Le Corrigé De L'Examen De Math(I) 2019-2020

Corrigé de l'exercice1$(06pts)$: On a : $\boldsymbol{u_0 = 3}$ et pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1}} = \frac{6(1+u_n)}{7+u_n}$.

a. Montrons que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n > 2}$ (02pts):

Par récurrence, on a : $u_0 = 2$, ce qui fait $u_0 > 2$ (0.5pts). Pour $u_n > 2$, on peut trouver un nombre réel $\alpha > 0$, tel que $u_n = 2 + \alpha$. Ceci nous donne $u_{n+1} = \frac{6(1+(2+\alpha))}{7+(2+\alpha)} = \frac{6(3+\alpha)}{9+\alpha} = \frac{18+6\alpha}{9+\alpha}$. Mais on a $18 + 6\alpha > 18 + 2\alpha$, donc $\frac{18+6\alpha}{9+\alpha} > \frac{18+2\alpha}{9+\alpha} = 2$. Ce qui est équivalent à dire $u_{n+1} > 2$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 2$. (01.5pts)

b. Déduisons que $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante(01.5pts):

On a $u_{n+1} - u_n = \frac{6(1+u_n)}{7+u_n} - u_n = \frac{6-u_n-{u_n}^2}{7+u_n} = \frac{(2-u_n)(3+u_n)}{7+u_n}$. Or on a $u_n > 2$ ce qui fait $2 - u_n < 0$. Ceci nous donne $u_{n+1} - u_n < 0$. D'où $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

c. La convergence de $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$(01pts):

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car est une suite décroissante et minorée.

d. La limite(01.5pts):

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc $\lim u_n = l$, et de plus l vérifie l'équation :

$$l = \frac{6(1+l)}{7+l}$$

Après développement, on trouve $l^2 + l - 6 = 0$. Ce qui nous donne $l = 2 \; ou \; l = -3$. Et comme $u_n > 2$, on déduit que la limite $l = 2$.

Corrigé de l'exercice2(03pts)**:** Calcul de limites :

■$\lim u_n = \lim\left(-\frac{2}{3}n^3 - n^2 + n\right) = \lim\left(-\frac{2}{3}n^3\right) = -\infty$ (0.5pts)

■$\lim u_n = \lim\left(\frac{2n^2-2\sqrt{n}+1}{1-n-3n^2}\right) = \lim\left(\frac{2n^2}{-3n^2}\right) = -\frac{2}{3}$ (0.5pts)

■$\lim u_n = \lim\frac{4^n}{3^{2n}} = \lim\frac{4^n}{9^n} = \lim\left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ (01pts)

■ $\lim u_n = \lim\frac{3^n+4^n+5^n}{5^n} = \lim\left(\frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n}\right) = \lim\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right) = 1$ (01pts)

Corrigé de l'exercice3(08pts)**:**

On a la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

1. Calcul de la première dérivée f' et l'étude de son signe(03 pts) :

La dérivée : $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$. (01pts)

Son signe : On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \; ou \; x = \frac{3}{2}$. (01pts)

Et le tableau suivant nous donne le signe de f' sur le domaine de définition de f: (01pts)

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$ $+\infty$
$signe\ de\ f'$	$-$	$-$	$+$

2. Les intervalles sur lesquels f est croissante, décroissante (0.5pts) :

Du tableau, on a f est décroissante sur $\left]-\infty\ ,\ \frac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{3}{2}\ ,\ +\infty\right[$.

3. Les extremums de f(0.5pts) :

f admet un seul extremum – un minimum – au point $x = \frac{3}{2}$, sa valeur $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{16}$.

4. Calcul de la deuxième dérivée f'' et l'étude de son signe(03 pts) :

La deuxième dérivée : $f''(x) = 12x^2 - 12x$. (01pts)

Son signe : On a $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 12x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0\ ou\ x = 1$. (01pts)

Et le tableau suivant nous donne le signe de f'' sur le domaine de définition de f: (01pts)

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	0	1 $+\infty$
$signe\ de\ f''$	$+$	$-$	$+$

5. Les intervalles où f est concave, convexe(0.5pts):

Du tableau, on a f est convexe sur $]-\infty\ ,\ 0]$ et $[1\ ,\ +\infty[$, et concave sur$[0\ ,\ 1]$.

6. Les points d'inflexion(0.5pts):

f admet deux points d'inflexion $\big(0, f(0)\big) = (0\,,1)$ et $\big(1, f(1)\big) = (1\,,0)$.

Corrigé de l'exercice4(03pts): Calcul de la première dérivée :

- $f(x) = \left(x + \sqrt{2-x^2}\right)^3 \Rightarrow f'(x) = 3\left(1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\right)\left(x + \sqrt{2-x^2}\right)^2$.(02pts)

- $f(x) = x^2 e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = (2x - 2x^3)e^{-x^2}$. (01pts)