Chp 0 : Echantillons d'une v.a Gaussienne

I / Introduction

Une v.a X est dite $\sim N(\mu, \sigma)$ ssi sa fonction densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rq : . si $X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

. $E(X) = \mu$ $\quad Var(X) = \sigma^2$.

. X est symetrique /t à μ. ie $f(x+\mu) = f(x-\mu)$ $\quad \bar{X}_n = \quad S_n^2 = \quad S_n'^2 =$

↳ si $X \sim N(\mu, \sigma)$ alors $\bar{X}_n$ et S_n^2 sont indep^{ts}

II) loi de χ^2 à n d° de liberté

soit $X_1, \dots, X_n$ n v.a iid issues d'une v.a $X \sim N(0,1)$

La v.a $Z_n = X_1^2 + \dots + X_n^2$ suit une loi de proba de densité

$$f_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-z/2} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

On dit que $Z_n \sim \chi_n^2$. Preuve: recurrence.

On donne :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

. $\Gamma(1) = 1$. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. $\Gamma(n+1) = n!$. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

. $\Gamma(n + 1/2) = \frac{2n!}{2^{2n}\, n!} \sqrt{\pi}$

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Def : Une v.a $X \sim \gamma(p,q)$ ssi sa loi suit la densité

$$f(x) = \frac{q^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-qx}.$$

Fonction caractéristique de χ^2_n.

Pour $n \geq 1$ $\quad \varphi_n(t) = \prod_{j=1}^{n} E\left(e^{it X_j^2}\right) = \dfrac{1}{(1-2it)^{n/2}}$

Propriétés

- $E(\chi^2_n) = n$
- $Var(\chi^2_n) = 2n$.

Theorème

si $Z_1 \sim \chi^2_{n_1}$

$Z_2 \sim \chi^2_{n_2}$

si Z_1 et Z_2 sont indp^{ts} alors $Z_1 + Z_2 \sim \chi_{n_1+n_2}$.

Preuve : $\varphi_{Z_1+Z_2}(t) = \varphi_{Z_1}(t) \cdot \varphi_{Z_2}(t) = \dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$; f.c d'une $\chi^2_{n_1+n_2}$

III) Loi de Student

Theorème

si (X, Y) est un couple de v.a $X \sim N(0,1)$ $\quad Y \sim \chi^2_n$.

La v.a $U = \dfrac{X}{\sqrt{Y}}$ suit une loi de proba de densité

$$h(u) = \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}; \frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

La v.a $T = \sqrt{n} \cdot U = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit une loi de proba de densité

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} h\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

T est dite loi de student à n d°L.

Rq : La loi de Student est souvent utilisée ds le cas des petits échantillons. A partir $n > 30$, on admet que T se conduit comme une $N(0,1)$

loi de Fisher Snedecor.

Soit $X \sim \chi^2_{n_1}$ et $Y \sim \chi^2_{n_2}$, $X \perp Y$

Def:

La v.a $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ est dite v.a de Fisher Snedecor.

Ex

3) Soient deux ech $X_1, \dots, X_n$ et $Y_1, \dots, Y_m$ issus de de v.a

$X \sim N(\mu_1, \sigma)$ $\quad Y \sim N(\mu_2, \sigma)$

On pose $S_1^2 = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_1)^2$

$S_2^2 = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (\cancel{X_i} - \mu_2)^2$

Alors $U = \dfrac{n S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ et $V = \dfrac{n S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_m$

$$\frac{U/n}{V/m} \sim F(n, m)$$

Si μ_1 et μ_2 sont inconnues.

$S_1'^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

$S_2'^2 = \dfrac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (Y_i - \bar{Y})^2$

$U' = \dfrac{(n-1) S_1'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ et $V' = \dfrac{n-1}{\sigma^2} S_2'^2 \sim \chi^2_m$

Et $\dfrac{U'/n}{V'/m} = \dfrac{\left(\frac{n-1}{n}\right) S_1'^2}{\left(\frac{m-1}{m}\right) S_2'^2} \sim F(\cancel{m}-1, m-1)$

Rq: le carre d'une Student est une Fisher.

2/ Soient ~~deux~~ un éch $X_1, \dots, X_n$ d'une v.a $X \sim N(\mu, \sigma)$

La v.a $U = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n$. $\quad U = \dfrac{n S^2}{\sigma^2}$

Et si μ inconnue $V' = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \dfrac{(n-1)}{\sigma^2} S'^2 \sim \chi^2_{n-1}$

2) Soient deux échantillons $X_1, -, X_n$ et ~~$Y_1, \ldots, Y$~~ un - -

~~$Y_i \sim N(0,1)$~~ $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma^2} \sim N(0,1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

Alors $$\frac{X_i - \bar{X}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n}}} \sim T_{n-1}$$

si μ connue $$\frac{X - \mu}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n}}} \sim T_n .$$