

**Corrigé de la série de T.D. N 1 : Logique et raisonnement mathématiques**

**Exercice n° 1.** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donnons leurs négations

(a) Comme la proposition  $(\sqrt{9} = -3)$  est fausse, donc la proposition

$$[((-3)^2 = 9) \wedge (\sqrt{9} = -3)]$$

est aussi fausse.

**La négation :**

$$\overline{[( -3)^2 = 9] \wedge (\sqrt{9} = -3)} \iff [(-3)^2 \neq 9] \vee (\sqrt{9} \neq -3).$$

(b) Comme la proposition  $(\sqrt{36} = 6)$  est vraie, donc la proposition

$$[(| -8| = -8) \vee (\sqrt{36} = 6)]$$

est aussi vraie.

**La négation :**

$$\overline{[(| -8| = -8) \vee (\sqrt{36} = 6)]} \iff [| -8| \neq -8] \wedge (\sqrt{36} \neq 6).$$

(c) **La négation :**

$$\overline{[\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = -9]} \iff [\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \neq -9].$$

On a  $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0)$ , donc la proposition  $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \neq -9)$  est vraie. Par suite,

$$[\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = -9]$$

est une proposition fausse.

(d)  $[\exists x \in \mathbb{R}, \quad (x - 1)(x + 3) < 0]$  est une proposition vraie. En effet, pour  $x = 0$  par exemple, on a

$$(x - 1)(x + 3) = (0 - 1)(0 + 3) = -3 < 0.$$

**La négation :**

$$\overline{[\exists x \in \mathbb{R}, \quad (x - 1)(x + 3) < 0]} \iff [\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x - 1)(x + 3) \geq 0].$$

(e) La proposition  $[\forall x \in [3, +\infty[, \quad x^2 \geq 9]$  est vraie. En effet, soit  $x \in [3, +\infty[$ . Comme la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

est croissante, alors

$$\begin{aligned} x \geq 3 &\Rightarrow f(x) \geq f(3) \\ &\Rightarrow x^2 \geq 9. \end{aligned}$$

**La négation :**

$$\overline{[\forall x \in [3, +\infty[, \quad x^2 \geq 9]} \iff [\exists x \in [3, +\infty[, \quad x^2 < 9].$$

(f) **La négation :**

$$\overline{[\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+1) \neq 0]} \iff [\exists x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+1) = 0].$$

La proposition  $[\exists x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+1) = 0]$  est vraie. En effet, prenons  $x = 1$  par exemple, on a

$$(x-1)(x+1) = (1-1)(1+1) = 0.$$

Par suite, la proposition

$$[\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+1) \neq 0]$$

est fausse.

(g) La proposition  $[\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 < y]$  est vraie. En effet, Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $y = x^2 + 1 \in \mathbb{R}$ . Donc

$$x^2 < x^2 + 1 = y.$$

**La négation :**

$$\overline{[\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 < y]} \iff [\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 \geq y].$$

(h) **La négation :**

$$\overline{[\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 < y]} \iff [\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq y].$$

La proposition  $[\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 < y]$  est fausse. Il suffit de montrer que sa négation est vraie. En effet, Pour  $y \in \mathbb{R}$ , on pose  $x = (y + \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}$ . Donc

$$x^2 = y^2 + y + \frac{1}{4} \geq y.$$

**Exercice n° 2.** Soient  $P$ ,  $Q$  et  $R$  trois propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrons que

$$(P \implies Q) \iff (\overline{Q} \implies \overline{P}).$$

$P$	$Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \implies Q$	$\overline{Q} \implies \overline{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

On remarque de cette table de vérité que les propositions  $(P \implies Q)$  et  $(\overline{Q} \implies \overline{P})$  ont la même valeur de vérité (elles sont vraies en même temps et elles sont fausses en même temps), donc elles sont équivalentes.

2. Donnons les négations des propositions suivantes :

(a)  $P \Rightarrow Q$ ,

$$\begin{aligned} \overline{P \Rightarrow Q} &\iff \overline{\overline{P} \vee Q} \\ &\iff \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \\ &\iff P \wedge \overline{Q}. \end{aligned}$$

(b)  $P \vee (Q \wedge R)$ .

$$\begin{aligned} \overline{P \vee (Q \wedge R)} &\iff \overline{P} \wedge \overline{(Q \wedge R)} \\ &\iff \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}) \end{aligned}$$

3. Considérons la proposition

$$S : \text{''}\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2)\text{''}$$

(a) Donnons la négation de la proposition  $S$ .

$$\bar{S} : \text{''}\exists n \in \mathbb{N}, [(n^2 \neq n) \wedge (n < 2)]\text{''}.$$

(b) Montrons que la proposition  $S$  est vraie. Il suffit de montrer que la proposition  $\bar{S}$  est fautive. En effet, La proposition  $(n < 2)$  est vrai si  $n = 0$  ou  $n = 1$ . Mais dans ces deux cas, on a bien  $n^2 = n$ . C'est à dire que la proposition

$$\bar{S} : [\exists n \in \mathbb{N}, [(n^2 \neq n) \wedge (n < 2)]]$$

est fautive. Par suite, la proposition  $S$  est vraie.

**Exercice n° 3.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrons par contraposition que

$$[(n^2 - 1) \text{ n'est pas divisible par } 8] \Rightarrow [n \text{ est pair}].$$

Il s'agit de montrer que

$$[n \text{ est impair}] \Rightarrow [(n^2 - 1) \text{ est divisible par } 8].$$

On suppose que  $[n \text{ est impair}]$  et on montre que  $[(n^2 - 1) \text{ est divisible par } 8]$ . On a

$$\begin{aligned} n \text{ est impair} &\implies \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1 \\ &\implies \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\implies \exists k \in \mathbb{N} : n^2 - 1 = 4k^2 + 4k. \end{aligned}$$

On distingue deux cas : si  $[k \text{ est pair}]$ , alors  $\exists l \in \mathbb{N} : k = 2l$ . Par suite,

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= 4(2l)^2 + 4(2l) \\ &= 16l^2 + 8l \\ &= 8l', \text{ ( avec } l' = (2l^2 + l) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc  $[(n^2 - 1) \text{ est divisible par } 8]$ .

Si  $[k \text{ est impair}]$ , alors  $\exists m \in \mathbb{N} : k = 2m + 1$ . Par suite,

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= 4(2m + 1)^2 + 4(2m + 1) \\ &= 4(4m^2 + 4m + 1) + 8m + 4 \\ &= 16m^2 + 16m + 4 + 8m + 4 \\ &= 16m^2 + 24m + 8 \\ &= 8m', \text{ ( avec } m' = (2m^2 + 3m + 1) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc  $[(n^2 - 1) \text{ est divisible par } 8]$ .

Finalement,

$$[n \text{ est impair}] \Rightarrow [(n^2 - 1) \text{ est divisible par } 8].$$

2. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Montrons par contraposition que

$$(xy - 1)(x - y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2 + y + 1) \neq y(x^2 + x + 1).$$

Il s'agit de montrer que

$$x(y^2 + y + 1) = y(x^2 + x + 1) \Rightarrow (xy - 1)(x - y) = 0.$$

On suppose que  $x(y^2 + y + 1) = y(x^2 + x + 1)$  et on montre que  $(xy - 1)(x - y) = 0$ . On a

$$\begin{aligned} x(y^2 + y + 1) = y(x^2 + x + 1) &\implies xy^2 + xy + x = yx^2 + yx + y \\ &\implies xy^2 - yx^2 + x - y = 0 \\ &\implies xy(y - x) + x - y = 0 \\ &\implies (y - x)(xy - 1) = 0 \\ &\implies -(y - x)(xy - 1) = 0 \\ &\implies (xy - 1)(x - y) = 0. \end{aligned}$$

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Montrons par contraposition que

$$[(x \neq 11) \wedge (y \neq -10)] \Rightarrow (xy + 10x - 11y - 10 \neq 100).$$

Il s'agit de montrer que

$$(xy + 10x - 11y - 10 = 100) \Rightarrow [(x = 11) \vee (y = -10)].$$

On suppose que  $(xy + 10x - 11y - 10 = 100)$  et on montre que  $[(x = 11) \vee (y = -10)]$ .

On a

$$\begin{aligned} xy + 10x - 11y - 10 = 100 &\implies xy + 10x - 11y - 110 = 0 \\ &\implies x(y + 10) - 11(y + 10) = 0 \\ &\implies (y + 10)(x - 11) = 0 \\ &\implies [(y + 10) = 0] \vee [(x - 11) = 0] \\ &\implies (x = 11) \vee (y = -10). \end{aligned}$$

3. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Montrons par l'absurde que

$$(x \neq y) \Rightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1).$$

On suppose que

$$(x \neq y) \wedge (x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1)$$

On a

$$\begin{aligned} (x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1) &\implies xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \\ &\implies -2x + 2y = 0 \\ &\implies 2(y - x) = 0 \\ &\implies y - x = 0 \\ &\implies y = x \text{ (ce qui est une contradiction, car } x \neq y\text{)}. \end{aligned}$$

Par suite, on a pour  $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x \neq y) \Rightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1).$$

4. Montrons par l'absurde que la proposition

$$\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{9 + x^5} \neq 3 + \frac{x^5}{6}$$

est vraie. On suppose que

$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{9 + x^5} = 3 + \frac{x^5}{6}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{9 + x^5} = 3 + \frac{x^5}{6} &\implies 9 + x^5 = 9 + \frac{x^{10}}{36} + x^5 \\ &\implies \frac{x^{10}}{36} = 0 \\ &\implies x = 0 \text{ (ce qui est une contradiction, car } x \in \mathbb{R}^*\text{)}. \end{aligned}$$

Donc  $\bar{\mathcal{P}}$  est fausse. Par suite, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{9 + x^5} \neq 3 + \frac{x^5}{6}.$$

5. Soient  $a, b \geq 0$ . En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrons que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \implies a = b.$$

On suppose que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ et } a \neq b.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} &\implies a(1+a) = b(1+b) \\ &\implies a + a^2 = b + b^2 \\ &\implies a^2 - b^2 + a - b = 0 \\ &\implies (a-b)(a+b) + (a-b) = 0 \\ &\implies (a-b)(a+b+1) = 0 \\ &\implies a+b+1 = 0 \text{ (car } a \neq b) \\ &\implies a+b = -1 \text{ (ce qui est une contradiction, car } a, b \geq 0). \end{aligned}$$

Par suite, on a pour  $a, b \geq 0$

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \implies a = b.$$

**Exercice n° 4.** 1. Démontrons, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\sum_{k=0}^n 2^k}_{P(n)} = 2^{n+1} - 1.$$

Pour  $n = 0$ , on a

$$\sum_{k=0}^0 2^k = 2^0 = 1 \text{ et } 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^0 2^k = 2^{0+1} - 1.$$

Autrement dit,  $P(0)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $P(n)$  est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

et on montre que  $P(n+1)$  est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=1}^n 2^k + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1. \end{aligned}$$

Finalement,  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$

2. Démontrons, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, [3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}] \text{ est divisible par } 17.$$

Il s'agit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{\exists k \in \mathbb{Z} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k}_{P(n)}.$$

Pour  $n = 1$ , on a

$$3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17 = 17 \times 1,$$

Donc

$$\exists k = 1 \in \mathbb{Z} : 3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17k.$$

Autrement dit,  $P(1)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $P(n)$  est vraie, c'est à dire

$$\exists k \in \mathbb{Z} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$$

et on montre que  $P(n+1)$  est vraie, c'est à dire

$$\exists k' \in \mathbb{Z} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k'.$$

On a

$$\begin{aligned} 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} &= 3 \times 25 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \times 8 \\ &= 3 \times (8 + 17) \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \times 8 \\ &= 8(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}) + 17 \times 3 \times 5^{2n-1} \\ &= 8 \times 17k + 17 \times 3 \times 5^{2n-1} \\ &= 17k' \text{ avec } k' = (8k + 3 \times 5^{2n-1}) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Finalement,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $[3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}]$  est divisible par 17.

3. Soit  $x$  un réel positif. Démontrons, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{(1+x)^n \geq 1+nx}_{P(n)}.$$

Pour  $n = 0$ , on a

$$(1+x)^0 = 1, \text{ et } 1 + 0 \cdot x = 1.$$

Donc

$$(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x.$$

Autrement dit,  $P(0)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $P(n)$  est vraie, c'est à dire

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

et on montre que  $P(n+1)$  est vraie, c'est à dire

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

On a

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x, \text{ (car } nx^2 \geq 0). \end{aligned}$$

Finalement,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+x)^n \geq 1 + nx$ .