Département: SECSG
Université de Bejaia
1^{ere} Année

Corrigé De L'Examen De Rattrapage MATH(I) Décembre 2020
Durée 1h30mn

Corrigé De L'Exercice1(08pts).

I- On a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a. Calcul de u_1, u_2 *et* u_3(01.5pts).

$\boldsymbol{u_1} = u_0 - u_0^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$; $\boldsymbol{u_2} = u_1 - u_1^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}$; $\boldsymbol{u_3} = u_2 - u_2^2 = \frac{3}{16} - \left(\frac{3}{16}\right)^2 = \frac{\mathbf{39}}{\mathbf{256}}$.

b. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{2}{3}$ (01.5pts).

Par récurrence sur n, on a : $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < u_0 < \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{(0.5pts).}}$ De plus pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 < u_n < \frac{2}{3}$, on a : $\frac{1}{3} < 1 - u_n < 1$. Ce qui donne $0 < u_n(1-u_n) < \frac{2}{3}$. Or $u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1-u_n)$. Donc $0 < u_{n+1} < \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{(01pts).}}$
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{2}{3}$.

c. La décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (01pts).

On a $u_{n+1} - u_n = (u_n - u_n^2) - u_n = -u_n^2$. Comme $u_n^2 > 0$, on déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$. Ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d. La convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$(0.5pts).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car elle est décroissante et minorée (minorée par 0).

e. Calcul de lalimite(0.5pts).

On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, c.-à-d. $\lim u_n = l$. De plus la limite l vérifie l'équation :

$l = l - l^2$. Ce qui implique $l^2 = 0$. Et qui nous donne $l = 0$.

II-Calcul des limites (03pts).

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4 - n^2 - 1}{-n^2 - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4}{-n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}(-3n^2) = -\infty$ ■ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \mathrm{im}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0 + 0 = 0.$ $\boxed{(01pts)}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\left(\dfrac{5}{3}\right)^n\dfrac{5}{3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{5}{3}\right)\right)^n\dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$ ■ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n}{2n+1}\right)^3 = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{2n+1}\right)^3 = (2)^3 = 8.$ $\boxed{(02pts)}$

Corrigé De L'Exercice2 (12pts).

On a la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.

a. Calcul de la première dérivée f' et l'étude de son signe (04pts).

On a $f'(x) = 4x^3 - 4x$ $\boxed{\text{(02pts)}}$. Pour le signe de f', on a $f'(x) = 0$ nous donne $4x^3 - 4x = 0$. Ou bien $4x(x^2-1) = 0$, ce qui fait $4x = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$. Ce qui implique $x = 0$ ou $x = \pm 1$ $\boxed{\text{(01pts)}}$. Et on déduit le tableau suivant $\boxed{\text{(01pts)}}$:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$	

b. Les intervalles sur lesquels f est croissante, décroissante (01pts). Du tableau ci-dessus, on a : f est croissante sur les intervalles $[-1,0]$, $[1,+\infty[$ et décroissante sur les intervalles $]-\infty,-1]$, $[0,1]$.

c. Les extremums de f(01pts). Du tableau ci-dessus, f admet trois extremums :

Un maximum $f(0)=-3$ et deux minimums $f(-1)=-4$ et $f(1)=-4$.

d. Calcul de la deuxième dérivée f'' et l'étude de son signe (04pts).

$f''(x)=12x^2-4$. $\boxed{\text{(02pts)}}$ Pour son signe, on a $f''(x)=0$est équivalent à$12x^2-4=0$. Ce qui fait $x^2=\frac{1}{3}$. Ce qui nous donnes $x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ou bien $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\boxed{\text{(01pts).}}$ Par la suite on a le tableau suivant $\boxed{\text{(01pts)}}$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$	$+\infty$
f''	$+$		$-$		$+$

e. Les intervalles où f est concave, convexe (01pts).

Du tableau ci-dessus, on a f est concave sur $[-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3]$ et convexe sur $]-\infty,-\sqrt{3}/3]$, $[\sqrt{3}/3,+\infty[$.

f. Les points d'inflexion (01pts). Du tableau ci-dessus, la courbe de f admet deux points d'inflexion :

$$\blacksquare\left(-\sqrt{3}/3,f(-\sqrt{3}/3)\right)=\left(-\sqrt{3}/3,-\frac{32}{9}\right)\blacksquare\left(\sqrt{3}/3,f(\sqrt{3}/3)\right)=\left(\sqrt{3}/3,-\frac{32}{9}\right).$$