TD N°2 : Moments Cinétiques

Exercice 1 :

L'action des opérateurs $L_{\pm}$ sur les fonction propres f_l^m est donnée par

$$L_{\pm} f_l^m = A_l^m f_l^{m\pm 1}$$

où A_l^m est une certaine constante. Si les fonctions f_l^m sont normalisées, retrouver l'expression de A_l^m .

Exercice 2 :

Deux particules de masse m sont fixées aux extrémités d'une tige rigide de longueur a et de masse nulle. Le système est libre de tourner en trois dimensions autour du centre de la tige (le centre de la tige est lui-même fixe).

1. Montrer que les énergies permises de ce rotateur rigide sont de la forme :

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}, \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

Indication : Exprimer d'abord l'énergie classique en fonction du moment cinétique.

2. Quelle sont les fonctions propres normalisées pour ce système ? Quel est le degrés de dégénérescence du $n^{\text{ème}}$ niveau d'énergie ?

Exercice 3 :

Une fonction d'onde est donnée par :

$$\psi(\theta, \phi) = N \sin \theta \cos \phi$$

1. Écrire cette fonction d'onde en termes d'harmonique sphériques.
2. Trouver la constante de normalisation N .
3. Quelle est la valeur moyenne de L^2 sur cet état ?
4. L_z est mesurée, quelles sont les résultats possibles de la mesure ? Quelle sont les probabilités respectives ?

Exercice 4 :

Un système physique est décrit par la fonction d'onde :

$$\psi(x, y, z) = \frac{N}{r^2}(xy + yz)$$

Si L^2 est mesurée, quelle est la valeur trouvée ? Quelle la probabilité de trouver $2\hbar$ si on mesure L_z ?

Exercices supplémentaires

Exercice 5 :

Utiliser la formule qui donne l'expression des harmonique sphériques en termes des fonctions de Legendre associées pour construire Y_0^0 et Y_2^1 , vérifier qu'elles sont normalisées et orthogonales. Construire l'expression de Y_l^l .

Exercice 6 :

Une particule est décrite par la fonction d'onde :

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{-iy + z}{r}$$

1. Quel est le moment cinétique de la particule ?
2. On suppose que L_z est mesurée, quels sont les résultats possible de la mesure ? Quelle est la probabilité associée à chaque résultat ?
3. Trouver $\langle L_- \rangle$.

Exercice 7 :

Une particule est décrite par la fonction d'onde :

$$\psi = N \left[\frac{2}{\sqrt{5}} Y_1^0 + \frac{1}{2} Y_1^{-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} Y_1^1 \right]$$

1. Trouver la constante de normalisation N . Trouver le résultat de l'action de L_- sur cet état.
2. L_z est mesurée, quelles sont les probabilités de trouver $+\hbar, 0, -\hbar$?