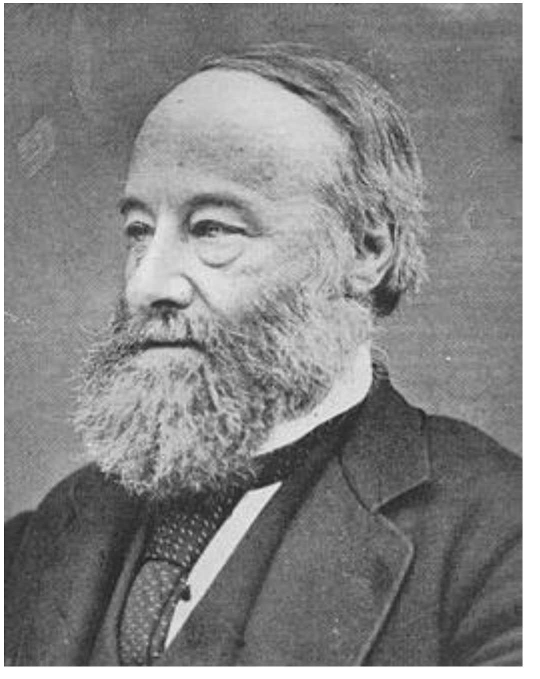
Chapitre IV

Travail et Energie

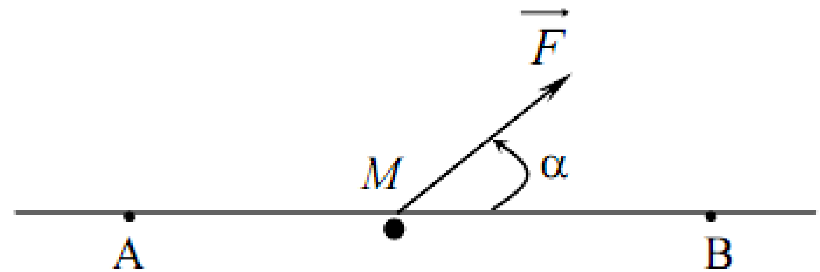
L’objectif de ce chapitre est de présenter les outils énergétiques utilisés en mécanique pour résoudre des problèmes ou le principe fondamental de la dynamique ne suffit pas ou n’est pas approprié pour parvenir au bout de la résolution



James Prescott Joule
1818 - 1889

Travail d'une force constante

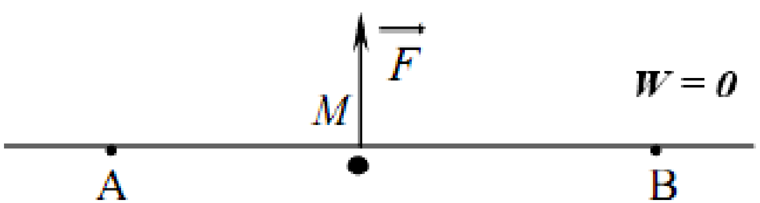
Soit une force constante agissant sur un point matériel M. Sous l'effet de $\vec{F}$, M se déplace entre les points A et B. Par définition, le travail de la force $\vec{F}$ sur le déplacement rectiligne AB est donné par :

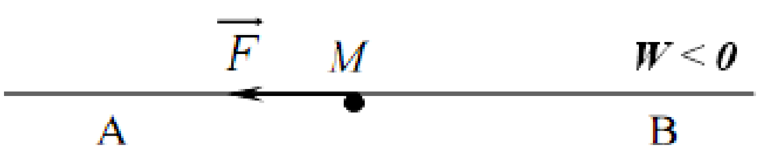


$$w_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB\cos\alpha$$

α est l'angle que fait $\vec{F}$ avec $\overrightarrow{AB}$

Remarque





Le travail est soit positif (force motrice), nul ou négatif (force résistante) selon la direction de la force $\vec{F}$ par rapport au déplacement.

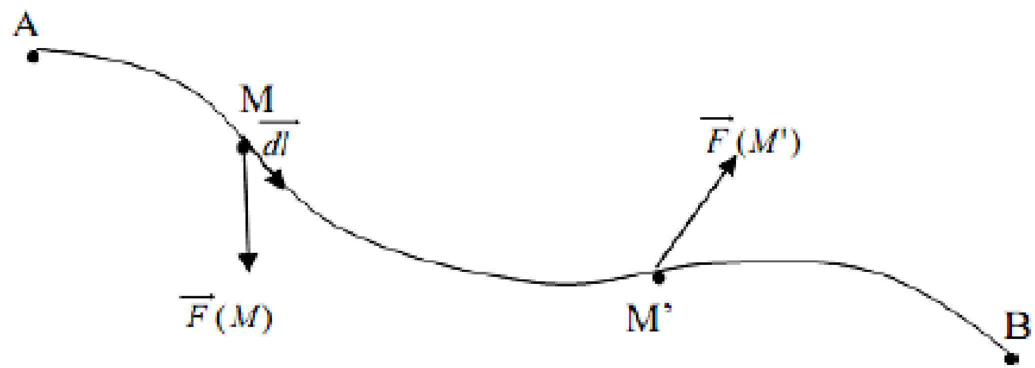
L'unité de travail, dans le système MKSA, est le Joule.

Travail d'une force quelconque

Dans le cas où la force $\vec{F}$ varie au cours de déplacement qui peut être quelconque, il n'est plus possible d'utiliser l'expression précédente. On décompose le trajet AB en une succession de déplacements élémentaires $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$ infiniment petits et donc rectilignes.

Sur $\overrightarrow{MM'}$, la force $\vec{F}$ peut être considéré comme constante ; alors on définit le travail élémentaire donné par :

$$dw_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$



Pour obtenir le travail total sur le déplacement total, il suffit d'additionner les travaux élémentaires.

$$w_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

Travail de la force de pesanteur

$H = Z_A - Z_B$

$W_{\vec{P}} = W_{AB}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P}.\overrightarrow{dl}$

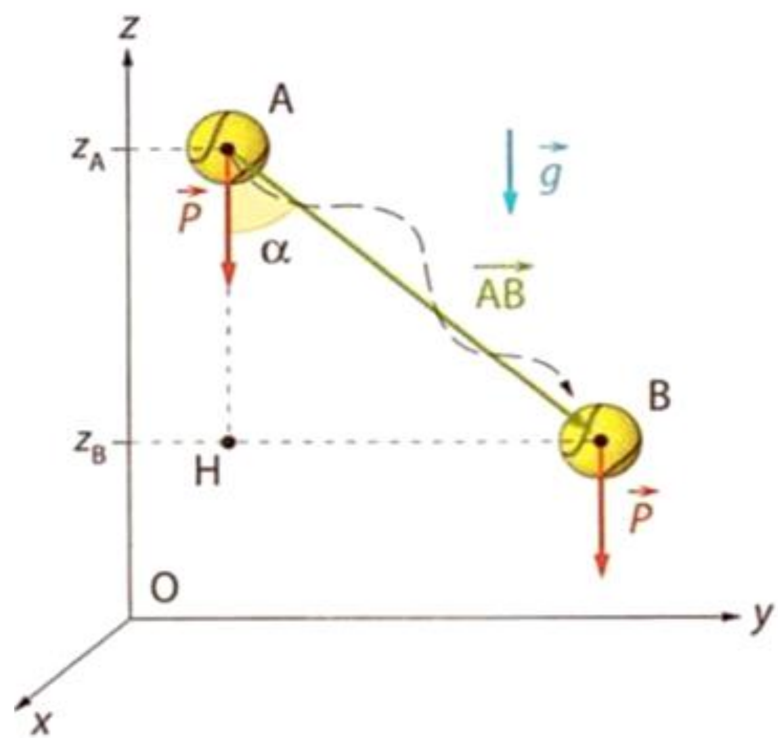
$\vec{P} = -P\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

$d'ou :\ \vec{P}.\overrightarrow{dl} = -P\,dz$

$W_{AB}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B -P\,dz = -P\int_A^B dz$

$W_{AB}(\vec{P}) = -P(Z_B - Z_A)$

$W_{AB}(\vec{P}) = mg\,H$



Puissance d’une force

La puissance d’une force $\vec{F}$ est le rapport du travail de celle-ci au temps mis pour l’accomplir. Selon la durée considérée, cette puissance est dite moyenne ou instantanée. L’unité de la puissance, dans le système MKSA, est le Watt.

Puissance moyenne : $P_{moy} = \dfrac{\Delta w_{\vec{F}}}{\Delta t}$

Puissance instantanée : $P(t) = \dfrac{dw_{\vec{F}}}{dt}$

La puissance d’une force $\vec{F}$ qui dans l’intervalle de temps dt parvient à mouvoir un mobile de la distance $\overrightarrow{dl}$ (i.e. lui confère la vitesse $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt}$) peut s’écrire,

$$P(t) = \frac{dw_{\vec{F}}}{dt} = \frac{\vec{F}.\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F}.\frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

Energie cinétique

Afin d'accélérer une masse *m* et l'amener à une vitesse définie, on doit fournir du travail. Ce travail est alors emmagasiné dans cette masse sous forme d'énergie cinétique définie par

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

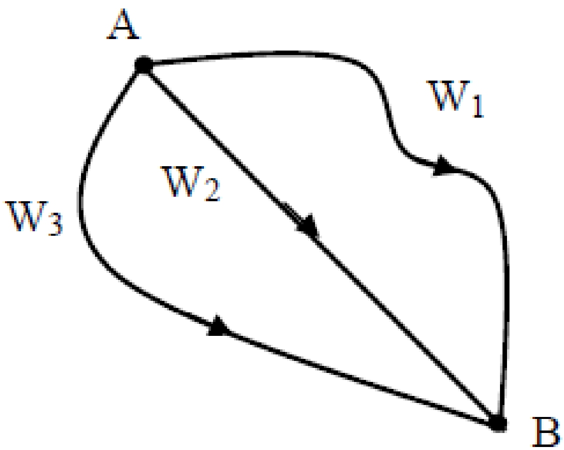
Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position *A* et une autre position *B* est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum w_{A-B}(\vec{F}_{ext})$$

Forces conservatives

une force est dite **conservative** (on dit aussi que la force **dérive d'un potentiel *U***) lorsque son travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ A et du point d'arrivée B .



$$W_1\left(\vec{F}\right)_A^B = W_2\left(\vec{F}\right)_A^B = W_3\left(\vec{F}\right)_A^B$$

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}_3$$

On vérifie qu'une force est conservative de deux façons différentes:

1) $\overrightarrow{rot}\ \vec{F} = \vec{0}$

2) Trouver une fonction *U* telle que $\vec{F} = -grad\,(U)$

Exemples de forces conservatives: force gravitationnelle, force élastique.

Exercice 07 :

Dans un référentiel $\mathcal{R}(Oxy)$, une particule est astreinte à se déplacer entre deux points $O(0,0)$ et $B(3,3)$ sous l'action d'une force :

$$\vec{F} = 2xy^2\vec{\imath} + 2x^2y\vec{\jmath}$$

1. Cette force est-elle conservative ?
2. Calculer le travail effectué par la force $\vec{F}$ si la particule décrit du point O au point B les chemins suivants :

a. Le segment OB ;

b. Le long de l'axe des X de O au point $A(3,0)$ puis parallèlement à l'axe des Y jusqu'au point B.

c. Conclure.

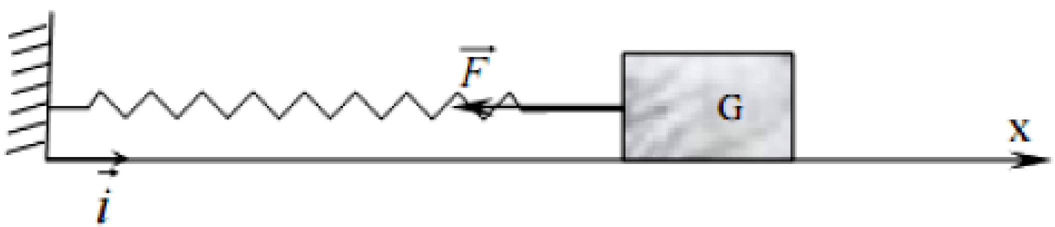
Energie potentielle

Le travail des forces conservatives peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état (notée précédemment *U*) appelée énergie potentielle *Ep*

$$W_{AB}(\vec{F}_c) = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$$

Exemple

✓ *Force élastique*



$$\vec{F} = -k\,x\vec{i}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_p}{dx} = k\,x$$

$$\Rightarrow \quad E_p = \int k\,x\,dx = \frac{1}{2}k\,x^2 + cste$$

Energie mécanique

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatives et non conservatives. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum w_{A-B}\left(\overrightarrow{F_C}\right) + \sum w_{A-B}\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)$$

$\overrightarrow{F_C}$: Forces conservatives. $\overrightarrow{F_{NC}}$: Forces non conservatives

Alors $E_c(B) - E_C(A) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) + \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$

puisque $\sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_C}) = \left(E_p(A) - E_p(B)\right)$

il vient $E_c(B) + E_p(B) - \left(E_C(A) + E_p(A)\right) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$

On introduit une nouvelle quantité qu'on va l'appeler *Energie Total* du système

Symbolisée par (E), telle que,

$$E = E_c + E_p = Energie\,Cinétique + Energie\,Potentielle$$

Alors, entre les deux points A et B

$$E(B) - E(A) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

- ✓ **Théorème de l'énergie mécanique**

La variation de l'énergie mécanique d'un système, en mouvement entre deux points A et B, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatives appliquées à ce système,

$$E(B) - E(A) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

Cependant, lorsque le système est isolé (c'est dire, il ne subit aucune force extérieure non conservative) l'énergie mécanique se conserve

$$\Delta E = E(B) - E(A) = 0$$

$$E_P + E_C = \text{constante} \qquad \Delta E_P = -\Delta E_C$$

Travail et énergie mécanique

COMPRENDRE: Lois et modèles

Temps, mouvement et évolution