

Série de TD N°1

Exercice N°1

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément s'ils existent :

1. $E_1 = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 3\}$
2. $E_2 = \{x \in \mathbb{R} | x^3 > 3\}$
3. $E_3 = \{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $E_4 = \{\frac{-1+2n}{3+n}, n \in \mathbb{N}^*\}$
5. $E_5 = \{\frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 2\}$

Exercice N°2

Soient A et B deux parties non vides bornées de \mathbb{R} . Montrer que :

1. Si $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.
2. $\sup (A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf (A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

Exercice N°3

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, montrer les inégalités suivantes :

1. Première inégalité triangulaire

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

2. Seconde inégalité triangulaire

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Exercice N°4

Soit E la fonction partie entière sur \mathbb{R} .

1. Donner $E(1, 2)$, $E(-4)$, $E(\sqrt{8})$ et $E(-4\pi)$.
2. Démontrer les résultats suivants :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies E(x) \leq E(y)$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x + y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}$.
- $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.