules des différentes grandeurs vectorielles cinématiques sont les mêmes dans toutes les bases. Seules les composantes de ces vecteurs changent d'un système à un autre.

- Il convient de noter que nous avons ainsi exprimé les mêmes vecteurs (position, vitesse, accélération) dans des bases différentes. La base cartésienne est celle du référentiel $\mathcal{R}$, et les autres nous ont permis d'introduire les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.
  On distinguera donc soigneusement le référentiel $\mathcal{R}$, qui est une donnée fondamentale pour définir les grandeurs cinématiques (position, vitesse et accélération) puisqu'il représente l'observateur, de la base, parfois mobile, qui est une donnée technique nécessaire à l'exploitation d'une égalité vectorielle et donc secondaire.
  Par exemple, l'expression de la vitesse dans le repère de Frénet – Serret est $\vec{v} = \left({ds}/{dt}\,\vec{u}_t\right)$. Cette relation signifie que dans la base $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n, \vec{u}_b)$, la vitesse a pour composantes $\left({ds}/{dt}, 0{,}0\right)$. Cependant, il faut comprendre que cette vitesse n'est pas celle mesurée par rapport au repère de Frénet – Serret ; en effet celle-ci serait nulle puisque ce repère suit le point M dans son mouvement. Donc, la vitesse $\vec{v}$ n'est définie que par rapport à un référentiel, c'est-à-dire un système d'axes lié à un observateur. Une fois le vecteur vitesse est défini, on peut l'exprimer dans n'importe quel repère géométrique. Celui-ci, contrairement au référentiel, n'intervient pas dans la définition du mouvement.

5- MOUVEMENTS PARTICULIERS

Dans cette section, nous allons étudier quelques mouvements particuliers.

5-1. Mouvement rectiligne

5-1.1. Cas général

Le mouvement rectiligne est un mouvement dont la trajectoire est une ligne droite. Si cette trajectoire est portée par l'axe $(X'OX)$, de vecteur unitaire $\vec{\imath}$, la position d'un point M est donné par :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath}$$

Les vecteurs vitesse et accélération se déduisent aisément par dérivation :

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} = \dot{x}\,(t)\vec{\imath}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\imath} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{\imath} = \ddot{x}(t)\vec{\imath}$$

Les modules de ces trois vecteurs sont :

$$\|\vec{r}(t)\| = |x(t)|, \qquad \|\vec{v}(t)\| = |\dot{x}(t)|, \qquad \|\vec{a}(t)\| = |\ddot{x}(t)|$$

Pour déterminer la nature du mouvement, il suffit d'étudier le signe du produit scalaire $\vec{v}(t).\vec{a}(t)$. Puisque le mouvement est rectiligne, les vecteurs vitesse et accélération son colinéaire :

$$(\vec{v}, \vec{a}) = 0, \pi \Rightarrow \vec{v}(t).\vec{a}(t) = v(t)a(t)$$

Donc :

- Si $a(t)v(t) < 0$, alors le mouvement est décéléré ;
- Si $a(t)v(t) > 0$, alors le mouvement est accéléré ;
- Si $a(t)v(t) = 0$, alors le mouvement est uniforme $(a(t) = 0 \; et \; v(t) = cste \neq 0)$.

5-1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement rectiligne uniformément varié est un mouvement rectiligne dont l'accélération est constante. On a alors :

$$a = cste \Rightarrow \begin{cases} v(t) = \int a dt = at + C_1 \\ x(t) = \int v(t)dt = \int (at + C_1)dt = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2 \end{cases}$$

- Si $a > 0 \Rightarrow$ le mouvement est dit uniformément accéléré.
- Si $a < 0 \Rightarrow$ le mouvement est dit uniformément décéléré.
- Si $a = 0 \Rightarrow$ le mouvement est dit uniforme, soit $v(t) = v = cste$. Par conséquent :

$$x(t) = vt + C_0$$

où C_0, C_1et C_2 sont des constantes d'intégrations déterminées par les conditions initiales.

Application :

La chute libre, à la surface de la Terre, est un mouvement rectiligne uniformément varié (accélération constante $g = 9.80\ m/s^2$). Dans ce cas, le corps, placé dans le champ de pesanteur terrestre, est abandonné sans vitesse initiale à partir d'une hauteur h. Si l'origine des ordonnées est pris au niveau du sol, il est facile d'établir que :

$$\vec{a} = -g\,\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v(t) = -gt \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

On peut envisager le cas où le corps est lancé vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. Il est également facile d'établir que :

$$\begin{cases} \vec{a} = -g\,\vec{j} \\ v(t) = v_0 - gt \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h \end{cases}$$

Dans les deux cas, le mouvement s'effectue le long de l'axe $(Y'OY)$ orienté vers le haut.

On peut également envisager le cas où le corps est lancé vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale. Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} \vec{a} = -g\,\vec{j} \\ \vec{v}(t) = -(gt)\vec{j} + \vec{v}_0 : \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \\ \vec{r} = -\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 : \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + y_0 \end{cases} \end{cases}$$

Si le corps est lancé à partir de l'origine des coordonnées on a alors $x_0 = y_0 = 0$. Dans tous les cas, l'instant initial est $t_0 = 0$.

Remarques :

- Dans le cas du mouvement rectiligne uniformément varié, on a toujours $C_1 = v_0 = v(t=0)$ et $C_2 = a_0 = a(t=0)$.
- En plus des deux relations donnant la vitesse et la position en fonction du temps, on a par ailleurs : $v^2 - v_0^2 = 2ax$
- Géométriquement, les équations paramétriques de la position, vitesse et accélération sont des droites et des paraboles. La figure 2.9 illustre les différents cas possibles.

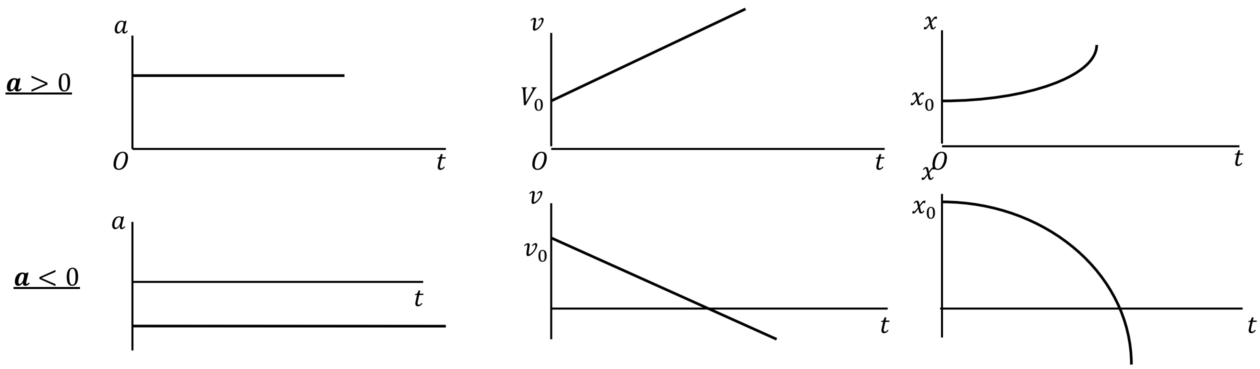

Figure 2.9

5-2. Mouvement circulaire

5-2.1. Cas général

C'est un mouvement s'effectuant dans un plan et dont la trajectoire est un cercle de rayon R. On peut étudier ce mouvement dans les différents systèmes de coordonnées (Fig. 2.10), mais vu la nature courbée de la trajectoire, les systèmes de coordonnées polaires et intrinsèques sont les plus adéquats.

Dans ce cas, les équations horaires sont données par :

$$\begin{cases} \rho(t) = R \\ \theta(t) \end{cases}$$

Par conséquent, les vecteurs position, vitesse et accélération ainsi que leurs modules sont donnés par :

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho = R\vec{e}_\rho \ ; \ \|\vec{r}(t)\| = |\rho(t)| = R$$

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta \ ; \ \|\vec{v}(t)\| = R\dot{\theta}(t)$$

$$\vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2(t)\vec{e}_\rho + R\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta \ ; \ \|\vec{a}(t)\| = R\sqrt{\ddot{\theta}^2(t) + \dot{\theta}^4(t)}$$

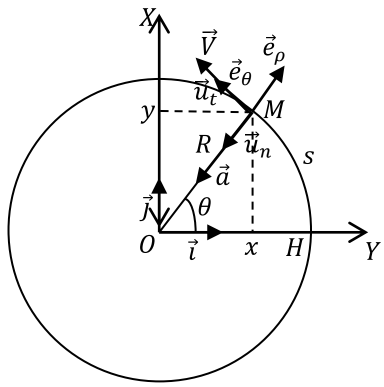

Figure 2.10

Remarques :

- Les quantités $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$ sont appelées position, vitesse et accélération angulaires et elles sont notées $\theta(t), \omega(t)$ et $\alpha(t)$, respectivement. Leurs unités dans le SI sont le $rd, rd/s$ et rd/s^2, respectivement.
- Dans un mouvement circulaire, le vecteur position est toujours orthogonal au vecteur vitesse.

- Dans le cas du mouvement circulaire (Fig. 2.10), les bases des systèmes polaire et curviligne sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{u}_t = \vec{e}_\theta \\ \vec{u}_n = -\vec{e}_\rho \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} a_t = a_\theta = R\alpha(t) \\ a_n = -a_\rho = R\omega^2(t) \end{cases}$$

- Dans le cas où la trajectoire est dans le plan (OXY), en remarquant que $\vec{u}_\theta = \vec{k}\times\vec{u}_\rho$, la relation $\vec{v}(t) = R\omega(t)\vec{u}_\theta$ devient alors :

$$\vec{v}(t) = R\omega(t)(\vec{k}\times\vec{u}_\rho) = (\omega(t)\vec{k})\times(R\vec{u}_\rho) = \vec{\omega}(t)\times\overrightarrow{OM}(t)$$
$$= \vec{\omega}(t)\times\vec{r}(t)$$

Ainsi, dans un mouvement circulaire on représente la vitesse angulaire par un vecteur $\vec{\omega}(t)$, dit vecteur vitesse de rotation, tel que le trièdre $\left(\overrightarrow{OM}(t), \vec{v}(t), \vec{\omega}(t)\right)$ soit direct (Fig. 2.11). Le mouvement circulaire est donc un mouvement avec une distance constante à l'axe de rotation et le vecteur vitesse de rotation est porté par cet axe.

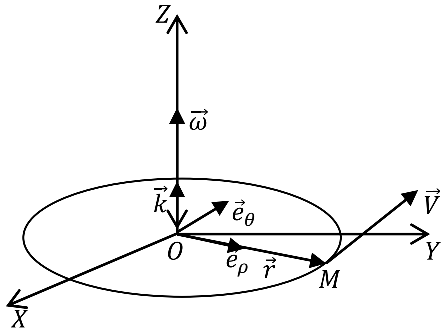

Figure 2.11

5-2.2. Mouvement circulaire uniformément varié

C'est un mouvement dont l'accélération angulaire α est constante. Par intégration, on obtient :

$$\begin{cases} \omega(t) = \int \alpha dt = \alpha t + \omega_0 \\ \theta(t) = \int \omega(t) dt = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \end{cases}$$

Les constantes d'intégration ω_0 et θ_0 sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta_0 = \theta(t=0) \\ \omega_0 = \omega(t=0) \end{cases}$$

La nature du mouvement est déterminée par le signe du produit scalaire :

$$\vec{a}(t).\vec{v}(t) = R^2\alpha\omega(t)$$

- Si $\alpha.\omega(t) > 0 \Rightarrow$ Le mouvement est accéléré ;
- Si $\alpha.\omega(t) < 0 \Rightarrow$ Le mouvement est décéléré ;

5-2.3. Mouvement circulaire uniforme

C'est un mouvement dont la vitesse angulaire ω est constante $(\alpha = 0)$. On obtient par intégration :

$$\theta(t) = \int \omega dt + \theta_0 = \omega t + \theta_0$$

L'abscisse curviligne, le module de la vitesse, les accélérations tangentielle et normale s'écrivent alors :

$$\begin{cases} S(t) = R\omega t + S_0 \\ v = R\omega \\ a_t = a_\theta = 0 \\ a_n = -a_\rho = R\omega^2 \end{cases}$$

Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération tangentielle est nulle. Il n'existe qu'une accélération normale dite centripète (qui est toujours dirigée vers le centre du cercle).

Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement périodique, c'est-à-dire, que le point M passe en un point quelconque de la trajectoire à intervalles de temps égaux. Ce mouvement est caractérisé par :

- Sa période T qui est le temps nécessaire pour faire un tour complet (une révolution);
- Sa fréquence f qui est le nombre de tours (révolutions) par unité de temps.

Il existe une relation simple entre la vitesse angulaire et la période. Le premier tour est accompli au bout de la période T. Il vient :

$$\theta(T) = \theta_0 + \int_0^T \omega dt = \theta_0 + \omega T$$

Après un tour complet, l'angle θ_0 a augmenté de 2π, ce qui nous permet d'écrire :

$$\theta(T) - \theta_0 = 2\pi = \omega T$$

Ce qui nous donne la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Comme le point M effectue un tour par période de temps, la fréquence est alors :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Remarque :

Les équations paramétriques décrivant le mouvement circulaire uniformément varié ont la même forme que celle du mouvement curviligne uniformément varié (rectiligne par exemple). D'ailleurs, on peut passer de l'un à l'autre via les relations suivantes :

$$\begin{cases} dS = Rd\theta \\ v = \dfrac{dS}{dt} = R\omega \\ a = \dfrac{dV}{dt} = R\alpha \end{cases}$$

5-3. Mouvement sinusoïdal

Dit aussi mouvement harmonique ou oscillatoire ou vibratoire. Il s'agit du mouvement périodique d'un point matériel autour d'une position d'équilibre. En général, la dépendance temporelle de la coordonnée décrivant ce mouvement est donnée par :

$$G(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

où :

- G_m est l'amplitude du mouvement : elle représente la valeur maximale (respectivement minimale) de G $(-G_m \leq G \leq +G_m)$;
- ω est sa pulsation ou pulsation angulaire (en hz) ;
- $(\omega t + \varphi_0) = \varphi(t)$ sa phase (en rd) ;
- φ sa phase initiale (en rd) : $\varphi_0 = \varphi(t = 0)$

La période est la fréquence du mouvement sont données par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \ ; \ f = \frac{1}{T}$$

Nous avons reporté sur la figure 2.12 une représentation graphique de la fonction $G(t)$ dans le cas où $\varphi = 0$.

Notons qu'il existe d'autres dépendances fonctionnelles équivalentes pour $G(t)$ telles que :

$$G(t) = G_m \sin(\omega t + \varphi_0) \ ; \ G(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

On peut évidemment passer de l'une à l'autre par de simples transformations trigonométriques.

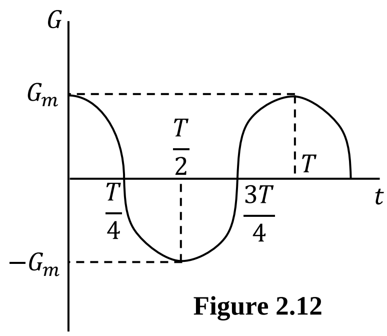

Figure 2.12

Selon la nature de la trajectoire, on distingue deux types de mouvements sinusoïdaux : rectiligne et circulaire.

5-3.1. Mouvement rectiligne sinusoïdal

Dans le cas où le déplacement s'effectue suivant l'axe (OX) du repère cartésien $\mathcal{R}(OXYZ)$, le point M a pour vecteur position :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)\,\vec{\imath}$$

Sa vitesse et son accélération sont alors données par :

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\imath} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} = -x_m\omega\sin(\omega t + \varphi_0)\,\vec{\imath}$$

$$\vec{a}(t) = a(t)\vec{\imath} = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\imath} = -x_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)\vec{\imath} = -\omega^2 x(t)\,\vec{\imath} = -\omega^2\vec{r}$$

Dans un mouvement rectiligne sinusoïdal, le vecteur accélération a la même direction que le vecteur position mais un sens opposé.

Comme exemple de ce mouvement, citons les oscillations d'une masse m accrochée à un ressort de constant de raideur k.

5-3.2. Mouvement circulaire sinusoïdal

C'est un cas particulier du mouvement circulaire où :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Ce mouvement possède les mêmes caractéristiques que le mouvement rectiligne sinusoïdal. La seule différence réside dans l'amplitude, qui est dans le cas du mouvement rectiligne sinusoïdal une longueur et dans le cas du mouvement circulaire sinusoïdal un angle.

La vitesse et l'accélération angulaires sont alors données par :

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = -\omega\theta_0\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t) = -\omega^2\,\theta_0\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2\theta(t)$$

Comme exemple physique de ce mouvement, citons les petites oscillations d'un pendule simple.

6- MOUVEMENT RELATIF

6-1. Introduction

On considère deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Le premier est caractérisé par un de ses repères $\mathcal{R}(OXYZ)$ avec la base cartésienne $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, et le second par $\mathcal{R}'(O'X'Y'Z')$ avec la base cartésienne $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$ (Fig. 2.13). Les axes $(OX),(OY)$ et (OZ) sont choisis de sorte à être parallèles respectivement aux axes $(O'X'),(O'Y')$ et $(O'Z')$ à un instant quelconque qui peut être choisi comme instant origine ($t=0$). Cette condition valide à $t=0$ ne l'est plus quand le temps s'écoule puisque nous considérons que $\mathcal{R}'$ se déplace par rapport à $\mathcal{R}$.

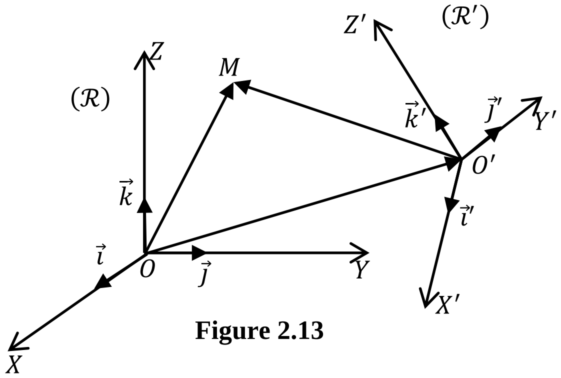

Figure 2.13

Le but de cette section est de répondre à la question suivante : quelles relations existent-t-elles entre les caractéristiques cinématiques (position, vitesse et accélération) d'un même point M relatives à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$?

Remarque :

Le référentiel $\mathcal{R}$ est dit absolu et le référentiel $\mathcal{R}'$ est dit relatif. Les notions de référentiels absolu et relatif seront éclaircies dans le chapitre de dynamique. Toutes les grandeurs cinématiques exprimées dans le référentiel $\mathcal{R}$ sont dites absolues et celles exprimées dans le référentiel $\mathcal{R}'$ sont dites relatives.

Exemple :

Le mouvement d'un objet (ballon par exemple) qui se déplace sur le sol par rapport à deux observateurs ; l'une debout sur le sol et l'autre immobile à l'intérieur d'un véhicule en mouvement.

6-2. Position d'un point *M*

D'après la figure 2.13, la relation de Chasles appliquée aux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}\Rightarrow\vec{r}=\overrightarrow{OO'}+\vec{r'}$$

avec :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\ \ ;\ \ \overrightarrow{OM'}=x'\vec{\imath}'+y'\vec{\jmath}'+z'\vec{k}'$$

6-3. Loi de composition des vitesses

Si on dérive la relation entre les vecteurs positions par rapport au temps et relativement au référentiel $\mathcal{R}$, en tenant compte du fait que la base $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$ n'est pas fixe dans $\mathcal{R}$, on obtient :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)=\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}=\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}+\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$=\left[\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}'+\frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right]+\left[\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}+x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt}+y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]$$

$$=\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}+\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}+x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt}+y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

où :

$$\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \quad ; \quad \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

On distingue dans cette expression deux termes :

- $\vec{v}_r = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ qui représente la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}'$ et que l'on appelle vitesse relative de M par rapport à $\mathcal{R}'$;
- $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + x'\dot{\vec{\imath}}' + y'\dot{\vec{\jmath}}' + z'\dot{\vec{k}}'$ qui est la vitesse d'entraînement de M dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. Cette vitesse est la somme de deux termes. Le premier terme correspond à la vitesse d'entraînement due au déplacement de l'origine O' (terme de translation) et le deuxième correspond à la vitesse d'entraînement traduisant le changement d'orientation du référentiel mobile $\mathcal{R}'$par rapport à $\mathcal{R}$, en d'autres termes, le mouvement de rotation de la base $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Théorème de composition des vitesses:

Le vecteur vitesse absolue est égale à la somme des vecteurs vitesses d'entraînement et relative:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

6-4. Loi de composition des accélérations

Si on dérive la loi de composition des vitesses par rapport au temps et relativement au référentiel absolu $\mathcal{R}$, on obtient :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt}\right)_R = \left[\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right]$$
$$+\left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right] + 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]$$
$$= \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

où :

$$\vec{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$$
$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$$
$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]$$

Nous pouvons interpréter ces trois termes comme suit :

- Le premier terme $\vec{a}_r = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ représente l'accélération de M dans $\mathcal{R}'$ (accélération relative) **;**
- Le dernier terme $\vec{a}_c$ représente l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire**.** Elle n'existe que si le point M est en mouvement dans $\mathcal{R}'$ et si $\mathcal{R}'$ est un référentiel en rotation par rapport à $\mathcal{R}$;
- Le terme intermédiaire représente l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$. Cette accélération correspondrait à l'accélération qu'aurait le point M par rapport à $\mathcal{R}$ s'il était fixe dans $\mathcal{R}'$. Dans ce cas les accélérations relative et complémentaire sont nulles. Le premier terme de cette accélération correspond à l'accélération d'entraînement due au déplacement de l'origine O' (terme de translation) et le deuxième correspond à l'accélération d'entraînement traduisant le changement d'orientation du référentiel mobile $\mathcal{R}'$par rapport à $\mathcal{R}$, en d'autres termes, le mouvement de rotation de la base $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Théorème de composition des accélérations:
Le vecteur accélération absolue est égale à la somme des vecteurs accélérations d'entraînement, relative et de Coriolis :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

6-5. Mouvement de translation

Nous dirons que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement de translation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ si les axes du référentiel $\mathcal{R}'$ restent parallèles à ceux du référentiel $\mathcal{R}$ au cours du mouvement. Si le point O' est en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$, tous les points constituant le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplacent de la même quantité vectorielle que O' (Fig. 2.14). Par Conséquent :

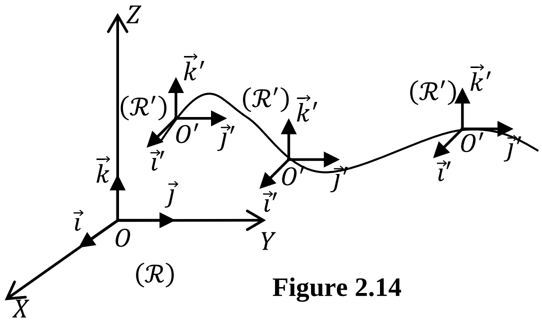

Figure 2.14

$$\vec{\imath} = \vec{\imath}' \;\; ; \;\; \vec{\jmath} = \vec{\jmath}' \;\; ; \;\; \vec{k} = \vec{k}'$$

La base $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ est donc une base fixe dans $\mathcal{R}'$ mais aussi dans $\mathcal{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ correspond au vecteur translation.

Le mouvement de translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ peut être rectiligne, circulaire, uniforme ou varié ou quelconque, selon la nature du mouvement de l'origine O' du référentiel $\mathcal{R}'$.

Dans ce cas, les dérivées premières et secondes des vecteurs de la base $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ par rapport au temps et relativement au référentiel $\mathcal{R}$ sont nulles :

$$\frac{d\vec{\imath}'}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}'}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt} = \frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + \frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} = \vec{0}$$

Dans les lois de composition des vitesses et des accélérations, ceci se traduit par :

$$\vec{v}_{eT} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \;\; ; \;\; \vec{a}_{eT} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \;\; ; \;\; \vec{a}_c = \vec{O}$$

où l'indice « T » renvoie à translation.

Remarque :
Dans le cas d'une translation rectiligne et uniforme, on a :

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \;\; ; \;\; \vec{a}_e(t) = \vec{a}_c(t) = \vec{0}$$

Par conséquent :

$$\vec{a}_a(t) = \vec{a}_r(t)$$

Les deux observateurs liés aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ mesurent donc la même accélération pour M. Dans ce cas, le mouvement de translation s'effectue avec une vitesse constante $\vec{v} = \vec{v}_e$ et on a évidemment :

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_e t + \overrightarrow{r'}(t)$$

6-6. Mouvement de rotation

Nous dirons qu'un référentiel $\mathcal{R}'$ est en rotation par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ si les axes du référentiel $\mathcal{R}'$tournent par rapport à ceux du référentiel $\mathcal{R}$. Le point O', origine du repère du référentiel $\mathcal{R}'$, est immobile par rapport à $\mathcal{R}$. Nous considérerons la rotation autour d'un seul axe, cette rotation étant caractérisée par le vecteur vitesse de rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

Dans ces conditions, on peut choisir l'origine O confondue avec le point O' et choisir un repère $(OXYZ)$ de sorte que le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ soit de la forme :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\vec{k}$$

L'axe $(O'Z')$ peut être confondu avec l'axe (OZ) et donc $\vec{k} = \vec{k}'$. Les axes $(O'X')$ et $(O'Y')$ sont alors en rotation autour de l'axe (OZ). Dans ces conditions, la base $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$, qui est la base fixe du référentiel $\mathcal{R}'$, est une base mobile dans $\mathcal{R}$. Les vecteurs $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}'$ tournent autour de l'axe (OZ) au cours du temps (Fig. 2.15). Si θ est l'angle que fait $\vec{\imath}'$ avec l'axe (OX) du référentiel $\mathcal{R}$, nous avons alors :

$$\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta}$$

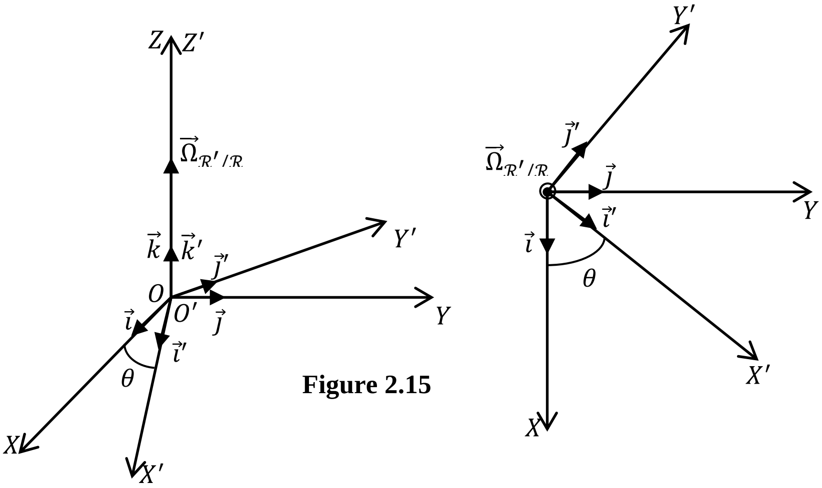

Figure 2.15

Si nous nous plaçons dans le référentiel $\mathcal{R}$, la dérivation, par rapport au temps, des vecteurs de base, donne :

$$\left(\frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{\jmath}' = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\vec{\jmath}' = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(\vec{k}' \wedge \vec{\imath}') = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\imath}'$$

$$\left(\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{\imath}' = -\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\vec{\imath}' = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(\vec{k}' \wedge \vec{\jmath}') = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\jmath}'$$

$$\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

Notons que la base $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ du référentiel $\mathcal{R}'$ se confond avec la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$, mobile des coordonnées cylindriques du repère $(OXYZ)$.

Sachant que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'M}$, la relation de composition des vitesses devient :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$= \left[\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right] + \left[x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right] = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \left[x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]$$

$$= \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \left[x'(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\imath}') + y'(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{\jmath}')\right]$$

$$= \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}')$$

Comme le vecteur vitesse de rotation est dirigée selon $\vec{k}'$, nous avons aussi :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}') = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'\right) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Ainsi, dans deux référentiels en rotation, la vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\vec{v}_{eR} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

De la même manière nous obtenons pour les accélérations d'entraînement et de Coriolis les expressions suivantes :

$$\vec{a}_{eR} = x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right] = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_r$$

où l'indice « R » renvoie à rotation.

Remarques :

- Les résultats qu'on vient d'énoncer sont valables pour n'importe quel axe de rotation.
- Dans le cas d'un mouvement de rotation et uniforme avec un vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ constant, on a :

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) \;;\; \vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_r$$

6-7. Cas général

Un mouvement quelconque peut être considéré comme une combinaison d'un mouvement de translation et de rotation. Dans ce cas, dans les expressions de la vitesse et l'accélération d'entraînement, il faut tenir compte de ces deux mouvements :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{v}_{eT} + \vec{v}_{eR}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{a}_{eT} + \vec{a}_{eR}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_r$$

6-8. Résolution pratique d'un problème de changement de référentiel

Lors de la résolution d'un problème pratique de changement de référentiels, il est conseillé de suivre la démarche suivante :

- Identifier les référentiels absolu et relatif ainsi que le mobile ;
- Identifier les vitesses absolue, relative et d'entraînement ;
- Faire un schéma représentatif de ces vitesses ;
- Appliquer la loi de composition des vitesses en ne perdant pas de vue qu'il s'agit d'une relation vectorielle.

7- EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 :

Dans un référentiel cartésien, le mouvement d'un point M est décrit par les équations horaires suivantes :

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \beta e^{-\alpha t}\cos(\omega t) \\ y(t) = \beta e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \end{cases}$$

où β, α et ω sont des constantes réelles positives. On se propose d'étudier ce mouvement dans les différents systèmes des coordonnées.

<u>Etude du mouvement en coordonnées cartésiennes :</u>

Les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules sont donnés par :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \beta[-\alpha\cos(\omega t) - \omega\sin(\omega t)]e^{-\alpha t}\vec{\imath} + \beta[-\alpha\sin(\omega t) + \omega\cos(\omega t)]e^{-\alpha t}\vec{\jmath}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \beta e^{-\alpha t}\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \beta[2\alpha\omega\sin(\omega t) + (\alpha^2 - \omega^2)\cos(\omega t)]e^{-\alpha t}\vec{\imath} + \beta[-2\alpha\omega\sin(\omega t) + (\alpha^2 - \omega^2)\sin(\omega t)]e^{-\alpha t}\vec{\jmath}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \beta e^{-\alpha t}(\alpha^2 + \omega^2)$$

<u>Etude du mouvement en coordonnées polaires :</u>

Les coordonnées polaires de M sont données par

$$\rho(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \beta e^{-\alpha t} \ ; \ \tan(\theta) = \frac{y}{x} = \tan(\omega t) \Rightarrow \theta = \omega t$$

Ce qui nous permet de trouver l'équation de la trajectoire de M :

$$t = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow \rho = e^{-\frac{\alpha}{\omega}\theta}$$

Calculons, tout d'abord, les dérivées des vecteurs unitaires de la base polaire :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \ ; \ \frac{d(\vec{e}_\rho)}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta = \omega\vec{e}_\theta \ ; \ \frac{d(\vec{e}_\theta)}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho = -\omega\vec{e}_\rho$$

Ces résultats nous permettent d'écrire le vecteur position et de calculer les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules :

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho = \beta e^{-\alpha t}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \beta e^{-\alpha t}\left[-\alpha\vec{e}_\rho + \omega\vec{e}_\theta\right] \;;\; \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \beta e^{-\alpha t}\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\vec{a}(t) = \beta e^{-\alpha t}\left[(\alpha^2 - \omega^2)\vec{e}_\rho - (2\alpha\omega)\vec{e}_\theta\right] \;;\; \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = \beta e^{-\alpha t}(\alpha^2 + \omega^2)$$

Etudes du mouvement en coordonnées curvilignes :

Connaissant le module de la vitesse de M , nous pouvons déterminer son abscisse curviligne :

$$s(t) = \int v dt = -\frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\alpha} e^{-\alpha t} + s_0$$

où s_0 est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

Les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire sont donnés par :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -\alpha\beta e^{-\alpha t}\sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \;;\; a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \omega\beta e^{-\alpha t}\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$$

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \beta\frac{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}{\omega} e^{-\alpha t}$$

Remarques :

- Les modules des vecteurs position, vitesse et accélération sont indépendants de la base choisie ;
- Pour des considérations de simplicité mathématique, il apparait que le système polaire est plus adapté à l'étude de ce mouvement. Le critère de symétrie joue également un rôle important dans le choix du système de coordonnées, si la trajectoire du mouvement est connue.

Exercice 2 :
Un nageur plonge d'un point situé sur la rive d'un fleuve et veut atteindre l'autre rive. Pour cela, il nage perpendiculairement au courant avec une vitesse $\overrightarrow{v_1}$. Sa vitesse par rapport au sol est $\overrightarrow{v_3}$ et la vitesse du courant est $\overrightarrow{v_2}$.

La première étape consiste à identifier chacune des vitesses $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ aux vitesses, absolue $\overrightarrow{v_a}$, relative $\overrightarrow{v_r}$ et d'entraînement $\overrightarrow{v_e}$. Pour ce faire, il est nécessaire de connaitre :
Le référentiel absolu qui est la rive ; le référentiel relatif qui est le courant d'eau et le mobile qui est le nageur. Par conséquent :
La vitesse du nageur par rapport au courant $\overrightarrow{v_1}$ est la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$;
La vitesse du nageur par rapport à la rive $\overrightarrow{v_3}$ est la vitesse absolu $\overrightarrow{v_a}$;
La vitesse du courant par rapport à la rive $\overrightarrow{v_2}$ est la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{v_e}$.
D'après la loi de composition des vitesses, on a :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}$$

Connaissant $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, déterminons :

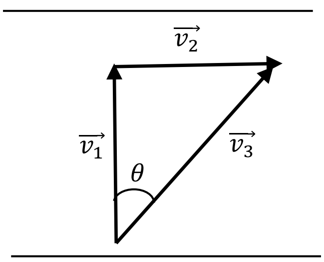

Figure 2.16-a

1- La vitesse du nageur par rapport à la Terre (module et direction) :

D'après la figure 2.16-a, on a :

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_1^2}$$

$$\tan\theta = \frac{v_2}{v_1}$$

On remarque que le nageur ne se déplace pas en ligne droite, en d'autres termes, il est entrainé par le courant.

2- La direction dans laquelle le nageur doit s'orienter pour qu'il se déplace en ligne droite et perpendiculaire à la rive à la vitesse constante $\overrightarrow{v_3}$:

Dans ce cas, pour nager en ligne droite, le nageur doit lutter contre le courant.

D'après la figure 2.16-b, on a :

$$\sin\theta = \frac{v_2}{v_1}$$

Par conséquent, la vitesse du nageur par rapport au sol est :

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}$$

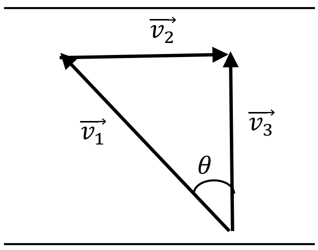

Figure 2.16-b

CHAPITRE 3

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

1- GENERALITES

1-1. Définition de la dynamique

Le mouvement des corps a été étudié en cinématique d'un point de vue purement géométrique. La dynamique permet de faire le lien entre les forces appliquées sur un corps matériel et le mouvement qu'effectue ce dernier. Connaissant ces forces, on peut également prévoir d'autres mouvements.

1-2. Concept de masse

L'expérience montre qu'il est nécessaire d'introduire une grandeur physique mesurant la capacité d'un corps à résister au mouvement qu'on souhaite lui imposer. Cette propriété, qui permet de distinguer un corps d'un autre, correspond à ce qu'on appelle l'inertie d'un corps.
La grandeur ainsi introduite est fondamentale au niveau dynamique et s'appelle masse inerte ou masse inertielle du corps. Il s'agit d'un scalaire positif, qu'on note par m, qui est d'autant plus grand que le corps s'oppose au mouvement. Elle est indépendante du mouvement de l'objet, de sa forme géométrique, de la température, de la pression et du référentiel considéré. Elle se conserve pour un système fermé (qui n'échange pas de matière avec l'extérieur). La masse est une grandeur additive : si on scinde un corps de masse m en plusieurs morceaux de masses m_i, la somme des masses des morceaux est égale à la masse du corps :

$$m = \sum m_i$$

La masse d'un corps représente également la quantité de matière qui le constitue. En mécanique newtonienne, $m = 0$ exprime l'absence de matière.

1-3. Approximation du point matériel

On s'intéresse uniquement aux solides indéformables ou rigides, c'est-à-dire, dont les éléments constitutifs conservent les mêmes distances mutuelles au cours du mouvement.

En cinématique, nous avons schématisé un corps matériel par un point géométrique. Si on associe à ce point une masse finie, correspondante à celle du corps, on obtient ce qu'on appelle un point matériel (on dit également particule). Ceci est évidemment une approximation grossière valable uniquement dans le cas où :

- Les dimensions du corps sont négligeables devant celles de l'observation et du mouvement. Par exemple, on peut considérer une voiture de 5 mètre de long comme un point matériel, si on l'observe d'une distance de 10 kilomètres et si elle se déplace sur un trajet de 30 kilomètres ;
- L'objet n'effectue pas de rotation. Dans ce cas, tous les points du solide effectuent le même mouvement. On peut donc représenter le solide par un seul point matériel situé au centre de

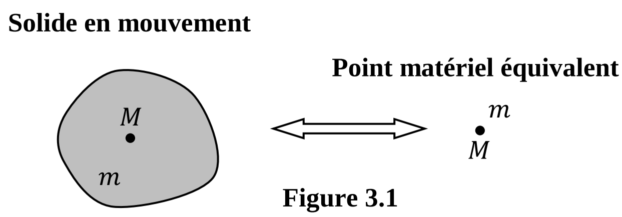

Figure 3.1

gravité ou de masse de ce solide (Fig. 3.1).

1-4. Notion de Force

On appelle force la grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et/ou de produire un mouvement et/ou une déformation d'un corps.

Lorsqu'on parle de force, il est important de voir que cela suppose l'existence d'un acteur « celui qui exerce la force » et d'un receveur « celui qui subit la force ». On dit par exemple : un corps A exerce une force sur un corps B.

La force est d'origine matérielle, elle est le résultat des caractéristiques de l'objet (masse, charge,…) et de son interaction avec son environnement matériel (les caractéristiques et la disposition des objets qui l'entourent).

Des expériences simples montrent que la force est une grandeur physique vectorielle (on la note $\vec{F}$). Elle est donc caractérisée par :

- Un point d'application : point où la force s'exerce sur le corps (généralement c'est le centre de masse) ;
- Une direction : droite selon laquelle la force s'exerce, elle est dite également ligne d'action ;
- Le sens : sens selon lequel s'exerce la force ;
- Le module : l'intensité de la force à laquelle est associée une unité adéquate.

On mesure la force au moyen d'un dynamomètre et son unité est le Newton (symbole N) dans le SI.

Généralement, la force ne dépend pas du référentiel galiléen d'étude.

Les forces sont additives : si plusieurs forces $(\vec{F}_1, \vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N)$ s'exercent sur un point matériel, la résultante $\vec{F}$ des forces qui s'applique sur ce point matériel est égale à la somme vectorielle de ces différentes forces :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

On distingue deux types de forces :

- Les forces (ou interactions) à distance : ce sont des forces qui peuvent se manifester même s'il n'y a pas de contact physique entre les deux corps qui interagissent. Ces forces interviennent par l'intermédiaire de champs vectoriels. Citons comme exemples : la force gravitationnelle, la force électrique et la force magnétique ;
- Les forces (ou interactions) de contact ou de liaison : elles traduisent une interaction entre deux corps en contact physique. Les forces de contact comprennent, par exemple : les frottements, la tension d'un fil, la réaction d'un support…etc.

1-5. Point matériel isolé

Lorsqu'il ne subit aucune force venant de l'extérieur, un corps matériel est dit isolé mécaniquement (ou libre). C'est le cas d'un solide seul dans l'espace, loin de toute autre masse. Cette situation est évidemment inexistante. Sur la Terre, par exemple, il n'est pas possible de rencontrer des corps rigoureusement isolés. L'attraction gravitationnelle de la Terre est une force extérieure pour tout corps matériel. Par contre, on peut rencontrer des corps pseudo-isolés, si les forces extérieures agissant sur ces corps se compensent ou certaines de ces forces sont très négligeables par rapport aux autres. C'est le cas, par exemple, d'un corps se trouvant sur une surface horizontale glissante comme la surface gelée d'une patinoire. Dans ce cas, cette surface compense l'action de la Terre et élimine (diminue) les principales forces de frottements. Dans la suite, on utilisera le terme isolé pour désigner un corps matériel pseudo-isolé.

2- QUANTITE DE MOUVEMENT

2-1. Définition

La quantité de mouvement $\vec{P}$ d'une particule de masse m est définie comme étant le produit de sa masse par son vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

La quantité de mouvement est un vecteur ayant la même direction et le même sens que le vecteur vitesse et a pour unité, dans le S.I, le $kg.m/s$. Elle dépend du référentiel dans lequel est exprimé le vecteur vitesse.

La quantité de mouvement est une notion physique très importante car elle combine les deux éléments qui caractérisent l'état mécanique d'une particule : sa masse et sa vitesse.

Pour un système de N particules, on définit sa quantité de mouvement totale $\vec{P}_T$ comme étant la somme vectorielle des quantités de mouvement de chacune des particules :

$$\vec{P}_T = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \cdots + \vec{P}_i + \cdots + \vec{P}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i$$

2-2. Principe de conservation de la quantité de mouvement

Ce principe stipule qu'une particule libre se déplace avec une quantité de mouvement constante :

$$\vec{P} = constante$$

Remarque

Une quantité de mouvement $\vec{P}$ constante signifie qu'elle est indépendante du temps :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

3- LOIS DE NEWTON

La mécanique, comme de nombreuses branches de la physique, prend ses fondements dans des principes ou des postulats que l'on ne démontre pas. Vérifiés expérimentalement, ils restent valables tant qu'il n'existe pas d'expériences les mettant en défaut. Les trois lois de Newton constituent la base de la mécanique dite classique ou newtonienne.

3-1. Première loi : le principe d'inertie

Le principe d'inertie est un postulat initialement formulé par Galilée et repris par Newton.

3-1.1. Enoncé

Le principe d'inertie repose sur l'hypothèse de l'existence d'un référentiel dit galiléen. Ce principe stipule que :

Il existe des référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléens, par rapport auxquels tout point matériel isolé ou libre est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Remarques :

- D'après le principe d'inertie, si un point matériel est mécaniquement isolé, alors son mouvement est rectiligne et uniforme. Il en résulte qu'un point matériel peut donc être en mouvement même s'il ne subit aucune action.
- Le principe d'inertie crée l'équivalence entre le mouvement rectiligne uniforme et le repos. Il n'existe pas d'expérience mécanique qui permet de les distinguer.
- L'application du principe d'inertie conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement d'un point matériel M :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \vec{P}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{0}$$

  où $\mathcal{R}$ est un référentiel galiléen. Donc, la quantité de mouvement se conserve si le principe d'inertie est vérifié.
- On constate aussi la différence essentielle apportée par la dynamique vis-à-vis de la cinématique : les référentiels ne jouent plus tous le même rôle.

3-1.2. Référentiels galiléens

Un référentiel galiléen est donc un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique. C'est pour cette raison qu'on l'appelle des fois référentiel d'inertie ou inertiel.
Si on connaît un référentiel galiléen, on peut en connaître une infinité se déduisant du premier par une translation rectiligne uniforme.
L'expérience a montré que le référentiel de Copernic est un très bon référentiel galiléen. Tout autre référentiel appartenant à cette classe doit être en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

- Le référentiel de Copernic est le référentiel dont l'origine est le centre de masse du système solaire et ses axes pointent vers trois étoiles éloignées réputées fixes. Ce système est adapté à l'étude du mouvement de tous les corps matériels à l'intérieur de notre système solaire.
- Le référentiel héliocentrique est le référentiel dont l'origine est le centre du soleil et ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Il est beaucoup plus utilisé pour décrire le mouvement des planètes par rapport au soleil. Notons que ce référentiel ne tourne pas avec le soleil.
- Le référentiel géocentrique est le référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Ce référentiel est beaucoup plus utilisé pour décrire le mouvement d'un satellite proche de la Terre. Notons que ce référentiel ne tourne pas avec la Terre.
- Le Référentiel terrestre est un référentiel dans lequel la Terre est immobile. Pour la plupart des expériences que l'on peut réaliser sur la Terre, ce repère lié au sol est un bon référentiel galiléen.

Remarque :
Chacun des référentiels qu'on vient d'énumérer a son domaine de validité. Un référentiel cesse d'être galiléen dès que son mouvement n'est plus rectiligne uniforme. Ceci dépend du temps de l'expérience et éventuellement du mouvement du référentiel. Citons un exemple :
Le référentiel terrestre a, dans le référentiel de Copernic, un mouvement de translation circulaire autour du Soleil combiné à un mouvement de rotation autour de son axe sud-nord. Par conséquent, il n'est pas adapté pour l'étude du mouvement de la lune, car le mouvement de cette dernière, qui est circulaire uniforme (existence d'une accélération normale), a une période de révolution de 30 jours en moyenne. Cette période est de loin supérieure à celle de la Terre (24 h) et le référentiel terrestre devient, au bout de quelques heures, non galiléen.

Notons enfin que la notion de référentiel absolu introduite en cinématique correspond à celle de référentiel galiléen.

3-2. Deuxième loi : le principe fondamental de la dynamique (PFD)

Considérons un point matériel M, de masse m et se déplaçant dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Si ce point matériel n'est pas mécaniquement isolé, c'est-à-dire, s'il subit des forces non compensées, le principe d'inertie indique que sa quantité de mouvement ne peut pas être constante dans le temps. Le principe (ou relation) fondamental(e) de la dynamique (RFD ou PFD) nous permet de lier la cause (forces non compensées) à l'effet observé (quantité de mouvement variable). Il s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right) = \frac{dm}{dt}\vec{v}_{M/\mathcal{R}} + m\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v}_{M/\mathcal{R}} + m\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$$

Si la masse du corps est constante dans le temps, la relation fondamentale de la dynamique se réduit à :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$$

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale au produit de sa masse par son accélération.

Remarques :

- La relation fondamentale de la dynamique est une relation vectorielle, elle vaut donc pour chaque composante dans les différents systèmes de coordonnées :

  Coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum F_z = ma_z \end{cases}$

  Coordonnées polaires et cylindriques : $\begin{cases} \sum F_\rho = ma_\rho \\ \sum F_\theta = ma_\theta \\ \sum F_z = ma_z \end{cases}$

  Coordonnées curvilignes (intrinsèques) : $\begin{cases} \sum F_t = ma_t \\ \sum F_n = ma_n \end{cases}$

  Coordonnées sphériques : $\begin{cases} \sum F_r = ma_r \\ \sum F_\theta = ma_\theta \\ \sum F_\varphi = ma_\varphi \end{cases}$

- Le PFD permet de déterminer le mouvement d'un point matériel si on connait la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur lui. Inversement, pour un mouvement donné, le PFD permet de déterminer la force responsable de ce mouvement.
- Le PFD est une équation différentielle du premier ordre par rapport à la vitesse et du second ordre par rapport à la position :

  $$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow m\frac{d^2\vec{r}_{M/\mathcal{R}}}{dt^2} = \sum \vec{F}_{ext}$$

  C'est pour cette raison qu'on appelle également le PFD, l'équation du mouvement. D'une manière générale, les forces extérieures sont des fonctions de la position, vitesse et éventuellement du temps $\vec{F}_{ext}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, mais elles peuvent également dépendre d'une ou deux de ces grandeurs ou être constantes.
- Du fait qu'il est impossible d'observer une particule isolé, le principe d'inertie ne fournit pas de méthode pour trouver un référentiel galiléen. Par contre le PFD en fournit une. En effet,

d'après ce principe, un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le mouvement d'une particule (sa trajectoire) peut s'expliquer en termes de forces d'origine matérielle.

3-3. Troisième loi : le principe des actions réciproques

Ce principe stipule que :

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, lorsque deux particules sont en interaction, elles exercent l'une sur l'autre des forces opposées en sens mais égales en intensité et de même direction (Fig. 3.2).

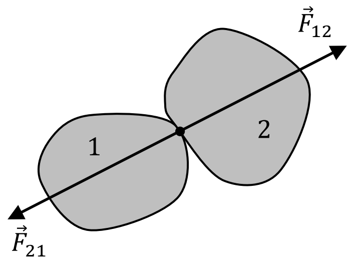

Figure 3.2

Si $\vec{F}_{12}$ est la force exercée par la particule (1) sur la particule (2) et $\vec{F}_{21}$ la force exercée par la particule (2) sur la particule (1), on a alors :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

Remarques :

- Ce principe est universel. Il s'applique aussi bien aux interactions à distance qu'aux interactions de contact, à l'échelle de l'univers comme à l'échelle des particules élémentaires. Il est impossible de trouver une force qui agit de façon isolée, toute force est associée à une réaction.
- On nomme action la force exercée par l'une des deux particules et réaction celle qui est exercée par l'autre. C'est pour cette raison qu'on appelle souvent la troisième loi de Newton « la loi de l'action et de la réaction ».
- L'action et la réaction doivent être de même nature. Ces deux forces agissent suivant la droite joignant les deux corps (ligne d'action).

4- METHODE DE RESOLUTION

On appelle un système mécanique ou système matériel un ensemble d'objets, pouvant être liés entre eux ou non, rigides ou déformables, massiques ou de masse négligeable.

Ainsi on peut trouver dans un système mécanique : un ou plusieurs corps (assimilés à des points matériels) qui évoluent dans le vide, sur des supports solides ou dans des milieux fluides. Ces corps peuvent être reliés par des fils inextensibles et de masse négligeable qui passent par des poulies également de masse négligeable ou non. Ils peuvent aussi être reliés par des fils extensibles (ressorts) de masse négligeable.

D'une manière générale, résoudre un problème de dynamique revient à étudier un système mécanique. Cette étude consiste à prévoir le mouvement de ce système via la connaissance préalable des forces qui s'exercent sur ses différentes parties, ce qui revient à utiliser le PFD. Dans cette étude, il est préférable de suivre les étapes suivantes :

- Faire un résumé du problème à résoudre : données, inconnues et conditions initiales ;
- Définir le système en le distinguant de son environnement (faire un schéma) ;
- Faire un relevé exhaustif ou un bilan des forces appliquées et les représenter sur le schéma ;
- Ecrire l'expression vectorielle de la loi fondamentale ;

- Choisir un système d'axes inertiel ou galiléen. On choisira un système d'axe orthonormé de telle manière à pouvoir écrire facilement l'expression de l'accélération. On prendra notamment le trièdre de Frénet ou le trièdre polaire pour les mouvements courbes.
- Projeter cette expression sur le trièdre de base choisi. On obtient les équations de mouvement qui se présentent sous forme d'équations différentielles ou algébriques selon les cas ;
- Résoudre le système d'équations différentielles ou algébriques pour obtenir leur solution générale.

Remarque :

Si le système mécanique contient plusieurs masses, il faut appliquer cette procédure pour chaque masse.

5- FORCES

L'application de la relation fondamentale de la dynamique nécessite la connaissance préalable des formes mathématiques des forces qui s'exercent sur un point matériel ou lois de force. Dans ce qui suit, nous allons donner les lois de quelques forces.

5-1. Poids

Le poids d'un corps, en un lieu donné de la surface de la Terre, est la force attractive, notée $\vec{P}$, que la Terre exerce sur celui-ci (Fig. 3.3-a et Fig. 3.3-b). C'est cette force qui est responsable de la chute des corps au voisinage de la Terre (Fig. 3.3-c). C'est une force d'interaction à distance et son point d'application est le centre de masse du corps.

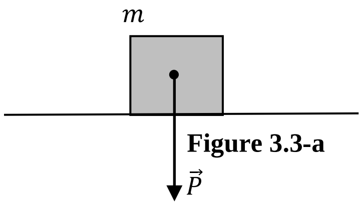

Figure 3.3-a

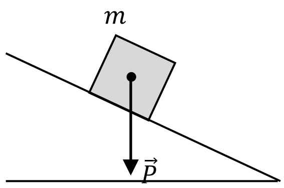

Figure 3.3-b

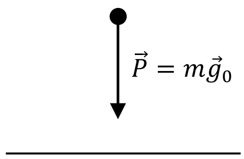

Figure 3.3-c

L'étude expérimentale de la chute libre au voisinage de la Terre, en négligeant la résistance de l'air, c'est-à-dire dans le vide, donne lieu aux conclusions suivantes :

- Le mouvement de chute libre est un mouvement à accélération constante ;
- Tous les corps tombent, en un lieu donné, avec la même accélération, que l'on note $\vec{g}_0$, et que l'on appelle accélération de la pesanteur.

D'après le PFD, le poids d'un corps de masse m est donné par la relation suivante : $\vec{P} = m\vec{g}$

Remarque :

Le vecteur $\vec{g}$ pointe à peu prés vers le centre de la Terre et sa grandeur se situe entre 9.78 m/s^2 et 9.83 m/s^2 selon les endroits. L'accélération de pesanteur vaut environs 9.81 m/s^2 en Algérie.

5-2. Force gravitationnelle

5-2.1. Loi de la gravitation universelle

Cette loi stipule qu'entre deux particules matérielles de masses m_1 et m_2, placées à une distance r l'une de l'autre (Fig. 3.4), s'exerce une force d'attraction d'intensité :

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

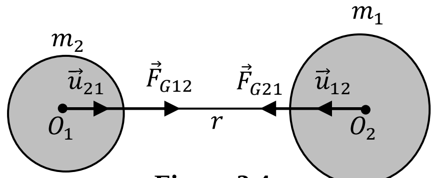

Figure 3.4

où G est la constante de la gravitation universelle qui vaut :

$$G = 6.726\ 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}.$$

La force gravitationnelle est une force d'interaction à distance et son point d'application est le centre de masse du corps.

Remarques :

- Si $\vec{F}_{G12}$ est la force gravitationnelle exercée par la particule (1) sur la particule (2) et $\vec{F}_{G21}$ la force gravitationnelle exercée par la particule (2) sur la particule (1) (Fig. 3.4), on a alors :

$$\vec{F}_{G12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$

$$\vec{F}_{G21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\vec{u}_{21}$$

  où $r_{12} = r_{21} = r$ et $\vec{u}_{12}$ et $\vec{u}_{21}$ sont des vecteurs unitaires donnés par les expressions suivantes :

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\ ;\ \vec{u}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

  Il est clair que :

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} \Rightarrow \vec{u}_{12} = -\vec{u}_{21} \Rightarrow \vec{F}_{G12} = -\vec{F}_{G21}$$

  Ce qui est prévisible d'après la troisième loi de Newton.
- Le poids d'un objet représente donc la force gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet se trouvant au voisinage de sa surface, on a donc :

$$\vec{F}_{G_0} = m\left(G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{u}\right) = m\vec{g}_0 = \vec{P}$$

  Ce qui nous donne l'expression de l'accélération de la pesanteur au niveau de la surface de la Terre :

$$\vec{g}_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{u}$$

  où M_T est la masse de la Terre et R_T son rayon (on suppose que la Terre est une sphère parfaite).
- Si l'objet se trouve à une hauteur h de la surface de la Terre, la force gravitationnelle exercée par la Terre sur cet objet vaut :

$$\vec{F}_G = m\left(G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}\right) = m\vec{g}(r)$$

où :

$$\vec{g}(r) = G\frac{M_T}{r^2}\vec{u} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\vec{u}$$

Au voisinage de la Terre, on a évidemment $r = R_T$ $(h = 0)$ et $\vec{g}(R_T) = \vec{g}_0$.
La quantité $\vec{g}(r)$ représente l'accélération de la pesanteur au point considéré. Ainsi, cette accélération varie en fonction de la hauteur h et on peut également la relier à l'accélération de la pesanteur au niveau du sol :

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow GM_T = g_0 R_T^2$$

D'où :

$$g(r) = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}g_0$$

On conclut que $g(r)$ est une fonction décroissante de h. On peut évaluer sa valeur à une hauteur donnée sachant que $M_T = 5.98\ 10^{24}kg$ et $R_T = 6.37\ 10^6 m$.

5-2.2. Applications

5-2.2.1. Satellite géostationnaire

C'est un satellite qu'un observateur fixe par rapport à la Terre verrait dans le ciel toujours au même endroit (il parait immobile par rapport au sol). Donc, il a la même vitesse angulaire et la même période que la Terre.

Dans le référentiel géocentrique, un satellite géostationnaire de masse m décrit un mouvement circulaire uniforme de période $T = 24\ h$ et ce dernier s'inscrit dans le plan équatorial de la Terre (Fig. 3.5). On a d'après le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow G\frac{mM_T}{r^2} = ma_n = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{M_T}{r} = v^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2$$

Ce qui donne le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire :

$$r^3 = \frac{GM_TT^2}{4\pi^2} \Rightarrow r = \left(\frac{GM_TT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

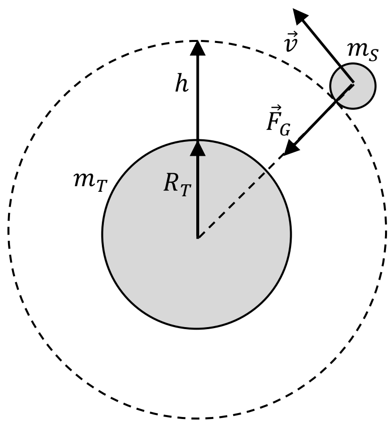

Figure 3.5

Les calculs numériques donnent, pour le rayon de l'orbite et la vitesse du satellite, les valeurs suivante :

$$r = 4.21\ 10^7 m, \qquad v = 3.08\ 10^3 m/s$$

5-2.2.2. Troisième loi de Kepler

Cette loi empirique stipule que :

« Le carré de la période de révolution d'une planète du système solaire est proportionnel au cube du rayon moyen de son orbite » :

$$\frac{T^2}{r^2} = constante = K$$

Où K est une constante dont l'unité est le s^2/m^3, elle est la même pour toute les planètes.

Les grandes planètes du système solaire ont une trajectoire presque circulaire autour du soleil. Par conséquent, r correspond au rayon de ce cercle. On a alors d'après le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = M_p\vec{a} \Rightarrow G\frac{M_S M_p}{r^2} = M_p a_n = M_p\frac{V^2}{r} \Rightarrow G\frac{M_S}{r} = V^2$$

où $M_p$et M_s sont les masses de la planète et du soleil, respectivement. Le mouvement de la planète est circulaire et uniforme de vitesse constante V. Dans ce cas, on a :

$$V = \omega r = \frac{2\pi}{T}r$$

Où ω est la vitesse angulaire de la planète et T sa période de révolution. Il en résulte que :

$$G\frac{M_S}{r} = V^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2$$

On a finalement :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} = K$$

Si on prend la terre comme exemple, sachant que $M_s = 1.99\ 10^{30} kg$ et $T = 3.1678\ 10^7$s, la valeur de cette constante vaut :

$$K = 2.9734\ 10^{-19}\ s^2/m^3$$

Remarque :

Il est clair que pour deux planètes (1) et (2) de période de révolution T_1 et T_2 en mouvement sur des orbites de rayons r_1 et r_2, on a :

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

5-3. Forces de contact

Ce sont des forces qui s'exercent sur un solide en contact physique avec un milieu matériel (un autre solide, un fluide, un fil inextensible, un ressort…etc.). On les appelle également des forces de liaison.

5-3.1. Réaction du support

La force que subit un objet posé sur un support horizontal en provenance de ce support s'appelle réaction du support. La réaction du support sur un objet est répartie sur toute la surface de contact support-objet. On peut représenter cette réaction par une force, résultante de toutes les actions exercées sur toute cette surface.

D'après les figures 3.6-a et 3.6-b, L'objet subit deux forces : son poids $\vec{P}$, appliqué au centre d'inertie, et la réaction du support $\vec{R}$. L'objet étant en équilibre, on a :

$$\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$$

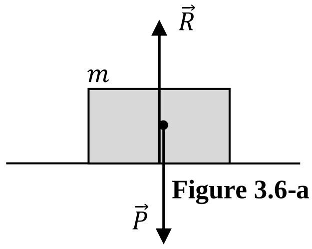

Figure 3.6-a

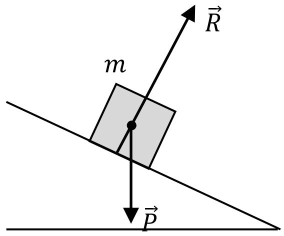

Figure 3.6-b

Cet équilibre de l'objet sur le support impose que le point d'application de la réaction soit à l'intersection de la surface de contact et de la ligne d'action du poids de l'objet.
La réaction d'un support est toujours orthogonale à ce support, même si ce dernier n'est pas horizontal (Fig. 3.6-a et Fig. 3.6-b). C'est pour cette raison qu'on l'appelle également force normale et on la note $\vec{N}$, $\vec{R}_n$ ou $\vec{C}_n$.

Remarques :

- D'après le principe des actions réciproques, l'action de l'objet sur le support horizontal est exactement opposée à la réaction du support sur l'objet et correspond donc au poids de l'objet.
- Cette réaction assure l'équilibre du corps et l'empêche de s'enfoncer dans le sol. On l'appelle également force de poussée.
- Il n'y a pas d'expression générale pour cette force, sa valeur est déterminée en fonction des autres forces en présence. Généralement, c'est une force constante. Dans le cas des figures 3.6-a et 3.6-b, on a $R=P$ et $R=P\cos\alpha$, respectivement.

5-3.2. Forces de frottement

Ces forces s'opposent au déplacement que l'on cherche à engendrer. Il importe de distinguer deux types de frottement : le frottement visqueux (contact solide-fluide) et le frottement solide (contact solide-solide).

5-3.2.1. Frottement visqueux

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz comme l'air ou liquide comme l'eau), il subit, de la part du fluide, des forces de frottement. Ces forces sont réparties sur toute la surface de contact solide-fluide et la résultante de ces actions est un vecteur force proportionnel au vecteur vitesse de l'objet :

$$\vec{f}=-k\vec{v}$$

avec k une constante positive. Cette force n'existe que s'il y a mouvement. Comme exemple de ce type de frottement, citons la résistance de l'air.

Remarques :

- L'expérience montre que dans le cas d'un objet sphérique de rayon r, la constante k est donnée par :

$$k=6\pi r\eta$$

  où η est le coefficient de viscosité du fluide.
- Dans le cas où la vitesse de l'objet devient très importante, la force de frottement visqueux n'est plus proportionnelle à la vitesse mais au carré de la vitesse :

$$\vec{f}=-kv\vec{v}$$

5-3.2.2. Frottement solide

Considérons un objet posé sur un support horizontal. Analysons, en utilisant le PFD, le comportement de ce corps et l'évolution des actions de contact (plan / objet) lorsqu'on exerce sur lui une force de traction horizontale $\vec{F}$ graduellement croissante.

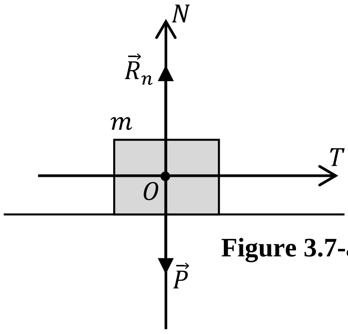

Figure 3.7-a

1er cas : $\vec{F} = \vec{0}$

Le corps est en équilibre sous l'action de deux forces : son poids $\vec{P}$ et la réaction du support $\vec{R}$ qui sont égales mais opposées (Fig. 3.7-a) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{P}$$

2ème cas : $\vec{F} \neq \vec{0}$

L'expérience montre qu'au dessus d'une certaine valeur limite $\vec{F}_{lim}$ de $\vec{F}$, le corps reste en équilibre. Si $\vec{F}$ dépasse $\vec{F}_{lim}$, il y a rupture de l'équilibre et le corps commence à glisser.

a- $\vec{F} < \vec{F}_{lim}$

Le corps reste en équilibre sous l'action de son poids $\vec{P}$ et de la force $\vec{F}$. L'application du PFD permet de mettre en évidence une force de contact $\vec{C}$ (Fig. 3.7-b), telle que :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{C} = \vec{0}$$

Soit :

$$\vec{C} = -\vec{P} - \vec{F}$$

La projection de cette relation sur l'axe tangent au support donne :

$$F = C_t$$

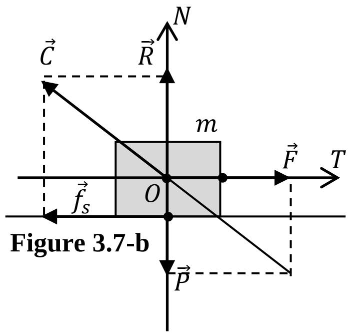

Figure 3.7-b

La composante $\vec{C}_t$ est appelée force d'adhérence. Elle s'oppose à $\vec{F}$ et en général au déplacement du corps vers la droite. Cette force est tangente à la surface de contact. Elle est par définition une force de frottement. Comme le corps ne se déplace pas, la composante $\vec{C}_t$ est dite force de frottement statique et on la note $\vec{f}_s$.

La projection de la relation $\vec{C} = -\vec{P} - \vec{F}$ sur l'axe normal au support donne :

$$C_n = R = P = mg$$

La composante $\vec{C}_n$ est une force de poussée et représente la réaction du support.

b- $\vec{F} = \vec{F}_{lim}$

Il est clair que plus la force $\vec{F}$ augmente, plus $\vec{R}$ augmente. Cette dernière s'adapte pour compenser $\vec{F}$. Mais arrivée à la valeur critique $\vec{F}_{lim}$, $\vec{R}$ cesse d'augmenter et commence à diminuer sensiblement avec l'augmentation de la force $\vec{F}$ pour se stabiliser ensuite. Cette valeur critique de la force permet de définir le coefficient de frottement statique :

$$\mu_s = \frac{C_{0t}}{C_{0n}} = \frac{f_s}{R}$$

où $f_s = F_{lim}$. Notons que $\mu_s = \tan\alpha_{max}$ où α_{max} est l'angle de frottement statique (Fig. 3.7-c). Puisque $R = P = mg$, il est clair que dans ce cas que :

$$f_s = \mu_s R = \mu_s mg = F_{lim}$$

La force de frottement statique est donc proportionnelle à la force normale.

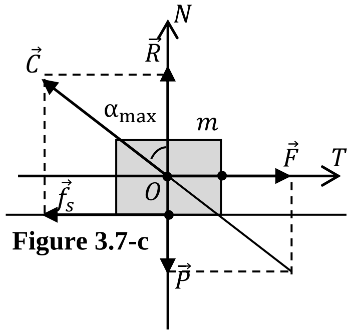

Figure 3.7-c

Le coefficient de frottement statique μ_s possède les propriétés suivantes :

- C'est un coefficient sans dimensions et $\mu_s < 1$;
- Il dépend de la nature des surfaces en contact ;
- Il est déterminé expérimentalement.

c- $\vec{F} > \vec{F}_{lim}$

L'objet se met à glisser sur la surface du support. D'après la figure 3.7-d, le PFD s'écrit dans ce cas :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{C} = m\vec{a} - \vec{P} - \vec{F}$$

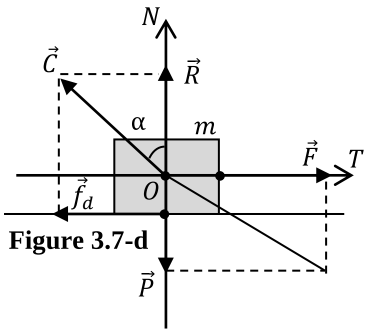

Figure 3.7-d

Comme dans le cas statique, $\vec{C}$ possède une composante tangentielle $\vec{C}_t$ qui s'oppose au mouvement du corps. Par définition, c'est une force de frottement dynamique (ou de glissement) qu'on note $\vec{f}_d$ ou $\vec{f}_g$. On introduit alors le coefficient de frottement dynamique (ou de glissement) :

$$\mu_d(\mu_g) = \frac{R_t}{R} = \frac{f_d}{R} = \tan\alpha$$

où α est l'angle de frottement dynamique (Fig. 3.7-d). Comme pour les frottements statiques, la force de frottement de glissement (ou dynamique) est également proportionnelle à la force normale :

$$f_d = \mu_d R$$

Le coefficient de frottement dynamique μ_d possède les propriétés suivantes :

- Sa valeur est inférieure à celle du coefficient de frottement statique : $\tan\alpha < \tan\alpha_{max} \Rightarrow \mu_d < \mu_s < 1$;

- Il ne dépend que de la nature des surfaces en contact ;
- Sa valeur est déterminée expérimentalement.

Résumé :

Le contact physique entre un corps solide et un support solide génère une force de contact $\vec{C}$ qui peut se décomposer en deux forces : une force normale $\vec{R}$ qui représente la réaction du support et une force de frottement $\vec{f}$:

$$\vec{C} = \vec{R} + \vec{f}$$

L'intensité de la force de frottement solide est toujours proportionnelle à la force normale :

$$f_{s,d} = \mu_{s,d} R$$

5-3.3. Forces de tension

5-3.3.1. Tension d'un fil

Lorsqu'un opérateur tire sur une extrémité d'un fil (l'autre extrémité étant fixe), celui-ci se tend. Simultanément, le fil exerce une résistance, c'est-à-dire une force sur l'opérateur. Cette force exercée par le fil sur l'opérateur est appelée tension du fil. Elle n'existe que si le fil est tendu sous l'effet d'une action extérieure.

Pour un fil de masse négligeable supportant un objet de masse m au repos (Fig. 3.8-a), la tension du fil s'oppose au poids de la masse m, on a :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

La tension est la même en tout point du fil et sa valeur dépend du mouvement du corps, c'est-à-dire, des autres forces en présence ; dans notre cas $T = P$. Cette tension a comme point d'application le point d'attache et elle est dirigée le long du fil dans la direction allant de l'objet vers le fil. Dans la majorité des applications, on considère des fils inextensibles, c'est-à-dire, que leur longueur à vide est égale à celle à charge.

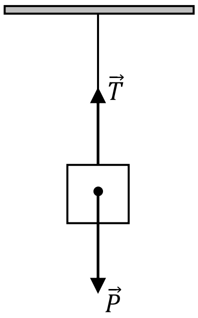

Figure 3.8-a

5-3.3.2. Force élastique

Lorsque le fil est élastique (extensible), la tension du fil peut s'exprimer en fonction de l'état d'étirement du fil et augmente linéairement avec cet étirement (allongement ou compression). Le coefficient d'allongement ou de compression s'appelle la raideur k du fil. Un exemple typique de fil élastique est le ressort (Fig. 3.8-b). La force de tension d'un ressort (force élastique) de longueur non tendu l_0 et étiré ou compressé à la longueur l s'écrit :

$$\vec{F_e} = -k(l - l_0)\vec{u} = -k\Delta l\,\vec{u}$$

avec $\Delta l = l - l_0$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé dans la direction de la déformation $(\vec{F})$. Cette expression est dite loi de Hooke. Il est clair que dans le cas d'un allongement $\Delta l = l - l_0 > 0$ et dans le cas d'une compression $\Delta l = l - l_0 < 0$. Le signe " $-$ " dans cette relation signifie que la force de tension du ressort est une force de rappel et qu'elle s'oppose à la déformation.

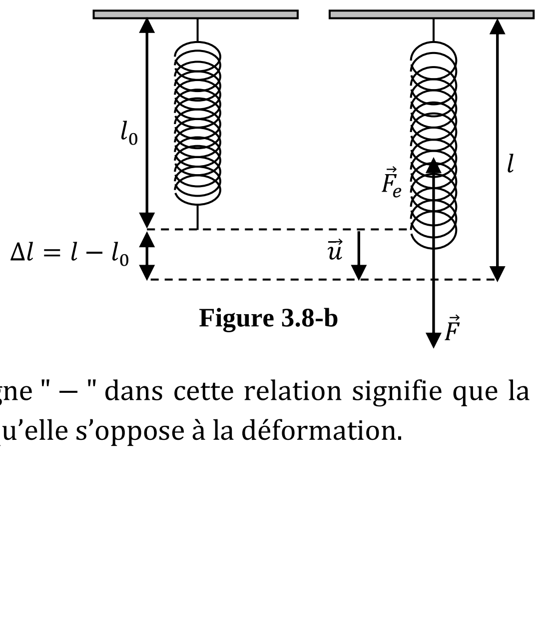

Figure 3.8-b

La loi de Hooke n'est valable que pour des ressorts supposés parfaitement élastique, c'est-à-dire, qu'après une déformation, ils reprennent leur forme et longueur initiales. Ceci suppose évidemment des petites déformations. Pour des déformations plus importantes, la relation entre force et déformation n'est plus linéaire ; si la force appliquée devient trop grande, il peut y avoir déformation permanente, voir rupture du ressort.

6- PSEUDO-FORCES OU FORCES D'INERTIE

6-1. Introduction

Le principe fondamental de la dynamique n'est valable que si l'étude est effectuée dans un référentiel galiléen. En général, les expériences de mécanique que nous sommes amenés à réaliser s'effectuent sur Terre. Il est donc logique de prendre, comme référentiel d'étude, le référentiel terrestre. Or nous avons vu que ce référentiel n'est pas rigoureusement galiléen, comme par exemple lorsque l'on cherche à expliquer la déviation vers l'est d'un corps en chute libre. De même, si une expérience est réalisée dans un véhicule en accélération par rapport à la Terre, le référentiel pratique « véhicule » n'est pas galiléen.
Il importe donc de considérer comment le principe fondamental de la dynamique doit être modifié lorsque le référentiel d'étude choisi est non galiléen.

6-2. Loi de la dynamique dans un référentiel non galiléen

Soit deux référentiels dont l'un, $\mathcal{R}$, est galiléen et l'autre, $\mathcal{R}'$, non galiléen. La loi de composition des accélérations (voir chapitre 2) permet de relier l'accélération d'un point matériel M de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$ à l'accélération de ce même point dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Dans le référentiel R galiléen, il est possible d'écrire la relation :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$$

En reportant la loi de composition des accélérations dans la relation fondamentale de la dynamique, on obtient une nouvelle équation qui fait intervenir le produit de la masse m du point matériel par les accélérations d'entraînement et de Coriolis :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

Cette relation fait apparaitre deux termes supplémentaires homogènes à des forces :

- $-m\vec{a}_e$ que l'on écrit $\vec{f}_{ie}$ et qui s'appelle force d'inertie d'entraînement ;
- $-m\vec{a}_c$ que l'on écrit $\vec{f}_{ic}$ et qui s'appelle force d'inertie de Coriolis ou force d'inertie complémentaire.

Il en résulte que la relation fondamentale de la dynamique, dans un référentiel non galiléen, s'écrit :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

En tenant compte des résultats obtenus dans le chapitre 2, nous pouvons également écrire :

$$\vec{f}_{ie} = -m\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} - m\left[\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right] = -m\vec{a}_{eT} - m\vec{a}_{eR} = \vec{f}_{ieT} + \vec{f}_{ieR}$$

$$\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_r\right)$$

où les indices T et R renvoient à translation et rotation, respectivement.
Les forces d'inertie ne sont pas de véritables forces, c'est-à-dire des forces d'origine matérielle, mais plutôt des pseudo-forces, introduites pour pouvoir écrire une relation équivalente à la relation fondamentale mais applicable dans un référentiel non galiléen. Elles sont dues au

mouvement non rectiligne et uniforme de $\mathcal{R}'$par rapport à $\mathcal{R}$. On les appelle parfois forces de repère.
Il est important de noter que pour tenir compte de la force de Coriolis, il faut que le corps que l'on étudie dans le référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen, qui doit être en rotation par rapport à $\mathcal{R}$, soit en mouvement dans $\mathcal{R}'$. Cette force a été introduite pour expliquer certaines expériences célèbres comme celle du pendule de Foucault et du mouvement rotatoire d'un fluide en écoulement dans une baignoire.
La force d'inertie d'entraînement est plus facile à appréhender car elle se perçoit plus facilement. Quand nous sommes installés dans un véhicule en décélération ou en accélération, nous sommes projetés vers l'avant du siège au cours d'un freinage brutal et collés au fond au cours de l'accélération. Vu de l'extérieur du véhicule, ceci est la conséquence d'une décélération ou accélération par rapport au référentiel terrestre (considéré ici comme galiléen). Vu de l'intérieur du véhicule (référentiel non galiléen), tout se passe comme si une force nous projetait vers l'avant ou nous collait sur le siège. Citons également la célèbre force centrifuge introduite pour expliquer la sensation d'être projeter quand nous sommes installés dans un véhicule en mouvement de rotation.

6-3. Exemples d'application

6-3.1. Translation non uniforme

Considérons le cas d'un pendule simple, de masse m, accroché au plafond d'un wagon d'un train en mouvement rectiligne uniformément accéléré. On se place dans le cas où le mouvement est établi (accélération constante $\vec{a}$). L'étude du mouvement de ce pendule peut se faire dans le référentiel $\mathcal{R}$ terrestre, considéré galiléen, ou dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au wagon, non galiléen puisqu'en accélération constante par rapport à la Terre.

a- Étude dans le référentiel $\mathcal{R}'$ (wagon) non galiléen

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$ galiléen du quai. En conséquence :

$$\vec{f}_{ieR} = \vec{0}\ ;\ \vec{f}_{ic} = \vec{0}$$

Le point matériel M subit donc les forces suivantes :
Son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
La tension du fil : $\vec{T}$
La force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ieT} = -m\vec{a}_{eT} = -m\vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -m\vec{a}$
Ces forces sont représentées sur la figure 3.9-a. Pour l'observateur situé en O', la masse m est immobile donc $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{0}$. On peut donc écrire la condition d'équilibre de la masse m dans $\mathcal{R}'$:

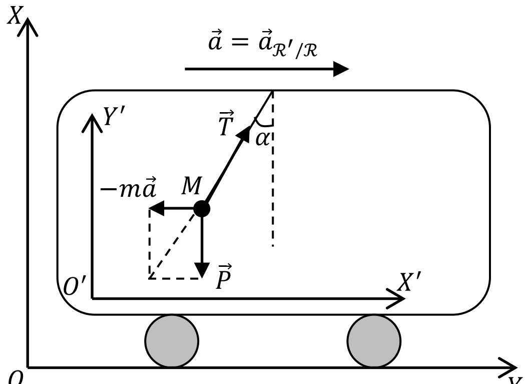

Figure 3.9-a

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ieT} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} - m\vec{a} = \vec{0}$$

Il est facile de décomposer les différentes forces dans la base $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ du référentiel $\mathcal{R}'$. Nous avons en effet, après projection sur les deux axes $(O'X')$ et $(O'Y')$:

$$(O'X') : T \sin\alpha = ma$$
$$(O'Y') : T \cos\alpha = mg$$

On en déduit donc que l'angle d'inclinaison est donné par :

$$\tan\alpha = \frac{a}{g}$$

b- Étude dans le référentiel Terrestre $\mathcal{R}$, galiléen

Le point matériel M de masse m subit les forces suivantes :

Son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

La tension du fil : $\vec{T}$

Ces forces sont représentées sur la figure 3.9-b. Pour l'observateur en O, la masse m a le même mouvement que le wagon et donc le même vecteur accélération. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans $\mathcal{R}$ conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

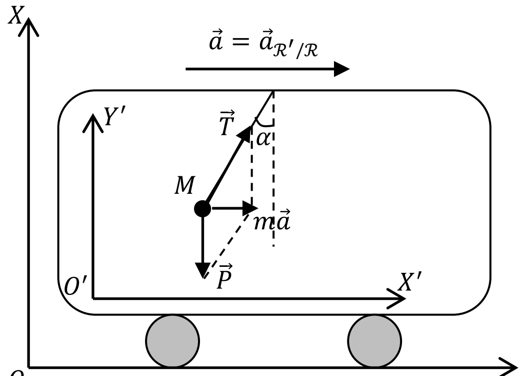

Figure 3.9-b

On en déduit donc que l'angle d'inclinaison est aussi donné par :

$$\tan\alpha = \frac{a}{g}$$

6-3.2. Mouvement de rotation

Considérons une pierre, assimilée à un point matériel M de masse m, liée par un fil inextensible et de longueur l à un axe tournant avec une vitesse de rotation constante ω.

a- Étude dans le référentiel $\mathcal{R}(OXYZ)$, galiléen

En négligeant son poids, la pierre est soumise à la seule force de tension du fil (Fig. 3.10-a). La PFD s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T} = m\vec{a}$$

La projection de cette relation, dans la base de Frénet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ (Fig. 3.10-a), donne :

$$\vec{T} = m\frac{V^2}{l}\vec{u}_n = m\omega^2 l\,\vec{u}_n$$

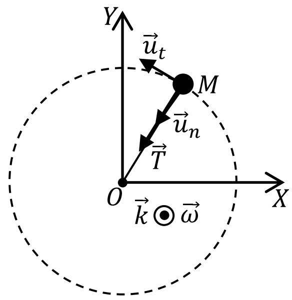

Figure 3.10-a

C'est cette force dite centripète (dirigée vers le centre ; point O) qui fait tourner le fil et la pierre.

b- Étude dans le référentiel $\mathcal{R}'(OX'Y'Z')$, non galiléen

Pour l'observateur lié à la pierre, cette dernière est au repos. En conséquence :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{0}\ ;\ \vec{f}_{ieT} = \vec{0}\ ;\ \vec{f}_{ic} = \vec{0}$$

Le point matériel M subit donc les forces suivantes (Fig. 3.10-b) :

La tension du fil : $\vec{T}$

La force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ieR} = -m[\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})] = -m\left[(\omega\vec{k}) \wedge \left((\omega\vec{k}) \wedge (-l\vec{u}_n)\right)\right]$$
$$= -ml\omega^2\vec{u}_n$$

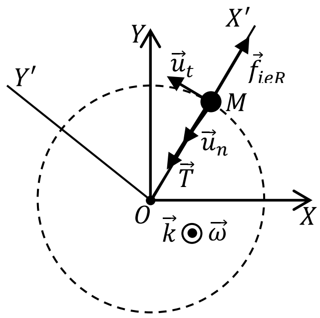

Figure 3.10-b

On peut donc écrire la condition d'équilibre de la masse m dans $\mathcal{R}'$:

$$\vec{T} + \vec{f}_{ieR} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_{ieR} = -\vec{T} = -ml\omega^2\vec{u}_n$$

Pour avoir l'équilibre, l'observateur non inertiel doit introduire une force $\vec{f}_{ieR} = -m\omega^2 l\,\vec{u}_n$, dite force centrifuge.

7- MOMENT CINETIQUE D'UN POINT MATERIEL

7-1. Moment cinétique par rapport à un point

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(OXYZ)$, soit un point matériel M de masse m, de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ et de quantité de mouvement $\vec{P}_{M/\mathcal{R}}$ (Fig. 3.11-a).

Le moment cinétique de M, par rapport à O dans le référentiel $\mathcal{R}$, est défini par :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{v}_{M/\mathcal{R}})$$

Donc, le moment cinétique est un vecteur (Fig. 3.11-a) :

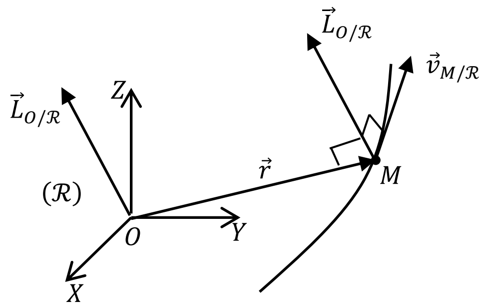

Figure 3.11-a

- Perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$;
- Orienté de façon que le trièdre $(\overrightarrow{OM}, v_{M/\mathcal{R}}, \vec{L}_O)$ soit direct ;
- De module égal à $m\|\overrightarrow{OM}\|\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\| \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) = mrv \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}})$.

Remarque :

Pour un mouvement circulaire de rayon r centré sur l'origine O du plan (OXY) (Fig. 3.11-b), le vecteur position est toujours perpendiculaire à la direction du vecteur vitesse :

$$(\overrightarrow{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) = 1$$

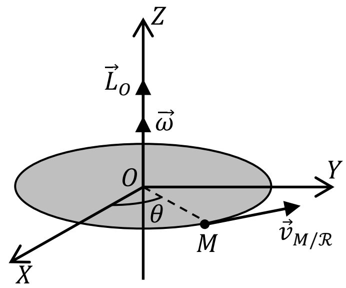

Figure 3.11-b

Par conséquent, le moment cinétique de M, par rapport à O dans le référentiel $\mathcal{R}$, est donné par :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = mrv\vec{k} = mr(\omega r)\vec{k} = mr^2(\omega\vec{k}) = mr^2\vec{\omega}$$

Dans un mouvement circulaire, le moment cinétique et le vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \omega\vec{k}$ ont le même sens et la même direction, c'est-à-dire, qu'ils sont portés par l'axe de rotation qui est ; dans ce cas, l'axe (OZ) (Fig. 3.11-b).

7-2. Moment d'une force par rapport à un point

On appelle moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O le vecteur :

$$\vec{\tau}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

où M désigne le point matériel sur lequel s'applique la force $\vec{F}$ (Fig. 3.11-c).

Dans le plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$, on a :

$$\|\vec{\tau}_O(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{OM}\|\|\vec{F}\| \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) = \|\vec{F}\|OH$$

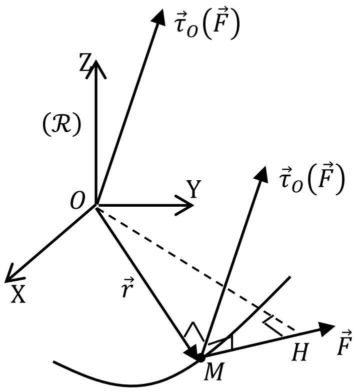

Figure 3.11-c

où le point H est la projection orthogonale du point O sur la direction de $\vec{F}$ (Fig. 3.11-c).

Si l'axe $(M, \vec{F})$ passe par O, alors $\vec{\tau}_O(\vec{F}) = \vec{0}$.

Si plusieurs forces $\vec{F}_i (i = 1,2, \dots, N)$ agissent sur une particule, les moments individuels $\vec{\tau}_{i/O}(\vec{F}_i) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_i$, par rapport au point O, s'ajoutent vectoriellement, c'est-à-dire que le moment résultant est :

$$\vec{\tau}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i/O}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_i = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

7-3. Théorème du moment cinétique (TMC) pour une particule

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(OXYZ)$, soit une particule M de masse m, animée d'une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ et soumise à des forces extérieures dont la résultante est $\vec{F}_{ext}$. La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel M par rapport au point O s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right) = m\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + m\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}$$
$$= m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{a}_{M/\mathcal{R}})$$

Sachant que $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F}_{ext}$, il en résulte que :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext} = \vec{\tau}_o(\vec{F}_{ext})$$

Théorème du moment cinétique :
Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe O est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées à ce point.

Remarque :

Le théorème du moment cinétique est très commode lorsque le moment des forces est nul. On obtient alors immédiatement une constante vectorielle du mouvement :

$$\vec{\tau}_o(\vec{F}_{ext}) = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{cte}$$

7-4. Conservation du moment cinétique : force centrale

L'analyse de la relation :

$$\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{F}_{ext}) = \vec{\tau}_o(\vec{F}_{ext})$$

montre que le moment cinétique est constant (sa dérivée par rapport au temps est nulle) si :

- La particule est libre ou isolée : $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$;
- La résultante des forces extérieures est parallèle à $\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire, que cette résultante passe constamment par le point de référence utilisé pour le moment cinétique (le point O). Dans ce cas, la force $\vec{F}$ est dite centrale. Comme exemples de forces centrales, citons :

- La force gravitationnelle, comme celle qu'exerce le soleil sur les planètes du système solaire, cette force est toujours dirigée vers le centre du soleil ;
- La force centripète dans le cas du mouvement circulaire uniforme, cette force est toujours dirigée vers le centre du cercle.

Remarques :

- Pour un point matériel, il est possible d'exprimer la dérivée du moment cinétique à l'aide du moment d'inertie I par rapport à l'axe de rotation. Nous avons vu que pour un mouvement circulaire dans la plan (OXY), le moment cinétique du point matériel est donné par :
$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = I_Z\vec{\omega}$$
Par définition, le moment d'inertie du point matériel M, distant de r de l'axe de rotation (OZ), est égal au produit de la masse du point par le carré de la distance à cet axe :
$$I_Z = mr^2$$
Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_Z\vec{\omega}) = I_Z\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_Z\dot{\vec{\omega}} = I_Z\vec{\alpha} = \vec{\tau}_o\left(\vec{F}_{ext}\right)$$
où $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$ est le vecteur accélération angulaire. Ce résultat est évidemment valable pour tout autre axe de rotation (Δ).
Donc, il existe une analogie entre le PFD et le TMC :
$$\vec{P} \to \vec{L} \;\; ; \;\; m \to I_\Delta \;\; ; \;\; \vec{a} \to \vec{\alpha} \;\; ; \;\; \vec{F}_{ext} \to \vec{\tau}_o\left(\vec{F}_{ext}\right)$$
Le théorème du moment cinétique (TMC) est équivalent à la deuxième loi de Newton (PFD). On peut utiliser indifféremment l'un ou l'autre pour l'étude d'un système mécanique, mais le PFD est beaucoup plus adapté pour les mouvements de translation et le TMC pour les mouvements de rotation.
- Un corps matériel est en équilibre si seulement si :
$$\begin{cases} \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \vec{\tau}_O\left(\vec{F}_{ext}\right) = \vec{0} \\ \vec{v}(t=0) = \vec{0} \end{cases}$$
Un corps rigide (un solide), à la différence d'un point matériel, peut rouler sur lui-même (même si $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$). Par conséquent, il faut tenir compte également des moments des forces extérieures. Dans la définition de l'équilibre mécanique, la nullité de la vitesse à l'instant initial est une condition nécessaire, car une accélération nulle n'implique pas nécessairement une vitesse nulle.

8- EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 :

Un objet de masse m, posé sur un sol horizontal, est tiré avec une force horizontale $\vec{F}$ (Fig. 3.12). Son contact avec le sol est caractérisé par les coefficients de frottement statique μ_s et dynamique μ_d.

L'objet est soumis à quatre forces (Fig. 3.12) et le PFD s'écrit dans ce cas :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$$

La projection de cette relation vectorielle sur les axes du référentiel galiléen $\mathcal{R}(OXY)$ (référentiel terrestre) donne :

$$(OX) : F - f = ma \Rightarrow F = f + ma$$

$$(OY) : R - P = 0 \Rightarrow R = P$$

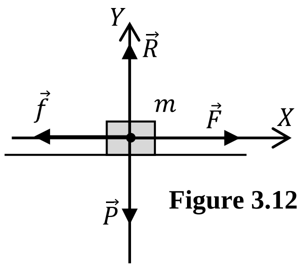

Figure 3.12

Calculons l'intensité de la force $\vec{F}$ dans les trois cas suivants :

- Au moment de la rupture de l'équilibre : $a = 0$ $(v = 0)$ et $f_s = \mu_s R = \mu_s mg$

Par conséquent : $F = f_s = \mu_s mg$

- Le corps est en mouvement uniforme : $a = 0$ $(v = cte)$ et $f_c = \mu_c R = \mu_c mg$

Par conséquent : $F = f_c = \mu_c mg$

- Le corps de déplace avec une accélération constante : $a = 1\ m/s^2$

Dans ce cas $f_c = \mu_c R = \mu_c mg$ et par conséquent : $F = f_c + ma = \mu_c mg + ma = m(a + \mu_c g)$

Exercice 2 :

Etudions le saut d'un parachutiste à partir d'un avion se trouvant à une certaine hauteur. Soit m la masse du parachutiste et $\vec{v}_0$ la vitesse initiale avec laquelle il saute de l'avion. Durant sa chute le parachutiste est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -k\vec{v}$ due à la résistante de l'air.

L'objet est soumis à deux forces (Fig. 3.13) et le PFD s'écrit dans ce cas :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} - k\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}$$

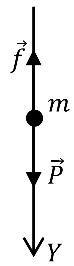

Figure 3.13

et qui constitue l'équation du mouvement du parachutiste. La projection de cette relation vectorielle sur l'axe (OY) (orienté vers la bas) du référentiel galiléen $\mathcal{R}(OXY)$ (référentiel terrestre) donne :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

La résolution de cette équation différentielle du première ordre se fait par séparation des variables :

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g \Rightarrow \frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v+g=-\frac{k}{m}\left(v-\frac{mg}{k}\right) \Rightarrow \frac{dv}{v-\frac{mg}{k}}=-\frac{k}{m}dt$$

Après intégration, on obtient :

$$\ln\left(v-\frac{mg}{k}\right)=-\frac{k}{m}t+C \Rightarrow v-\frac{mg}{k}=Ae^{-\frac{k}{m}t}\ (A=e^{c}) \Rightarrow v(t)=Ae^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$$

où A est une constante d'intégration dont la valeur peut être déterminée en tenant compte de la condition initiale :

$$v(t=0)=v_0=A+\frac{mg}{k} \Rightarrow A=v_0-\frac{mg}{k}$$

On obtient finalement l'expression de la vitesse du parachutiste en fonction du temps :

$$v(t)=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$$

On peut à partir de ce résultat établir l'existence d'une vitesse limite obtenue quand le temps tend vers l'infini :

$$v_l=\frac{mg}{k}$$

On remarque que cette vitesse est indépendante des conditions initiales. On peut noter qu'il s'agit de la valeur obtenue quand l'accélération s'annule : durant la chute du parachutiste, sa vitesse augmente et par conséquent, la force de frottement augmente aussi et après un certain temps, cette force sera égale au poids du parachutiste et son accélération s'annule. Donc, Cette vitesse n'est pas obtenue instantanément mais après un régime transitoire dont la durée caractéristique est la constante $(\tau=m/k)$. La constante τ s'interprète donc physiquement comme le temps caractéristique d'établissement du régime permanent pour lequel la vitesse est égale à la vitesse limite.

Exercice 3 :

Une masse m repose, sans frottement, sur un plan horizontal. Elle est soumise à l'action d'un ressort dont la constante de raideur vaut k. A partir de sa position d'équilibre (longueur du ressort égale à sa longueur à vide), on déplace la masse d'une distance x_0 (Fig. 3.14). Dans cette position, on lâche la masse sans vitesse initiale. Etudions le mouvement de cet oscillateur.

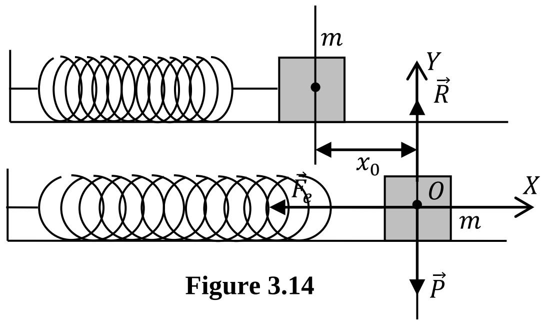

Figure 3.14

Le référentiel d'étude est celui lié au sol. Il est cartésien (OXY) et galiléen. L'axe (OX) est aligné suivant le sens du mouvement. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\sum \vec{F}_{ext}=m\vec{a} \Rightarrow \vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_e=m\vec{a}$$

La projection de cette relation sur les deux axes donne :

$$\begin{cases}(OX): -kx = ma_x \\ (OY): R - P = 0\end{cases}$$

Seule la première équation en x est intéressante, elle devient :

$$-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

et qui représente l'équation du mouvement. C'est une équation différentielle du second ordre linéaire et homogène. La solution générale de cette équation est :

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où x_m et φ sont des constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales. Le mouvement de la masse m est sinusoïdal caractérisé par sa pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$, sa période $T = (2\pi/\omega) = 2\pi\sqrt{m/k}$ et sa fréquence $f = 1/T = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$.

Exercice 4 :

Un pendule simple est constitué d'un solide de masse m relié à un point fixe O par un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur l. Trouvons, dans le cas des petites oscillations, l'équation du mouvement de ce pendule (par exemple, en exprimant la position angulaire $\theta(t)$ en fonction du temps) et déterminons la tension du fil $\vec{T}$.
Le référentiel d'étude est lié au sol (terrestre), auquel on associe la base de Frénet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$. La trajectoire étant plane, les vecteurs $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ sont dans le plan de la trajectoire.

Les conditions initiales sont : pour $t = 0$, on a $\theta = \theta_0$ et $\vec{v} = \vec{v}_0$

Nous allons établir l'équation du mouvement en utilisant deux méthodes équivalentes.

a- Principe fondamental de la dynamique :

La masse est soumise à deux forces (Fig. 3.15-a) et le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

On obtient par projection dans le trièdre de Frénet :

$$\begin{cases}(\vec{u}_t): -mg\sin\theta = ma_t = m\ddot{s} \\ (\vec{u}_n): T - mg\cos\theta = ma_n = m\dfrac{\dot{s}^2}{l}\end{cases}$$

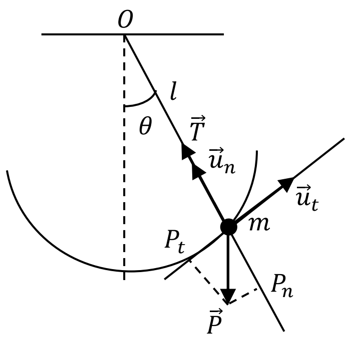

Figure 3.15-a

Soit encore, puisque $s = l\theta$:

$$\begin{cases}(\vec{u}_t): -g\sin\theta = l\ddot{\theta} \\ (\vec{u}_n): T - mg\cos\theta = ma_n = \dfrac{mv^2}{l} = ml\dot{\theta}^2\end{cases}$$

La première équation différentielle peut être résolue dans le cas des petites oscillations. Si θ est petit, cela implique que :

$$\sin\theta \approx \theta \Rightarrow -g\theta = l\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

et qui admet, comme solution :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où θ_m et φ sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. Le mouvement du point est donc circulaire sinusoïdal, il est caractérisé par sa pulsation $\omega = \sqrt{g/l}$, sa période $T = (2\pi/\omega) = 2\pi\sqrt{l/g}$ et sa fréquence $f = 1/T = (1/2\pi)\sqrt{g/l}$.

Déterminons maintenant la tension du fil. Sachant que :

$$v = l\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = \frac{1}{l}\frac{dv}{dt} \Rightarrow l\ddot{\theta} = \frac{dv}{dt}$$

La projection du PFD suivant $(\vec{u}_t)$, nous donne :

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\theta$$

Multiplions les deux cotés de cette équation par $d\theta$:

$$\frac{dv}{dt}d\theta = \frac{d\theta}{dt}dv = \dot{\theta}dv = \frac{1}{l}vdv = -g\sin\theta\, d\theta \Rightarrow vdv == -gl\sin\theta\, d\theta$$

L'intégration de cette équation entre les positions angulaires θ_0 (où $v = v_0$) et θ (où le vitesse est v), nous donne :

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = gl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Ce qui nous permet d'avoir l'expression du carré de la vitesse :

$$v^2 = v_0^2 + 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

A partir de l'équation donnant la projection du PFD suivant $(\vec{u}_n)$, on tire l'expression de la tension :

$$T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l} = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) + \frac{mv_0^2}{l}$$

b- Le théorème du moment cinétique :

En coordonnées polaires (Fig. 3.15-b), la position de la masse m, sa vitesse et son moment cinétique sont donnés par :

$$\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_\rho$$
$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$
$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = ml^2\dot{\theta}\vec{k}$$

Les moments, par rapport à O, de la tension du fil et du poids de M sont donnés par :

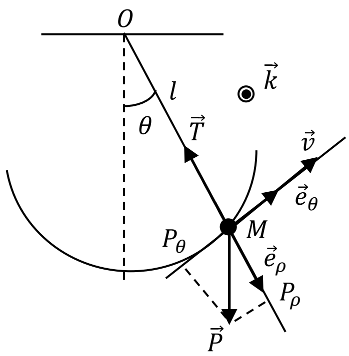

Figure 3.15-b

$$\vec{\tau}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}\ (\overrightarrow{OM} \perp \vec{T})$$
$$\vec{\tau}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -mgl\sin\theta\,\vec{k}$$

D'après le théorème du moment cinétique appliqué à M, on a :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O(\vec{P}) + \vec{\tau}_O(\vec{T}) = \vec{\tau}_{/O}(\vec{P})$$

Ce qui donne :

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{k} = -mgl\sin\theta\,\vec{k} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

qui représente l'équation du mouvement. Pour les faibles oscillations, $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$, cette équation devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

dont la solution est : $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

On retrouve évidemment le même résultat que celui obtenu en utilisant le PFD.

CHAPITRE 4

TRAVAIL ET ENERGIE

1- INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est de définir les notions énergétiques pour la mécanique du point matériel. On commence par définir le travail et la puissance d'une force. Les théorèmes de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique pourront être établis en introduisant les notions de forces conservatives et d'énergie potentielle.

2- TRAVAIL D'UNE FORCE

2-1. Travail élémentaire d'une force

Soit $\vec{F}$ une force agissant sur une particule M de masse m animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$(Fig. 4.1). On définit le travail mécanique élémentaire de $\vec{F}$ au cours du déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$ comme suit :

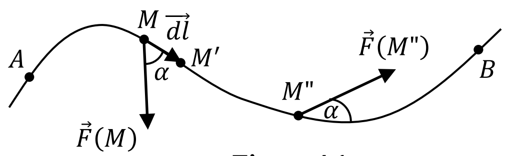

Figure 4.1

$$dW_{MM'}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \|\vec{F}\|\|\overrightarrow{dl}\| \cos\alpha$$

où $\alpha = (\vec{F}, \overrightarrow{dl})$.

2-2. Travail d'une force le long d'un chemin

Au cours d'un déplacement le long d'un chemin orienté C_{AB}, c'est-à-dire, entre deux points A et B (Fig. 4.1), le travail de la force $\vec{F}$ correspond à la somme des travaux élémentaires, ce qui se traduit par l'intégrale du travail élémentaire le long du chemin C_{AB} :

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

Remarques :

- Le travail est une grandeur scalaire qui peut être :
- Négatif si $\cos\alpha < 0$ et la force est dite résistante ;
- Positif si $\cos\alpha > 0$ et la force est dite motrice ;
- Nul si $\cos\alpha = 0$, autrement si la force est perpendiculaire au déplacement. Dans ce cas, la force ne travaille pas.
- Si la force $\vec{F}$ est constante, on a alors :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \vec{F}.\int_A^B d\vec{l} = \vec{F}.\int_A^B d\vec{r} = \vec{F}.(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Dans ce cas, le travail ne dépend pas du chemin suivi. Il ne dépend que des positions initiale et finale du point matériel M.

- Dans le repère de Frénet $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$, la quantité $F\cos\theta$ représente la composante tangentielle de la fore $\vec{F}$:

$$F_t = F\cos\theta \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B F_t dl$$

Le travail de la composante normale F_n de la force est nul.

- L'intégrale introduite dans la définition du travail dépend, en général, du chemin suivi pour aller de A à B. En d'autres termes, le travail dépend de la trajectoire et donc du référentiel. Néanmoins, il existe des forces particulières pour lesquelles le travail ne dépend pas du chemin suivi.
- Si le mouvement du point matériel résulte de l'action de plusieurs forces extérieures $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, .., \vec{F}_n)$ de résultante $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, alors le travail de $\vec{F}$ s'écrit :

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^{n} W_{AB_i} \;\; ; \;\; W_{AB_i} = \int_A^B \vec{F}_i . \overrightarrow{dl}$$

Le travail de la résultante est égal à la somme algébrique des travaux effectués par chaque force pour le même déplacement.

- Dans le cas d'une force centrale $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$, son travail est donné par :

$$W_{AB} = \int_A^B F_r dr$$

- L'unité du travail dans le SI est le Joule $(1J = 1N.m)$. Dans le système CGS, l'unité du travail est l'erg :

$$1\,erg = 1\,dyne.cm \;\; ; \;\; 1J = 10^7 erg$$

2-3. Expressions du travail dans les différents systèmes de coordonnées

Nous donnons ci-dessous l'expression du travail dans les différents systèmes de coordonnées.

- Coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k} \end{cases} \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

- Coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \vec{F} = F_\rho\vec{e}_\rho + F_\theta\vec{e}_\theta \\ \overrightarrow{dl} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B (F_\rho d\rho + \rho F_\theta d\theta)$$

- Coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \vec{F} = F_\rho\vec{e}_\rho + F_\theta\vec{e}_\theta + F_z\vec{k} \\ \overrightarrow{dl} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{k} \end{cases} \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B (F_\rho d\rho + \rho F_\theta d\theta + F_z dz)$$

- Coordonnées curvilignes :

$$\begin{cases} \vec{F} = F_t\vec{u}_t + F_n\vec{u}_n \\ \overrightarrow{dl} = dS\vec{u}_t \end{cases} \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B F_t dS$$

- Coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi \\ \overrightarrow{dl} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\vec{e}_\varphi \end{cases} \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B \left(F_r dr + rF_\theta d\theta + r\sin\theta\, F_\varphi d\varphi\right)$$

3- PUISSANCE D'UNE FORCE

On définit la puissance instantanée de la force $\vec{F}$ appliquée au point matériel M, animé d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, par le produit scalaire :

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

On définit également la puissance moyenne entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\mathcal{P}_{moy} = \frac{W(t_2) - W(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta W}{\Delta t}\,(\Delta t = t_2 - t_1)$$

Il est clair alors que :

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t\to 0} \mathcal{P}_{moy} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

La puissance est donc définie comme un travail par unité de temps.

Comme la vitesse est déterminée par rapport à un référentiel et que la puissance dépend de la vitesse, la puissance est une grandeur qui dépend également du référentiel.

L'unité de la puissance dans le SI est le Watt de symbole W :

$$1W = 1\,J/s$$

Dans le système CGS, l'unité de la puissance et l'erg/seconde :

$$1W = 10^7 erg/s$$

4- ENERGIE

4-1. Energie cinétique

4-1.1. Définition

On appelle énergie cinétique d'un point matériel, la quantité scalaire définie par :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

où m est la masse du point matériel et $\vec{v}$ sa vitesse dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Comme le travail et la puissance, l'énergie cinétique est une grandeur qui dépend du référentiel dans lequel on la calcule, par l'intermédiaire de la vitesse du point matériel.

L'unité de l'énergie cinétique dans le S.I est celle du travail, c'est-à-dire le Joule.

4-1.2. Théorème de l'énergie cinétique

Il s'agit d'une conséquence du principe fondamental de la dynamique. En effet, celui-ci s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

où $\vec{F}$ est la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur le point matériel M.

En multipliant scalairement cette relation par $\vec{v}dt$, on obtient :

$$\vec{F}.\vec{v}dt = m\vec{v}.d\vec{v}$$

Sachant que :

$$\vec{F}.\vec{v} = \frac{dW}{dt} \Rightarrow \vec{F}.\vec{v}dt = dW$$

Il vient que :

$$dW = m\vec{v}.d\vec{v}$$

Or :

$$m\vec{v}.d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}.\vec{v}\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Soit finalement :

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE_c = dW$$

C'est l'expression différentielle (entre deux positions voisines) du théorème de l'énergie cinétique.

On déduit par intégration, le travail de la résultante des forces entre deux positions A et B correspondant à deux instants t_1 et t_2, respectivement :

$$W_{AB} = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$$

C'est la version intégrale du théorème de l'énergie cinétique.

D'une manière générale, le théorème de l'énergie cinétique s'énonce comme suit :

« Lorsqu'un point matériel de masse m se déplace entre deux positions quelconque d'une trajectoire dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, sous l'action d'une force résultante $\vec{F}$, le travail de cette force est, quelque soit le chemin suivi et la nature des forces, égale à la variation de l'énergie cinétique du corps entre ces deux positions ».

Remarques :

- L'énergie cinétique est une grandeur toujours positive.
- Sachant que la quantité de mouvement est $\vec{P} = m\vec{v}$, il vient que :
$$E_c = \frac{P^2}{2m}$$
- Le théorème de l'énergie cinétique peut également s'exprimer en fonction de la puissance. On l'appelle dans ce cas théorème de la puissance cinétique. En effet, nous avons déjà établi que :
$$dE_c = dW \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \frac{dW}{dt} = \mathcal{P}$$
- le théorème de l'énergie cinétique montre que le travail d'une force correspond à l'énergie transférée (algébriquement) au système via cette force. Il s'agit d'un transfert d'énergie de nature mécanique. Ainsi, en supposant qu'un point matériel est soumis à une seule force de travail résistant, alors W_{AB} <0 et donc $\Delta E_c < 0$. Une force de travail résistant prélève de l'énergie cinétique au système. Réciproquement, une force de travail moteur fournit de l'énergie cinétique au système. Une force de travail nul ne modifie pas l'énergie cinétique du système.

4-2. Energie potentielle
4-2.1. Forces conservatives

On dit qu'une force $\vec{F}$ est conservative ou dérive d'un potentiel si elle vérifie une de ces deux conditions qui sont équivalentes :

- Le travail de la force $\vec{F}$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi. Dans ce cas, le travail de la force $\vec{F}$ ne dépend que des positions initiale et finale ;
- Le travail total sur un chemin fermé (soit un aller et retour) est nul :
$$\oint \vec{F}.\overrightarrow{dl} = 0 \Rightarrow \int_A^A \vec{F}.\overrightarrow{dl} = 0$$

On peut alors écrire le travail W_{AB} entre les positions A et B comme la différence $E_p(A) - E_p(B)$, où E_p est une fonction de la position :

$$W_{AB} = E_p(A) - E_p(B)$$

Sous forme différentielle, cette relation s'écrit :

$$\delta W = -dE_p$$

On appelle $E_p(\vec{r})$ l'énergie potentielle associée à la force $\vec{F}$.

4-2.2. Calcul de l'énergie potentielle

Considérons une particule qui se déplace entre deux positions A et B sous l'effet d'une force $\vec{F}$ conservative. Si E_p est l'énergie potentielle associée, on a alors :

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} \Rightarrow E_p(B) = -\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} + E_p(A)$$

En général :

$$E_p(\vec{r}) = -\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} + C$$

Ainsi, il apparait que pour déterminer l'énergie potentielle en n'importe quel point B, il faut connaitre celle d'un point de référence A. En d'autres termes, l'énergie potentielle est définie à une constante C, près. Il est donc nécessaire de définir une origine des énergies potentielles. Souvent A est choisi, par convention, à l'endroit où la force $\vec{F}$ est nulle (lorsque cela est possible) et on donne arbitrairement la valeur zéro à $E_p(A) = C$.

4-2.3. Exemples d'énergie potentielle

4-2.3.1. Energie potentielle gravitationnelle

Considérons un corps de masse m se déplaçant sous l'effet de la force gravitationnelle $\vec{F}_g$ que la terre exerce sur lui :

$$\vec{F}_g = -G\frac{m_T m}{r^2}\vec{u}$$

où r est la distance entre ce corps et le centre de la terre. Il est évident que cette force s'annule à l'infini que nous choisissons comme référence :

$$E_p = -\int \vec{F}.d\vec{r} + (C = 0) = Gm_T m\int \frac{\vec{u}.d\vec{r}}{r^2} = Gm_T m\int \frac{dr}{r^2} = -G\frac{m_T m}{r}$$

4-2.3.2. Energie potentielle de la pesanteur

On l'appelle également énergie potentielle gravitationnelle au voisinage de la terre ($r = R_T$). Considérons un corps de masse m se déplaçant sous l'effet de son poids $\vec{P}$ entre deux points A et B (Fig. 4.2). Son énergie potentielle s'obtient en écrivant :

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = -\vec{P}.\int_A^B d\vec{r} = -\vec{P}.(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{P}.(\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$
$$= P_x(x_A - x_B) + P_y(y_A - y_B) + P_z(z_A - z_B)$$

Le poids est donc un cas particulier du travail d'une force constante. Dans un système de coordonnées cartésiennes où l'axe (OZ) est vertical ascendant (Fig. 4.2), les composantes de $\vec{P}$ sont $(0,0,-mg)$. En conséquence :

$$E_p(B) - E_p(A) = mg(z_A - z_B) \Rightarrow \Delta E_p = mg\Delta z$$

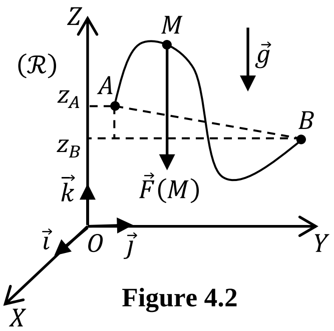

Figure 4.2

Ce résultat étant valable quelque soient les points A et B, il est possible de choisir le niveau de référence pour l'énergie potentielle $\left(E_p = 0\right)$ à une altitude quelconque. On introduit alors un axe vertical ascendant dont l'origine est située à ce niveau de référence et l'énergie potentielle de la pesanteur s'écrit :

$$E_p = mgh$$

où h est la coordonnée de la position sur cet axe (hauteur).

4-2.3.3. Energie potentielle élastique

On sait que la force élastique appliquée par un ressort sur un point matériel, se mouvant suivant l'axe (OX) d'un référentiel cartésien galiléen $(OXYZ)$, est donnée par : $\vec{F}_e = -kx\vec{\imath}$

où $x = l - l_0$, l_0 étant la longueur à vide du ressort et l sa longueur après déformation (Fig. 4.3). Cette force s'annule à l'origine $(x = 0)$, que nous utiliserons comme point de référence. En conséquence :

$$E_p = -\int \vec{F}_e . d\vec{r} + (C = 0) = -\int F dx = k \int x dx = \frac{1}{2} k x^2$$

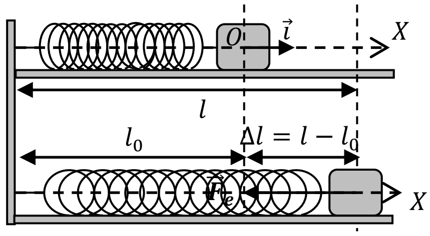

Figure 4.3

Remarque :

- On a déjà établi que le travail d'une force constante ne dépend pas du chemin suivi. Par conséquent, toute force constante dérive d'un potentiel.
- Il est clair que l'expression de l'énergie potentielle varie en fonction du point de référence. Dans les problèmes concrets, si possible, on le prend de telle sorte que l'énergie potentielle soit nulle.

Exemple 1 :

Considérons un corps en chute libre depuis une certaine hauteur h du sol (Fig. 4.4). Le tableau ci-dessous représente l'énergie potentielle de pesanteur de ce corps pour les deux positions A et B et les deux niveaux de références O et O' :

Position	Référence O	Référence O'
A	$-mgh$	0
B	0	$+mgh$

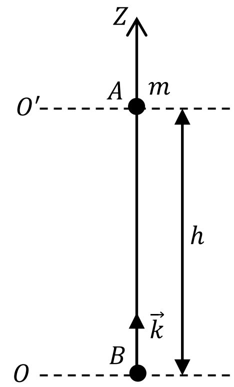

Figure 4.4

Exemple 2 :

Considérons un pendule constitué d'une masse m accrochée à un fil de longueur l, inextensible et de masse négligeable (Fig. 4.5). Le tableau ci-dessous représente l'énergie potentielle de pesanteur de la masse m pour les deux positions A et B et les trois niveaux de références O, O' et $O"$:

Position	Référence O	Référence O'	Référence $O"$
A	$-l$	$-(l - l\cos\theta)$	0

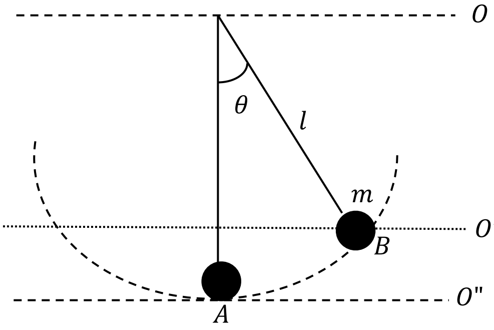

Figure 4.5

B	$-l\cos\theta$	0	$(l - l\cos\theta)$

- Un point matériel a une énergie cinétique unique mais peut avoir plusieurs énergies potentielles. Une masse accrochée à un ressort vertical, par exemple, a une énergie potentielle de pesanteur et une énergie potentielle élastique.
- On ne peut pas associer une énergie potentielle à une force qui ne dérive pas d'un potentiel, en d'autres termes, le travail de cette force ne peut pas s'écrire sous forme d'une différentielle.

Exemple :

Considérons une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse $\vec{f} = -\lambda\vec{V}$. Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = \vec{f}.d\vec{r} = -\lambda\vec{V}.d\vec{r} = -\lambda\vec{V}.\vec{V}dt = -\lambda V^2 dt$$

Ce travail ne peut pas s'écrire sous forme d'une différentielle : il ne s'agit donc pas d'une force qui dérive d'un potentiel.

Parmi les forces non conservatives, citons également : les forces de contact comme les frottements solides (hormis la force élastique), la force magnétique et toutes les forces qui dépendent explicitement du temps ou de la vitesse.

4-2.4. Energie potentielle et Force

Dans un premier temps, considérons le mouvement d'une particule contrainte à se déplacer sous l'effet d'une force $\vec{F}$ qui dérive d'une énergie potentielle E_p. Dans ce cas, comme on l'a démontré, la variation de son énergie potentielle, entre deux points A et B, est donnée par la relation :

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$$

Le champ de force dérive d'un potentiel signifie également (voir chapitre 1) que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\vec{\nabla}E_p$$

En coordonnées cartésiennes, cette relation s'écrit comme suit :

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\vec{\nabla}E_p$$

Ou en termes de composantes :

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \;;\; F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \;;\; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Ainsi, on dispose de deux relations :

- Si on connait l'énergie potentielle E_p, on peut déterminer la force $\vec{F}$ dont elle dérive en utilisant la relation :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\vec{\nabla}E_p$$

- Si connait l'expression d'une force $\vec{F}$ qui dérive d'un potentiel, on peut déterminer l'énergie potentielle E_p qui lui est associée en utilisant la relation :

$$E_p = -\int \vec{F}.\overrightarrow{dr} + C$$

On a également montré, dans le chapitre 1, qu'un champ de force $\vec{F}$qui dérive d'un potentiel est irrotationnel :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

Soit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}$$

Dans le cas d'un champ de forces bidimensionnel, cette condition s'écrit :

$$\vec{F} = F_x(x,y)\vec{\imath} + F_y(x,y)\vec{\jmath} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Remarque :

Nous avons explicité la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$ en coordonnées cartésiennes. Il est également possible de l'expliciter dans les autres systèmes de coordonnées.

4-3. Energie mécanique

4-3.1. Définition de l'énergie mécanique

Si une particule n'est soumise qu'à des forces qui dérivent d'un potentiel, on a établi que :

$$W = \Delta E_c = -\Delta E_p$$

Soit :

$$\Delta(E_c + E_p) = 0$$

On déduit que la quantité $E_c + E_p$ est une constante.

D'après ce résultat, la somme des énergies potentielles et de l'énergie cinétique d'un point matériel, soumis uniquement à des forces qui dérivent d'un potentiel, est une constante. Cette quantité est indépendante du temps et se conserve donc au cours du mouvement. C'est pour cette raison qu'on appelle également les forces qui dérivent d'un potentiel des forces conservatives.

La quantité, qui est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles, est appelée énergie mécanique ou énergie totale du point matériel :

$$E_m = E = E_c + E_p$$

L'énergie mécanique est également une intégrale première du mouvement.

Remarque :

Le poids, la force gravitationnelle, la force élastique et toute force constante sont des forces conservatives.

4-3.2. Théorème de l'énergie mécanique

Dans le cas général, il faut distinguer les forces conservatives de celles qui ne le sont pas. Si la particule est soumise à des forces conservatives et à des forces non conservatives, on a d'une part :

$$dE_m = \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p$$

et d'autre part :

$$dE_c = dW(\vec{F_c}) + dW(\vec{F}_{nc})$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta E_m = dE_p + dW(\vec{F_c}) + dW(\vec{F}_{nc})$$

où $dW(\vec{F_c})$ est la somme des travaux élémentaires des forces conservatives et $W(\vec{F}_{nc})$ est la somme des travaux élémentaires des forces non conservatives. Sachant que $dE_p + dW(\vec{F_c}) = 0$, il en résulte :

$$dE_m = dW(\vec{F}_{nc})$$

Entre deux positions A et B, cette relation s'écrit comme suit :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}(\vec{F}_{nc})$$

d'où le théorème de l'énergie mécanique :

La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel, entre deux positions quelconques, est égale au travail résultant des forces non conservatives auxquelles il est soumis.

Remarques :

- Lorsque les forces qui s'exercent sur un point matériel sont conservatives, l'énergie mécanique totale de cette particule est constante. On dit également qu'elle est conservée.

$$E_m = constante$$

C'est pour cette raison qu'on appelle les forces qui dérivent d'un potentiel des forces conservatives. Entre deux positions A et B, ce théorème s'écrit :

$$E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow E_m(A) - E_m(B) = 0 \Rightarrow \Delta E_m = 0$$

Sous forme différentielle, cette relation s'écrit : $dE_m = 0$

- La conservation de l'énergie mécanique d'un point matériel ne signifie pas qu'il est seulement soumis à des forces conservatives. En effet, d'autres forces peuvent s'exercer sur ce point matériel, mais leur travail est nul. Citons comme exemple, la force normale.
- Puisque l'énergie potentielle dépend de la position du corps, elle peut augmenter ou diminuer. En d'autres termes, elle peut se transformer en énergie cinétique et le corps la récupère lorsqu'il retrouve son état initial. Ainsi, le corps peut transformer l'énergie potentielle en énergie cinétique et vice versa, mais la somme des deux reste constante. Ce fait traduit une propriété fondamentale de l'énergie : elle se manifeste sous différentes formes et peut se transformer d'une forme à une autre. En effet, nous avons tous entendu parler de d'énergie électrique, atomique, thermique, musculaire…etc.
- On a vu que, pour une particule en mouvement sous l'effet des forces conservatives, l'énergie mécanique totale est constante. Pour la calculer, il faut chercher une position où la vitesse est connue. Par exemple, pour une particule dans un champ élastique :
$$E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Sachant que la vitesse est nulle au point d'élongation maximale, $x = a$, on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2}ka^2$$

- Les théorèmes de l'énergie cinétique et mécanique sont une conséquence du principe fondamental de la dynamique et n'introduisent pas un nouveau postulat. Une approche énergétique revient donc implicitement à utiliser le principe fondamental de la dynamique. L'approche énergétique présente l'avantage d'être scalaire contrairement au PFD qui est une approche vectorielle. L'expression du principe fondamental de la dynamique correspond à trois équations scalaires dans l'espace tandis que le théorème de l'énergie mécanique ne fournit qu'une équation scalaire. Lorsqu'on traite un problème à un seul degré de liberté, c'est-à-dire dont la résolution ne concerne qu'une variable, cela ne pose aucune difficulté puisqu'une seule équation suffit pour déterminer une seule variable. Par contre, si la situation nécessite de connaitre l'expression de deux variables ou plus, la seule utilisation du théorème de l'énergie mécanique ne permettra pas la résolution complète du problème. On devra alors recourir à des projections du principe fondamental de la dynamique sur des axes différents pour compléter la formalisation énergétique.
- Pour un système conservatif à un degré de liberté, on peut évidemment retrouver l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

5- EQUILIBRE MECANIQUE D'UN SYSTEME MECANIQUE

5-1. Définition

Nous avons déjà défini la notion d'équilibre mécanique dans le chapitre 3. Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, un point matériel M est en équilibre si :

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{0} \;\; à \;\; t = 0 \end{cases}$$

5-2. Position d'équilibre

On appelle position d'équilibre toute position du point matériel M pour laquelle la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle. Si le point M est initialement placé dans cette position sans vitesse initiale, il y demeure.

Lorsque l'ensemble des forces qui s'exercent sur un point matériel en équilibre sont conservatives, on peut utiliser un raisonnement énergétique pour déterminer ses positions d'équilibre. On désigne par E_p l'énergie potentielle totale et on suppose qu'elle ne dépend que d'une seule variable x, c'est-à-dire, qu'on a un système à un seul degré de liberté. Le travail des forces s'écrit :

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{r} = F_x dx = -dE_p$$

donc :

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

La condition d'équilibre impose alors d'avoir :

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_{eq}} = 0$$

où x_{eq} est la position d'équilibre.

Par conséquent, une position d'équilibre correspond à un extremum (minimum ou maximum) d'énergie potentielle.

Remarque :

Un degré de liberté peut être éventuellement un angle.

5-3. Stabilité d'un équilibre

Pour étudier la stabilité d'un équilibre, il faut étudier le comportement du système lorsqu'on l'écarte d'une distance infiniment petite (à gauche ou à droite) de la position d'équilibre.

Une position d'équilibre est stable lorsque sous l'effet d'une petite perturbation, les forces qui apparaissent tendent à ramener le point M vers sa position d'équilibre.

Une position d'équilibre est instable lorsque, sous l'effet d'une petite perturbation, les forces qui apparaissent tendent à écarter le point M définitivement de sa position d'équilibre.

Par conséquent :

- Une position d'équilibre stable correspond à un minimum d'énergie potentielle.
- Une position d'équilibre instable correspond à un maximum d'énergie potentielle.

La figure 4.6 représente une courbe possible d'énergie potentielle d'un point matériel dans le cas d'un mouvement à une seule dimension. Cette courbe présente des maximums aux points d'abscisses x_1 et x_3 et un minimum au point d'abscisse x_2 correspondant à des positions d'équilibre instables et stable, respectivement.

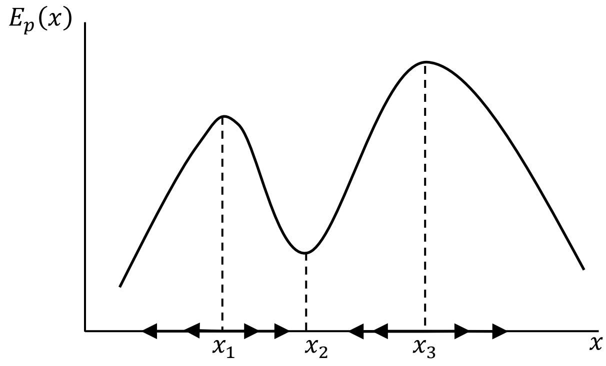

Figure 4.6

Mathématiquement, cela revient à étudier le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle à la position d'équilibre :

- L'équilibre est stable si :

$$\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{eq}} > 0$$

- L'équilibre est instable si :

$$\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{eq}} < 0$$

- Le point peut ou non revenir à sa position d'équilibre si :

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_{eq}) = 0$$

6- EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 :

Un corps de masse m est lancé du haut (point A) d'un plan incliné d'un angle α avec une vitesse $\vec{v}_A$ (Fig. 4.7). Lors de son glissement, il est soumis à des forces de frottements dont le coefficient cinétique est μ_c. Calculons sa vitesse en bas du plan (point B). On pose $AB = d$.

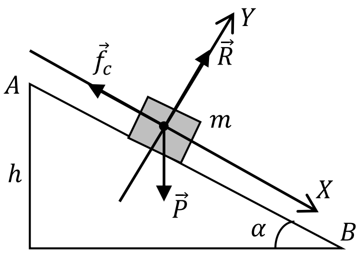

Figure 4.7

En premier lieu, on calcule les travaux des forces extérieures appliquées à la masse m :

$$W_{AB} = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}) + W_{AB}(\vec{f_c})$$

$$\begin{cases} W_{AB}(\vec{P}) = (P_x\vec{\imath} + P_y\vec{\jmath}).(d\vec{\imath}) = mgd\sin\alpha \\ W_{AB}(\vec{R}) = 0\ (\vec{R} \perp \overrightarrow{AB}) \\ W_{AB}(\vec{f_c}) = (-f_c\vec{\imath}).(d\vec{\imath}) = -df_c = -d\mu_c mg\cos\theta \end{cases}$$

Ensuite, on applique le théorème de l'énergie cinétique entre les positions A et B :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}) + W_{AB}(\vec{f_c})$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression de la vitesse au point B :

$$W_{AB} = mgd(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha) = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) \Rightarrow v_B = \sqrt{2gd(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha) + v_A^2}$$

Exercice 2 :

Soit le champ de force suivant :

$$\vec{F}(x,y) = (y+1)\vec{\imath} + (x+1)\vec{\jmath}$$

Calculons le travail de cette force d'un point $O(0,0)$ à un point $A(1,1)$ suivant les deux chemins suivants (Fig. 4.8) :

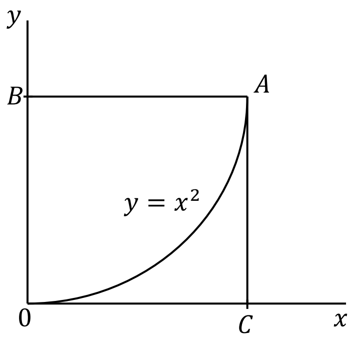

Figure 4.8

- Le long de la courbe $y = x^2$:

$$W_{OA} = \int_O^A F_x dx + F_y dy$$

Sachant que $y = x^2$, on a :

$$dy = 2xdx$$

Après substitution, on obtient :

$$W_{OA} = \int_0^1 (x^2+1)dx + (x+1)(2x)dx = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1)dx = [x^3 + x^2 + x]_0^1 = 3J$$

- Le long de la ligne brisée OBA telle que $B(0,1)$:

Dans ce cas, on peu décomposer le travail W_{OA} comme suit :

$$W_{OA} = \int_O^A \vec{F}.d\vec{r} = \int_O^B \vec{F}.d\vec{r} + \int_B^A \vec{F}.d\vec{r} = W_{OB} + W_{BA}$$

où les travaux W_{OB} et W_{OB} se calculent comme pour le premier chemin :

$$W_{OB} = \int_O^B \vec{F}.d\vec{r} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow dx = 0 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow W_{OB} = \int_O^1 dy = 1J$$

$$W_{BA} = \int_B^A \vec{F}.d\vec{r} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = 1 \Rightarrow dy = 0 \end{cases} \Rightarrow W_{BA} = \int_0^1 2dx = 2J$$

On obtient finalement :

$$W_{OA} = W_{OB} + W_{BA} = 3J$$

On remarque que le travail de cette force est le même suivant les deux chemins. On conclut que c'est une force conservative.

Exercice 3 :

- L'énergie potentielle d'une particule est donnée par :

$$E_p = x^2y + xy^2$$

Déterminons la force dont elle dérive :

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} = -(2xy + y^2)\vec{\imath} - (x^2 + 2yx)\vec{\jmath}$$

- Une particule se déplace dans le champ de force suivant :

$$\vec{F}(x,y) = (y^2 - x^2)\vec{\imath} - (2xy)\vec{\jmath}$$

Montrons que ce champ de force est conservatif. Pour cela, il suffit de montrer que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. En d'autres termes, montrons que :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

En effet :

$$\begin{cases} F_x = y^2 - x^2 \\ F_y = 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 2y \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 2y \end{cases}$$

Exercice 4 :

1- Sur une piste ABC lisse (absence de frottements), sous forme d'un demi-cercle de rayon R (Fig. 4.9), on abandonne, à partir du point A, un corps de masse m sans vitesse initiale :

- Calculons sa vitesse au point B :

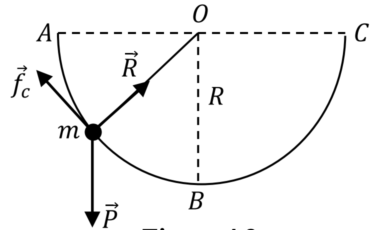

Figure 4.9

Ce corps est soumis à son poids $\vec{P}$ et la réaction de la piste $\vec{R}$ (force normale). Les énergies mécaniques aux points A et B sont données par :

$$E_m(A) = E_c(A) + E_p(A) = mgR$$

$$E_m(B) = E_c(B) + E_p(B) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Puisque la force normale ne travaille pas, car elle est perpendiculaire à la piste (trajectoire du corps), et le poids dérive d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique de la masse m est conservée :

$$E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgR$$

Ce qui nous donne la vitesse au point B :

$$v_B = \sqrt{2gR}$$

- Calculons la hauteur atteinte par le corps du coté BC :

Soit h cette hauteur. Le théorème de conservation de l'énergie mécanique, $E_m(B) = E_m(C)$ nous donne $mgR = mgh$, soit $h = R$. La masse m atteint donc la même hauteur que celle à partir de laquelle on l'a abandonné (point A). Ce résultat est prévisible car son énergie mécanique n'a pas été dissipée. En effet, son énergie mécanique qui était purement potentielle au point A s'est transformée entièrement en énergie cinétique au point B et cette dernière a été restituée sous forme d'énergie potentielle au point C.

2- On suppose maintenant que la partie AB est rugueuse (présence de frottements) et la partie BC lisse. On abandonne la masse m à partir du point A sans vitesse initiale.
- Calculons le travail des forces de frottement $\vec{f_c}$ si la vitesse au point B est égale à $\sqrt{gR}$:

Les énergies mécaniques aux points A et B sont données par :

$$E_m(A) = E_c(A) + E_p(A) = mgR$$
$$E_m(B) = E_c(B) + E_p(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mgR$$

Dans ce cas l'énergie mécanique de la masse m n'est plus conservée et on a :

$$E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}(\vec{f_c}) \Rightarrow W_{AB}(\vec{f_c}) = -\frac{1}{2}mgR$$

- Calculons maintenant la hauteur atteinte par la masse m du coté BC :

Soit h' cette hauteur. La partie BC est lisse, donc l'énergie mécanique de la masse est conservée $E_m(B) = E_m(C)$. Puisque la masse atteint cette hauteur maximale avec une vitesse nulle, on a :

$$mgh' = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mgR$$

Soit :

$$h' = \frac{R}{2}$$

3- On suppose toujours que la partie AB est rugueuse et la partie BC lisse, mais on communique à la masse m une vitesse initiale au point A. Calculons le travail des forces de frottements pour que cette masse m arrive au point C avec une vitesse nulle :

Sur la partie rugueuse AB, nous avons : $W_{AB}(\vec{f_c}) = E_m(B) - E_m(A)$

Sur la partie lisse BC, nous avons : $E_m(B) = E_m(C)$

Ce qui nous donne : $W_{AB}(\vec{f_c}) = E_m(C) - E_m(A) = mgR - \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR$

Soit :

$$W_{AB}(\vec{f_c}) = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Exercice 5 :

Soit un pendule simple constitué d'une masse m liée à un point O fixe par un fil de masse négligeable, inextensible et de longueur l. On écarte cette masse de sa position d'équilibre d'un angle θ. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation du mouvement de ce pendule.

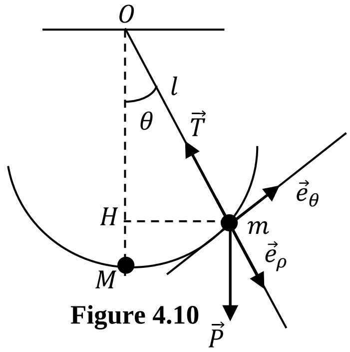

Figure 4.10

En utilisant les coordonnées polaires (Fig. 4.10), l'énergie cinétique de cette masse s'écrit comme suit :

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

D'après la figure 4.10, on a :

$$h = HM = OM - OH = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta)$$

Par conséquent, l'énergie potentielle de la masse m s'écrit :

$$E_p = mgh = mgl(1 - \cos\theta)$$

où on a pris le point le plus bas de la trajectoire comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur. L'énergie mécanique s'écrit alors :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

Le poids est une force conservative et la tension du fil ne travaille pas car elle est perpendiculaire au déplacement. Par conséquent, l'énergie mécanique est conservée :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Rightarrow ml\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta\right) = 0$$

On obtient finalement l'équation du mouvement que nous avons établi en dynamique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Pour les faibles oscillations $\theta \ll 1$, on sait que $\sin\theta \approx \theta$ et l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.L.Caubarrere, J.Fo. Urny, H.Djelouah, F. Khelladi, Introduction à la mécanique, OPU, 2005.

[2] A.Bouda, La mécanique : notions de base et applications, OPU, 2007.

[3] Alain Gibaud, Michel Henry, Cours de Physique : Mécanique du point, DUNOD, 2007.

[4] Physique - Tome 1 : Mécanique, Harris Benson, De Boeck, 2004.

[5] Marie-Noëlle Sanz, Anne-Emmanuelle Badel, François Clausset, Physique tout-en-un. Première année MPSI – PCSI – PTSI, DUNOD, 2008.

[6] José-Philippe Pérez, Mécanique : Fondements et applications, DUNOD, 2014.

[7] Richard Feynman, Le cours de physique de Feynman - Mécanique 1, DUNOD, 2014.

[8] L.Landau, E.Lifchitz, Physique Théorique : Mécanique, Ellipses, 1998.