Département: SECSG
Université de Bejaia
1ère Année

Corrigé De L'Examen De Rattrapage MATH(I)
Durée 1h30mn

14 Septembre 2019

Corrigé De L'Exercice1(10pts) :

I- On a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

a. Calcul de $u_1, u_2\ et\ u_3$ (01.5pts):

$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{3}u_0 + 4 = \frac{1}{3}(1) + 4 = \mathbf{\frac{7}{3}}$; $\boldsymbol{u_2} = \frac{1}{3}u_1 + 4 = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{3}\right) + 4 = \frac{7}{9} + 4 = \mathbf{\frac{43}{9}}$; $\boldsymbol{u_3} = \frac{1}{3}u_2 + 4 = \frac{1}{3}\left(\frac{43}{9}\right) + 4 = \frac{43}{27} + 4 = \mathbf{\frac{151}{27}}$.

b. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 6$ (01.5pts):

Par récurrence sur n on a : $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 6$. De plus pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 < u_n < 6$ on a : $0 < \frac{1}{3}u_n < 2$. Par la suite $4 < \frac{1}{3}u_n + 4 < 6$. Ou bien $0 < \frac{1}{3}u_n + 4 < 6$. Ce qui signifie $0 < u_{n+1} < 6$.
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 6$.

c. La croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$(01pts):

On a $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{3}u_n + 4\right) - u_n = -\frac{2}{3}u_n + 4 = \frac{2}{3}(6 - u_n)$. Comme $6 - u_n > 0$, car $6 > u_n$. On déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

d. La convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$(01pts):

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car elle est croissante et majorée (majorée par 6).

II- On a la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = u_n - 6$.

e. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique(01pts):

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \left(\frac{1}{3}u_n + 4\right) - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{u_n - 6}{3} = \frac{1}{3}v_n$. D'ou $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$. Ce qui signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

f. La déduction que $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$(01pts):

On a $v_n = u_n - 6$, donc $u_n = v_n + 6$. De plus $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, donc $v_n = v_0 q^n$. Ou bien $v_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Ce qui nous donne $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

g. Calcul de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$(01pts):

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(-5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\right) = -5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 = -5(0) + 6 = 6.$$

III- Calcul des deux limites suivantes(02pts) :

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4 - n^2 - 1}{-n^2 - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4}{-n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}(-3n^2) = -\infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\left(\frac{6}{5}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{18}{25}\right)^n = 0$.

Corrigé De L'Exercice2(08pts) :

On a la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ et son domaine de définition $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$.

a. Calcul de la première dérivée f' et l'étude de son signe(02pts) :

$f'(x) = 6x^2 - 8x$. Pour le signe de f', on a $f'(x) = 0$ nous donne $6x^2 - 8x = 0$. Ou bien $x(6x - 8) = 0$, ce qui fait $x = 0$ ou $6x - 8 = 0$. C'est-a-dire $x = 0$ ou $x = \frac{4}{3}$. Et on déduit le tableau suivant

x	$-\infty$	0	$4/3$	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	

b. Les intervalles sur lesquels f est croissante, décroissante(01pts) :

Du tableau ci-dessus, on a f est croissante sur les intervalles $]-\infty, 0]$, $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.

c. Les extremums de f(01pts) :

Du tableau ci-dessus, f admet deux extremums : un maximum$f(0) = 0$ et un minimum $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27}$.

d. Calcul de la deuxième dérivée f'' et l'étude de son signe(02pts) :

$f''(x) = 12x - 8$. Pour son signe, on a $f''(x) = 0$ est équivalent à $12x - 8 = 0$. Ce qui fait $x = \frac{2}{3}$. Par la suite on a :

x	$-\infty$	$2/3$	$+\infty$
f''	$-$	$+$	

e. Les intervalles où f est concave, convexe(01pts) :

Du tableau ci-dessus, on a f est concave sur $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

g. Les points d'inflexion(01pts) :

Du tableau ci-dessus, la courbe de f admet un point d'inflexion $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{32}{27}\right)$.

Corrigé De L'Exercice3(02pts) :

■ $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Longrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2x + 1 = 0$. Mais $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Ce qui fait $x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$. Donc $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

■ $2e^{3x} = 54 \Longrightarrow e^{3x} = 27 \Longrightarrow 3x = \ln 27 = 3\ln 3 \Longrightarrow x = \ln 3$.