TD N°3 : Compléments Mathématiques

Exercice 1 :

On considère un opérateur Q dont les vecteurs propres forment une base orthonormée de l'espace des états :

$$Q|e_n\rangle = q_n|e_n\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Montrer que cet opérateur peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Q = \sum_n q_n |e_n\rangle\langle e_n| \quad (\text{représentation spectrale de } Q)$$

Exercice 2 :

On dit qu'un opérateur Q est anti-hermitien si :

$$Q^+ = -Q$$

1. Montrer que la valeur moyenne d'un opérateur anti-hermitien est imaginaire.
2. Montrer que le commutateur de deux opérateurs hermitiens est anti-hermitien. Que peut-on dire du commutateur de deux opérateurs anti-hermitiens ?

Exercice 3 :

On considère un système physique ne possédant que deux états linéairement indépendants :

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'état du système le plus général est une combinaison linéaire de la forme :

$$|s\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{avec } |a|^2 + |b|^2 = 1$$

L'hamiltonien du système est exprimé sous la forme matricielle suivante :

$$H = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}$$

où h et g sont des constantes réelles.

Si l'état du système à $t = 0$ est $|1\rangle$, que sera l'état du système à un instant ultérieur t ?

Exercice 4 :

On considère un espace des états engendré par la base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Deux kets $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ sont donnés par :

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

1. Construire $\langle\alpha|$, $\langle\beta|$ dans la base duale $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.
2. Trouver $\langle\alpha|\beta\rangle$ et $\langle\beta|\alpha\rangle$ et vérifier que $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$.
3. Trouver l'expression matricielle de l'opérateur $A = |\alpha\rangle\langle\beta|$. Est-il hermitien ?

Exercice 5 :

L'hamiltonien d'un système physique à deux niveaux est donné par :

$$H = \epsilon (|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

où $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ est une base orthonormée et ϵ est un nombre ayant la dimension d'une énergie. Trouver ces valeurs propres et ses vecteurs propres (comme une combinaison linéaire de $|1\rangle$ et $|2\rangle$). Trouver la représentation matricielle de H .

Exercice 6 :

Soit un espace des états $\mathcal{E}$ à deux dimensions, muni d'une base orthonormée $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ tel que :

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On considère un opérateur X qui agit dans $\mathcal{E}$ tel que :

$$\begin{aligned} X|a_1\rangle &= |a_1\rangle + 2i|a_2\rangle \\ X|a_2\rangle &= -2i|a_1\rangle + |a_2\rangle \end{aligned}$$

1. Trouver la représentation matricielle de X .
2. Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 et les vecteurs propres normalisés correspondants $|\mu_1\rangle$ et $|\mu_2\rangle$ de l'opérateur X .
3. Montrer que $|\mu_1\rangle$ et $|\mu_2\rangle$ sont orthogonaux.
4. Trouver la représentation matricielle des opérateurs $P_1 = |\mu_1\rangle\langle\mu_1|$ et $P_2 = |\mu_2\rangle\langle\mu_2|$. Montrer que P_1 et P_2 sont des projecteurs.
5. Vérifier que :
 - $P_1 + P_2 = I$, la matrice identité.
 - $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = X$.
 - $\lambda_1^2 P_1 + \lambda_2^2 P_2 = X^2$.
 - $\frac{1}{\lambda_1} P_1 + \frac{1}{\lambda_2} P_2 = X^{-1}$. L'opérateur inverse de X .

Exercice 7 :

On considère un système physique avec un espace des états $\mathcal{E}$ de dimensions 3. Une base orthonormée de l'espace des états est choisit de sorte que l'hamiltonien H est représentée par la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Quels sont les résultats possibles lorsque l'énergie du système est mesurée ?
2. Une particule est dans l'état $|\psi\rangle$ représenté dans cette base par $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$. Trouver $\langle H \rangle$, $\langle H^2 \rangle$ et ΔH .

Exercice 8 :

On considère un système physique avec un espace des états $\mathcal{E}$ de dimensions 3, muni d'une base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ tel que :

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- I) l'hamiltonien H du système est une observable qui agit dans $\mathcal{E}$ de sorte que :

$$\begin{aligned} H|u_1\rangle &= |u_1\rangle - |u_2\rangle \\ H|u_2\rangle &= -|u_1\rangle + |u_2\rangle \\ H|u_3\rangle &= -|u_3\rangle \end{aligned}$$

1. Trouver la représentation matricielle de H .
2. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres normalisés correspondants de l'hamiltonien H .
3. Quels sont les résultats possibles lorsque l'énergie du système est mesurée ?
4. L'état du système est décrit par le ket $|\psi\rangle$ représenté par $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$. Trouver $\langle H \rangle$, $\langle H^2 \rangle$ et ΔH .

- II) Une observable A est représentée dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On effectue une mesure de l'énergie du système et on trouve la valeur -1 . Juste après, On procède à une mesure de A . Donner les résultats possibles et la probabilité correspondant à chaque résultat obtenu.
2. Calculer ΔA .

Exercice 9 :

On considère trois observables L , M et N vérifiant la relation de commutation $[L, M] = iN$ dans l'image de Schrödinger. Montrer que cette relation de commutation reste toujours vérifiée dans l'image de Heisenberg.

Exercice 10 :

1. Trouver la forme, dans la représentation de Heisenberg, des opérateurs de position X et d'impulsion P d'une particule libre à une dimension.
2. Trouver la forme, dans la représentation de Heisenberg, des opérateurs de position X et d'impulsion P d'une particule soumise à un potentiel d'oscillateur harmonique à une dimension.
3. On considère une fonction, appelée fonction de corrélation, défini par :

$$C(t) = \langle x(t)x(0) \rangle$$

où $x(t)$ est l'opérateur de position dans l'image de Heisenberg. Évaluer explicitement cette fonction pour l'état fondamental d'un oscillateur harmonique à une dimension.

Exercice 11 :

On considère un espace des états à deux dimensions engendré par la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Nous avons un mélange statistique préparé de façon que $3/4$ des systèmes sont dans l'état $|A\rangle$ et $1/4$ des systèmes sont dans l'état $|B\rangle$:

$$|A\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle \quad , \quad |B\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$$

1. Écrire l'opérateur densité associé à chaque état pure $|A\rangle$ et $|B\rangle$.
2. Écrire l'opérateur densité associé au mélange statistique.
3. Trouver l'expression matricielle de l'opérateur densité dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.
4. Calculer sa trace.
5. Si une mesure est effectuée, quelle la probabilité de trouver le système dans l'état $|0\rangle$? Quelle la probabilité de le trouver dans l'état $|1\rangle$?
6. Quelle la probabilité de trouver le système dans l'état $|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$? Quelle la probabilité de le trouver dans l'état $|-\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle - |1\rangle)$?

Exercices Supplémentaires :

Exercice 12 :

Une grandeur physique est représentée par une observable A ayant deux vecteurs propres normalisés $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ correspondant respectivement aux deux valeurs propres a_1 et a_2 . Une autre grandeur physique est représentée par l'observable B possédant deux vecteurs propres normalisés $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ avec les valeurs propres b_1 et b_2 . Les vecteurs propres sont reliés par :

$$|\psi_1\rangle = \frac{3|\phi_1\rangle + 4|\phi_2\rangle}{5} \quad , \quad |\psi_2\rangle = \frac{4|\phi_1\rangle - 3|\phi_2\rangle}{5}$$

1. L'observable A est mesurée et la valeur a_1 est obtenue, quelle est l'état du système immédiatement après cette mesure ?
2. Si l'observable B est mesurée, quelles sont les résultats possibles et les probabilités correspondant à chaque résultats ?
3. Juste après la mesure de B , A est mesurée une deuxième fois, quelle est la probabilité de trouver a_1 ?

Exercice 13 :

Montrer que la norme d'un ket $|\psi(t)\rangle$ est conservée au cours du temps, sachant que $|\psi(t)\rangle$ est solution de l'équation de Schrödinger.

Exercice 14 :

L'hamiltonien d'un certain système physique à trois niveaux est donné par la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

où a , b et c sont des nombres réels (on assume que $a - c \neq \pm b$).

1. Si à $t = 0$ le système est dans l'état :

$$|s(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

trouver $|s(t)\rangle$.

2. Si à $t = 0$ le système est dans l'état :

$$|s(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

trouver $|s(t)\rangle$.

Exercice 15 :

L'hamiltonien d'un certain système physique à trois niveaux est donné par la matrice :

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Deux autres observables, A et B , sont représentées par les matrices :

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où ω , λ et μ sont des nombres réels positifs.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres normalisés de H , A et B .
2. On suppose que le système est décrit à $t = 0$ par :

$$|s(0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

avec $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$. Trouver la valeur moyenne (à $t = 0$) de H , A et B .

3. Trouver $|s(t)\rangle$. Si l'énergie du système est mesurée à un instant t , quelles sont les valeurs possibles et avec quelles probabilités ?