Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{\text{ère}}$ année ST

Décembre 2020

Corrigé de la série n0 2 de Maths 1

Exercice 1. I) Soit $F = \{a, b, c\}$ un ensemble.

a)

$a \in F$	oui
$a \subset F$	non
$\{b\} \in F$	non
$\{b\} \subset F$	oui
$\varnothing \in F$	non
$\varnothing \subset F$	oui

b) Décrire les ensembles : $\mathcal{P}(F)$ et $F \times F$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(F) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \\ F \times F &= \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}. \end{aligned}$$

II) Soient E un ensemble, A, B et C, trois parties de E.

a) si $A \subset B$ Alors $C_E^B \subset C_E^A$

Soit $x \in C_E^B$,

$$\begin{aligned} x \in C_E^B &\Rightarrow (x \notin B \wedge x \in E) \\ &\Rightarrow (x \notin A \wedge x \in E) \text{ car } A \subset B \\ &\Rightarrow x \in C_E^A. \end{aligned}$$

Donc si $A \subset B$ alors $C_E^B \subset C_E^A$.

b) Soit $(x, y) \in (A \cup B) \times C$,

$$\begin{aligned} (x,y) &\in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \ \wedge \ y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \vee x \in B) \ \wedge \ y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge y \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \vee (x,y) \in (B \times C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C). \end{aligned}$$

Donc $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

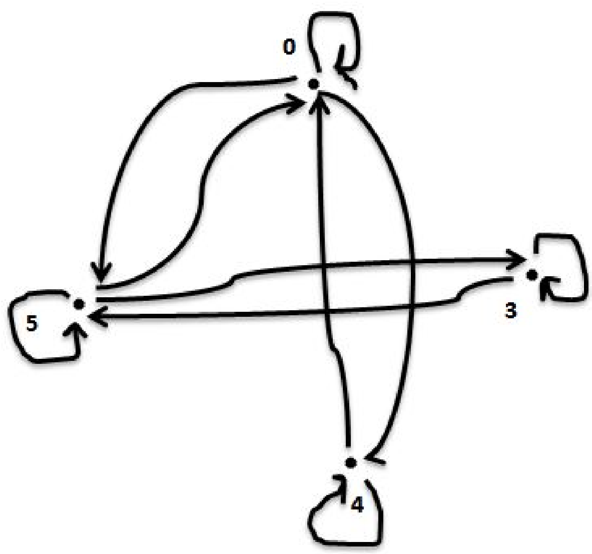
c) $C_E^{(A \cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.

Soit $x \in C_E^{(A \cap B)}$,

$$\begin{aligned} x &\in C_E^{(A \cap B)} \Leftrightarrow (x \notin A \cap B) \wedge (x \in E) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B) \wedge (x \in E) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \in E) \vee (x \notin B \wedge x \in E) \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^A \vee x \in C_E^B \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^A \cup C_E^B. \end{aligned}$$

Donc $C_E^{(A \cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.

Exercice 2. 1. le graphe representatif de $\mathcal{R}$



2. $\mathcal{R}$ est réflexive car on a $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$

$$0\mathcal{R}0,\ 3\mathcal{R}3,\ 4\mathcal{R}4 \text{ et } 5\mathcal{R}5.$$

3. $\mathcal{R}$ est symétrique car on a $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

$$\begin{aligned} 0\mathcal{R}0 &\Rightarrow 0\mathcal{R}0 \\ 0\mathcal{R}4 &\Rightarrow 4\mathcal{R}0 \\ 3\mathcal{R}3 &\Rightarrow 3\mathcal{R}3 \\ 4\mathcal{R}4 &\Rightarrow 4\mathcal{R}4 \\ 5\mathcal{R}5 &\Rightarrow 5\mathcal{R}5 \\ 0\mathcal{R}5 &\Rightarrow 5\mathcal{R}0 \\ 3\mathcal{R}5 &\Rightarrow 5\mathcal{R}3. \end{aligned}$$

4. $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique car par exemple, on a $0\mathcal{R}4$ et $4\mathcal{R}0$ mais $0 \neq 4$.
5. $\mathcal{R}$ n'est pas transitive car par exemple, on a $0\mathcal{R}5$ et $5\mathcal{R}3$ mais $0\not\mathcal{R}3$.

Exercice 3. a) Sur $\mathbb{Z}$, on considere la relation $\triangle$ definie par :

$$x \triangle y \Leftrightarrow x + y \text{ est pair},$$

la relation $\triangle$ peut s'écrire :

$$x \triangle y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k.$$

Montrons que $\triangle$ est une relation d'equivalence.

i) Réflexivité de $\triangle$: Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a

$$x + x = 2x, \quad \exists k = x$$

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x\triangle\, x$. D'ou la réflexivité de $\triangle$.

ii) Symétrie de $\triangle$: soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \triangle y$. Montrons que $y \triangle x$. On a

$$\begin{aligned} x \triangle y &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y + x = 2k \\ &\Rightarrow y \triangle x. \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x \triangle y \Rightarrow y \triangle x$. D'où la symétrie de $\triangle$.

iii) Transitivite de $\triangle$: Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x \triangle y$ et $y \triangle z$. Montrons que $x \triangle z$. On a

$$\left\{\begin{array}{c} x \triangle y \\ \text{et} \\ y \triangle z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k ... (1) \\ \text{et} \\ \exists k_1 \in \mathbb{Z} : y + z = 2k_1 ... (2) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow \exists k, k_1 \in \mathbb{Z} : x + y + y + z = 2k + 2k_1 \\ &\Rightarrow \exists k, k_1 \in \mathbb{Z} : x + z = 2k + 2k_1 - 2y \\ &\Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} : x + z = 2k_2 \text{ tel que } k_2 = 2\,(k + k_1 - y) \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x \triangle z. \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x \triangle y$ et $y \triangle z \Rightarrow x \triangle z$. D'où la transitivité de $\triangle$.
De (i), (ii), (iii) on a $\triangle$ est une relation d'equivalence.

b) Déterminons la classe d'équivalence de 0 et 1.

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z}, x \triangle 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{1} &= \{x \in \mathbb{Z}, x \triangle 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x + 1 = 2k\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k - 1\} \end{aligned}$$

.

c) Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\triangle$.

Par définition, l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\triangle$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\triangle$. Pour identifier cet ensemble, on va déterminer quelque classes d'équivalences.

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\} \\ \overline{1} &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k-1\}\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}\overline{2} &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k-2\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2(k-1)\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k' \in \mathbb{Z} : x = 2k'\} \\ &= \overline{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{3} &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k-3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k-2-1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2(k-1)-1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k' \in \mathbb{Z} : x = 2k'-1\} \\ &= \overline{1}\end{aligned}$$

On peut remarquer que tous les éléments en relation avec 0 sont les entiers pairs, tandis que tous les éléments en relation avec 1 sont les entiers impairs. Donc

$$\mathbb{Z}/\triangle = \{\overline{0}, \overline{1}\}.$$

Exercice 4. a) Sur $\mathbb{N}^2$, on considere la relation $\mathcal{S}$ definie par :

$$(a,b)\,\mathcal{S}\left(a',b'\right) \Leftrightarrow a+b' = b+a' ,$$

Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'equivalence.

i) Réflexivité de $\mathcal{S}$: Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$a+b = b+a.$$

Donc $\forall\,(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\,(a,b)$. D'ou la réflexivité de $\mathcal{S}$.

ii) Symétrie de $\mathcal{S}$: soient $(a,b)\,,\left(a',b'\right) \in \mathbb{N}^2$ tels que$(a,b)\,\mathcal{S}\left(a',b'\right)$.

Montrons que $\left(a',b'\right)\mathcal{S}\,(a,b)$. On a

$$\begin{aligned}(a,b)\,\mathcal{S}\left(a',b'\right) &\Rightarrow a+b' = b+a' \\ &\Rightarrow b+a' = a+b' \quad \text{(symétrie de l'égalité)} \\ &\Rightarrow a'+b = b'+a \quad \text{(commutativité de l'addition)} \\ &\Rightarrow \left(a',b'\right)\mathcal{S}\,(a,b)\,.\end{aligned}$$

Donc $\forall\,(a,b)\,,\left(a^{'},b^{'}\right)\in\mathbb{N}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right)\Rightarrow\left(a^{'},b^{'}\right)\mathcal{S}\,(a,b)$. D'où la symétrie de $\mathcal{S}$.

iii) Transitivite de $\mathcal{S}$: Soient $(a,b)\,,\left(a^{'},b^{'}\right),\left(a^{''},b^{''}\right)\in\mathbb{N}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right)$ et $\left(a^{'},b^{'}\right)\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right)$. Montrons que $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right)$. On a

$$\left\{\begin{array}{c}(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right)\\ \text{et}\\ \left(a^{'},b^{'}\right)\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}a+b^{'}=b+a^{'}\dots(1)\\ \text{et}\\ a^{'}+b^{''}=b^{'}+a^{''}\dots(2)\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl}(1)+(2) & \Rightarrow & a+b^{'}+\left(a^{'}+b^{''}\right)=b+a^{'}+\left(b^{'}+a^{''}\right)\\ & \Rightarrow & a+b^{''}=b+a^{''}\\ & \Rightarrow & (a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right).\end{array}$$

Donc $\forall\,(a,b)\,,\left(a^{'},b^{'}\right),\left(a^{''},b^{''}\right)\in\mathbb{N}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right)$ et $\left(a^{'},b^{'}\right)\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right)\Rightarrow(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right)$.
D'où la transitivité de $\mathcal{S}$.
De (i), (ii), (iii) on a $\mathcal{S}$ est une relation d'equivalence.

b) Déterminons la classe d'équivalence de $(1,1)$.

$$\begin{array}{rcl}\overline{(1,1)} & = & \{(a,b)\in\mathbb{N}^2,\ (a,b)\,\mathcal{S}\,(1,1)\}\\ & = & \{(a,b)\in\mathbb{N}^2,\,a+1=b+1\}\\ & = & \{(a,b)\in\mathbb{N}^2,\,a=b\}.\end{array}$$

Exercice 5.

a) Sur $]1,+\infty[$, on considere la relation $\mathcal{T}$ definie par :

$$x\mathcal{T}y\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{y}{y^2+1},$$

Montrons que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre.

i) Réflexivité de $\mathcal{T}$: Soit $x\in\,]1,+\infty[$. On a

$$\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{x}{x^2+1}$$

Donc $\forall x\in\,]1,+\infty[\,,\,x\mathcal{T}\,x$. D'ou la réflexivité de $\mathcal{T}$.

ii) Antisymétrie de $\mathcal{T}$: soient $x, y \in \left]1, +\infty\right[$ tels que $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}x$. Montrons que $y{=}x$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{T}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{T}x \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \\ \text{et} \\ \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \\
&\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1} \\
&\Rightarrow x\left(y^2+1\right) = y\left(x^2+1\right) \\
&\Rightarrow xy^2 + x = yx^2 + y \\
&\Rightarrow xy^2 + x - yx^2 - y = 0 \\
&\Rightarrow xy^2 - yx^2 + x - y = 0 \\
&\Rightarrow xy\left(y-x\right) + x - y = 0 \\
&\Rightarrow -xy\left(x-y\right) + x - y = 0 \\
&\Rightarrow \left(x-y\right)\left(-xy+1\right) = 0 \\
&\Rightarrow \left(x-y\right) = 0 \vee \left(-xy+1\right) = 0 \\
&\Rightarrow x = y
\end{aligned}$$

car $x, y \in \left]1, +\infty\right[$ entraine $(-xy+1) < 0$ c-à-d $(-xy+1) \neq 0$.

Donc $\forall x, y \in \left]1, +\infty\right[$,$x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}x \Rightarrow x = y$. D'où l'antisymétrie de $\mathcal{T}$.

iii) Transitivite de $\mathcal{T}$: Soient $x, y, z \in \left]1, +\infty\right[$ tels que $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z$. Montrons que $x\mathcal{T}z$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{T}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{T}z \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \ldots (1) \\ \text{et} \\ \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{z}{z^2+1} \ldots (2) \end{array}\right. \\
(1) \text{ et } (2) &\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{z}{z^2+1} \\
&\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{z}{z^2+1} \\
&\Rightarrow x\mathcal{T}z.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in \left]1, +\infty\right[$, $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z \Rightarrow x\mathcal{T}z$. D'où la transitivité de $\mathcal{T}$.
De (i), (ii), (iii) on a $\mathcal{T}$ est une relation d'equivalence.

b) Cet ordre est-il total ?

Soit $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1}$ et alors $x\mathcal{T}y$, soit $\frac{y}{y^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$ et alors $y\mathcal{T}x$. Donc c'est une relation d'ordre total.

Exercice 6. **a)** Sur $\mathbb{R}^2$, on considere la relation $\mathcal{S}$ definie par :

$$(a, b)\, \mathcal{S}\, (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ et } b \leq d$$

Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

i) Réflexivité de $\mathcal{S}$: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$a \leq a \text{ et } b \leq b.$$

Donc $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\,(a,b)$, d'ou la réflexivité de $\mathcal{S}$.

ii) Antisymétrie de $\mathcal{S}$: soient $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(a,b)$.
Montrons que $(a,b) = (c,d)$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} (a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d) \\ \text{et} \\ (c,d)\,\mathcal{S}\,(a,b) \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} [a \leq c \text{ et } b \leq d] \\ \text{et} \\ [c \leq a \text{ et } d \leq b] \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} [a \leq c \text{ et } c \leq a] \\ \text{et} \\ [b \leq d \text{ et } d \leq b] \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \quad a = c \text{ et } b = d \\
&\Rightarrow \quad (a,b) = (c,d)\,.
\end{aligned}$$

Donc $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$,$(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(a,b) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$, d'où l'antisymétrie de $\mathcal{S}$.

iii) Transitivite de $\mathcal{T}$: Soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f)$.
Montrons que $(a,b)\,\mathcal{S}\,(e,f)$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} (a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d) \\ \text{et} \\ (c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f) \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} [a \leq c \text{ et } b \leq d] \ldots (1) \\ \text{et} \\ [c \leq e \text{ et } d \leq f] \ldots (2) \end{array}\right. \\
(1) \text{ et } (2) &\Rightarrow [a \leq c \leq e \text{ et } b \leq d \leq f] \\
&\Rightarrow a \leq e \text{ et } b \leq f \\
&\Rightarrow (a,b)\,\mathcal{S}\,(e,f)\,.
\end{aligned}$$

Donc $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f) \Rightarrow (c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f)$, d'où la transitivité de $\mathcal{S}$.
De (i), (ii), (iii) on a $\mathcal{S}$ est une relation d'equivalence.

b) Cet ordre est-il total ?

L'ordre $\mathcal{S}$ n'est pas total (il est pariel) : en effet, les deux couples $(0,8)$ et $(3,7)$ ne sont pas comparables. On a

$$\begin{aligned}
8 \quad &\not\leq \quad 7 \Rightarrow (0,8)\not{\mathcal{S}}(3,7) \\
3 \quad &\not\leq \quad 0 \Rightarrow (3,7)\not{\mathcal{S}}(0,8).
\end{aligned}$$