Université A/ Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique
Première année Licence

Année universitaire 2020-2021
Janvier 2021

Série de TD N° 1 d'Algèbre 1

Exercice 1: Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

(a) $[(-3)^2 = 9] \wedge (\sqrt{9} = -3)$; (b) $(|-8| = -8) \vee (\sqrt{36} = 6)$;

(c) $\exists\, x \in R,\ x^2 = -9$; (d) $\exists\, x \in R,\ (x-1)(x+3) < 0$;

(e) $\forall x \in [3, +\infty[,\ x^2 \geq 9$; (f) $\forall x \in R,\ (x-1)(x+1) \neq 0$;

(g) $\forall x \in R,\ \exists\, y \in R,\ x^2 < y$; (h) $\exists\, y \in R,\ \forall x \in R,\ x^2 < y$.

Exercice 2: Exprimer les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et répondre aux questions :

(1) Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
(2) Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
(3) Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
(4) Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair ?

Exercice 3: Écrire les expressions suivantes sous forme normale conjonctive et puis sous forme normale disjonctive.

$$\overline{A \vee (\overline{B} \wedge C)}$$

$$(\overline{A} \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B)$$

$$(A \vee \overline{B}) \wedge (A \vee \overline{B})$$

$$(A \wedge \neg(B \vee \neg C) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow (A \wedge B))$$

Exercice 4:

1) Montrer par *table de vérité* que:
   $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$
   $[P \vee (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$

2) Montrer par raisonnement *direct* que:
   " $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$ "
   " $\forall n \in N^*,\ 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 1$ est un carré "

3) Démontrer en raisonnant par *contraposée* que:
   Soit $n \in N^*$: [Si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8] $\Rightarrow$ n est pair
   Soient $x, y \in R$: $(xy - 1)(x - y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2 + y + 1) \neq y(x^2 + x + 1)$

Soient x, y $\in$ R: $[(x \neq 11) \wedge (y \neq -10)] \Rightarrow (xy + 10x - 11y - 10 \neq 100)$

4) Montrer par un *contre exemple* que les propositions suivantes sont fausses:
   (n est un nombre pair) $\Rightarrow$ (n^2 +1 est pair)
   $\forall n \in N, (3n - 7) \in N$

5) Montrer par *l'absurde* que:
   Soient x, y $\in$ R. $(x \neq y) \Rightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$
   $\forall\ x \in R*,\ \sqrt{9 + x^5} \neq 3 + \frac{x^5}{6}$
   $\forall n \in N$, n^2 pair $\Rightarrow$ n est pair

6) Montrer par *récurrence* que:
   $\forall\ n \in N^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   $\forall n \in N^*$, 17 divise ($3 \times 5^{2n-1} + 3^{3n-2}$)
   $\forall n \in N$, $(1 + x)^n \geq 1 + n\,x$, ou` x est un réel positif.