Série de TD n° 02 : Ensembles et relations

Exercice n° 1.

1. Soit $F = \{a, b, c\}$ un ensemble.
   (a) Peut-on écrire :
   $$a \in F,\ a \subset F,\ \{b\} \in F,\ \{b\} \subset F,\ \emptyset \in F,\ \emptyset \subset F?$$
   (b) Décrire les ensembles suivants : $\mathcal{P}(F)$ et $F \times F$.
2. Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Montrer que
   (a) $A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A$.
   (b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
   (c) $C_E^{(A\cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.

Exercice n° 2.

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans $E = \{0, 3, 4, 5\}$ par son graphe :
$$G = \{(0,0), (0,4), (0,5), (3,3), (3,5), (4,0), (4,4), (5,0), (5,3), (5,5)\}.$$

1. Dessiner le graphe représentatif de $\mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ?

Exercice n° 3.

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire Δ par :
$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x \,\Delta\, y \Longleftrightarrow x + y \text{ est pair.}$$

1. Montrer que Δ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les classes d'équivalence de 0 et 1.
3. Donner l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\Delta$.

Exercice n° 4.

On définit sur $\mathbb{N}^2$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :
$$\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{N}^2,\ (a, b)\mathcal{S}(a', b') \Longleftrightarrow a + b' = b + a'.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 1)$.

Exercice n° 5.

On définit sur $]1, +\infty[$ la relation $\mathcal{T}$ par :
$$\forall x, y \in]1, +\infty[,\ x\mathcal{T}y \Longleftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre sur $]1, +\infty[$.
2. Cet ordre est-il total ?

Exercice n° 6.

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\mathcal{S}$ par :
$$\forall\,(a, b)\,, (c, d) \in \mathbb{R}^2,\ (a, b)\,\mathcal{S}\,(c, d) \Longleftrightarrow a \leq c \text{ et } b \leq d.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
2. Cet ordre est-il total ?