TD N°1 : Dynamique Quantique

Exercice 1 :

1. Trouver la forme, dans la représentation de Heisenberg, des opérateurs de position X et d'impulsion P d'une particule libre à une dimension.
2. Trouver la forme, dans la représentation de Heisenberg, des opérateurs de position X et d'impulsion P d'une particule soumise à un potentiel d'oscillateur harmonique à une dimension.
3. On considère une fonction, appelée fonction de corrélation, défini par :

$$C(t) = \langle\ x(t)x(0)\ \rangle$$

où $x(t)$ est l'opérateur de position dans l'image de Heisenberg. Évaluer explicitement cette fonction pour l'état fondamental d'un oscillateur harmonique à une dimension.

Exercice 2 :

On considère trois observables L, M et N vérifiant la relation de commutation $[L, M] = iN$ dans l'image de Schrödinger. Montrer que cette relation de commutation reste toujours vérifiée dans l'image de Heisenberg et de Dirac.

Exercice 3 :

1. Une particule de masse m est piégée à une dimension dans un puits de potentiel infini de largeur L

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant L \\ \infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Rappeler les valeurs propres et les fonctions propres de l'hamiltonien du système.

2. Le propagateur d'une particule de masse m soumise, à une dimension, à un potentiel donné ne dépendant pas du temps, est de la forme

$$K(x, x', E) = \int_0^{\infty} K(x, t, x', 0) \quad e^{i\frac{Et}{\hbar}}\, dt = A \sum_n \frac{\sin(nrx)\sin(nrx')}{E - \frac{\hbar^2 r^2}{2m} n^2}$$

où A est une constante, n un nombre entier positif.

a- Quelle la forme du potentiel ?

b- Déterminer la constante A en termes de paramètres décrivant le système $(m, r, \cdots)$.

Exercice 4 :

On considère une particule de masse m et de charge q se déplaçant dans le plan xy. Elle est soumise à un champs magnétique constant $\overrightarrow{B} = B\vec{e}_z$. L'hamiltonien du système est donné par :

$$H = \frac{1}{2m}\left(\pi_x^2 + \pi_y^2\right) = \frac{1}{2m}\left(\overrightarrow{P} - q\overrightarrow{A}\right)^2 \qquad ; \quad \text{on pose } \omega = \frac{qB}{m}$$

1. Évaluer $[\pi_x, \pi_y]$.
2. En supposant que le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ ne dépend pas du temps. Utiliser le théorème d'Ehrenfest pour calculer $\dfrac{d\langle\pi_x\rangle_t}{dt}$ et $\dfrac{d\langle\pi_y\rangle_t}{dt}$.
3. En résolvant ces équations, exprimer $\langle\pi_x\rangle_t$ et $\langle\pi_y\rangle_t$ sur un état arbitraire en termes de valeurs moyenne initiales (à $t = 0$).
4. Exprimer $\langle x\rangle_t$ et $\langle y\rangle_t$ en termes de valeurs moyenne initiales (à $t = 0$).
5. Comparer avec le mouvement classique.

Exercice 5 :

Une particule , de masse m et de charge q, est en mouvement en présence d'un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\vec{e}_z$, on choisit le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ de la forme : $A_x = -\dfrac{yB}{2}$, $A_y = \dfrac{xB}{2}$, $A_z = 0$.

1. Évaluer $[\pi_x, \pi_y]$.
2. Exprimer l'hamiltonien de la particule en fonction de π_x, π_y et P_z.
3. En comparant l'expression de l'hamiltonien H et la relation de commutation de la $1^{ère}$ question avec l'oscillateur harmonique à une dimension, montrer qu'on peut écrire les valeurs propres de H sous la forme :

$$E_{k,n} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(\frac{|qB|\hbar}{m}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

où k est un réel et $\hbar k$ est une valeur propre de P_z, n est un entier positif ou nul.

Exercices supplémentaires :

Exercice 6 :
Montrer que la norme d'un ket $|\psi(t)\rangle$ est conservée au cours du temps, sachant que $|\psi(t)\rangle$ est solution de l'équation de Schrödinger.

Exercice 7 :

1. Montrer que la valeur moyenne d'un opérateur A sur un ket $|\alpha(t)\rangle$ tel que :

$$\begin{cases} |\alpha(t)\rangle = U(t,t_0)|\alpha(t)\rangle \\ \\ i\hbar \dfrac{d}{dt}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle \quad (H \quad \text{hamiltonien du système}) \end{cases}$$

   peut s'écrire sous la forme : $\dfrac{d}{dt}\langle A\rangle = \dfrac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle \dfrac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$
2. Montrer que la valeur moyenne de l'opérateur $\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{P}$ sur un ket $|\psi\rangle$ qui est ket propre d'un hamiltonien H avec la valeur propre E ($\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{P}$ ne dépendent pas du temps dans l'image de Schrödinger), est constante (indépendante du temps).

Exercice 8 :

1. Montrer que l'opérateur $S(t,t_0) = e^{i\frac{H_0(t-t_0)}{\hbar}} U(t,t_0)$ est l'opérateur de transformation entre l'image de Heisenberg et l'image d'interaction.
2. Montrer que cet opérateur est solution de l'équation différentielle $i\hbar\dfrac{d}{dt}S(t,t_0) = V_I(t)S(t,t_0)$ avec la condition initiale $S(t_0,t_0) = 1$.
3. Déterminer explicitement l'opérateur $S(t,0)$ pour un oscillateur harmonique à une dimension de masse m et de charge q placé dans un champ électrique uniforme et constant $\overrightarrow{E}$, avec

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - qEx \quad ; \quad H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad ; \quad V = -qEx$$

Exercice 9 :
L'hamiltonien d'un système physique est donné dans la représentation de Schrödinger par $H = \omega S_z$, où S_z est la composante du spin $\overrightarrow{S}$ suivant l'axe oz et ω une constante réelle.

1. Écrire les équation de mouvement des observables S_x, S_y et S_z dans la description de Heisenberg.
2. Retrouver la solution de ces équations de mouvement.

Exercice 10 :
Une particule de spin 1/2 est placée dans une région où subsiste un champ magnétique $\overrightarrow{B}(t)$. L'hamiltonien du système est

$$H = -\gamma \overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{B}(t)$$

où $\overrightarrow{S}$ est le spin de la particule et $\overrightarrow{B}(t) = \overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_1(t)$ avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{B}_0 = -\dfrac{\omega_0}{\gamma}\vec{e}_z \\ \overrightarrow{B}_1 = -\dfrac{\omega_1}{\gamma}(\cos\omega t \quad \vec{e}_x + \sin\omega t \quad \vec{e}_y) \end{cases}$$

L'état du système est $|\psi(t)\rangle$ tel que :

$$|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$$

1. Écrire l'équation de Schrödinger dépendant du temps du système.
2. Écrire l'hamiltonien sous forme matricielle.
3. En déduire le système d'équation vérifié par $a_+(t)$ et $a_-(t)$.
4. On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} b_+(t) &=& e^{i\dfrac{\omega t}{2}} a_+(t) \\ \\ b_-(t) &=& e^{-i\dfrac{\omega t}{2}} a_-(t) \end{cases}$$

   trouver le nouveau système d'équation que vérifie $b_+(t)$ et $b_-(t)$, montrer qu'il peut se mettre sous la forme :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b_+(t) \\ b_-(t) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \Delta & \omega_1 \\ \omega_1 & -\Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_+(t) \\ b_-(t) \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad \Delta = \omega_0 - \omega$$

5. On donne $|\widetilde{\psi}(t)\rangle = b_+(t)|+\rangle + b_-(t)|-\rangle$. Montrer que le système d'équations obtenu dans la question (4) peut se mettre sous la forme d'une équation de Schrödinger dépendant du temps avec un hamiltonien $\widetilde{H}$ indépendant du temps, ie, $i\hbar\dfrac{d}{dt}|\widetilde{\psi}(t)\rangle = \widetilde{H}|\widetilde{\psi}(t)\rangle$. Donner la forme matricielle de $\widetilde{H}$.
6. Chercher les vecteurs propres E_1 et E_2 de $\widetilde{H}$ et les vecteurs propres correspondant $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$.
7. Montrer que si l'état initial de la particule est $|\widetilde{\psi}(0)\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$, alors on obtient : $|\widetilde{\psi}(t)\rangle = \lambda_1 e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}|\psi_1\rangle + \lambda_2 e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}|\psi_2\rangle$ où $|\widetilde{\psi}(t)\rangle$ est exprimé dans la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$.
8. On prépare le système dans l'état $|\widetilde{\psi}(0)\rangle = |+\rangle$. Exprimer l'état $|\widetilde{\psi}(0)\rangle$ dans la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$. Quelle est la probabilité $P(t)$ de trouver, à l'instant t, le système dans l'état $|-\rangle$?

<u>Exercice 11</u> :

En électrodynamique classique les potentiels $\overrightarrow{A}$ et ϕ ne sont pas déterminés de façon unique ; les quantités physiques sont les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.

1. Montrer que les potentiels

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\ , \quad \overrightarrow{A}' = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\Lambda$$

   (où Λ est une fonction réelle arbitraire de la position et du temps) conduisent aux mêmes champs que ϕ et $\overrightarrow{A}$. L'équation précédente est appelée transformation de jauge et la théorie est dite invariante de jauge.
2. En mécanique quantique, les potentiel jouent un rôle plus direct, et il est intéressant de savoir si la théorie reste invariante de jauge. Montrer que la fonction d'onde

$$\psi' = e^{iq\Lambda/\hbar}\psi$$

   est solution de l'équation de Schrödinger (décrivant une particule de masse m et de charge q en présence d'un champ électromagnétique) exprimée avec ϕ' et $\overrightarrow{A}'$, ψ est solution de l'équation de Schrödinger exprimée avec ϕ et $\overrightarrow{A}$. Puisque ψ' diffère de ψ d'un facteur de phase, elle représente le même état physique, ainsi, la théorie est invariante de jauge.