Université A/ Mira de Béjaia — Janvier 2021
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

***Corrigé de la série de T.D.*** $N°2$

**Exercice 1.** I) Soit $F = \{a, b, c\}$ un ensemble.

a)

| | |
|---|---|
| $a \in F$ | oui |
| $a \subset F$ | non |
| $\{b\} \in F$ | non |
| $\{b\} \subset F$ | oui |
| $\varnothing \in F$ | non |
| $\varnothing \subset F$ | oui |

b) Décrire les ensembles : $\mathcal{P}(F)$ et $F \times F$.

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{P}(F) & = & \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \\ F \times F & = & \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}.\end{array}$$

II) Soient $E$ un ensemble, $A, B$ et $C$, trois parties de $E$.

a) si $A \subset B$ Alors $C_E^B \subset C_E^A$ ?
Soit $x \in C_E^B$,

$$\begin{array}{rcl}x \in C_E^B & \Rightarrow & (x \notin B \wedge x \in E) \\ & \Rightarrow & (x \notin A \wedge x \in E) \text{ car } A \subset B \\ & \Rightarrow & x \in C_E^A.\end{array}$$

Donc si $A \subset B$ alors $C_E^B \subset C_E^A$.

**b)** Soit $(x, y) \in (A \cup B) \times C$,

$$\begin{array}{rcl}(x,y) & \in & (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \ \wedge \ y \in C \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \ \vee x \in B) \ \wedge \ y \in C \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \ \wedge y \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge y \in C) \\ & \Leftrightarrow & (x,y) \in (A \times C) \vee (x,y) \in (B \times C) \\ & \Leftrightarrow & (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C).\end{array}$$

Donc $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

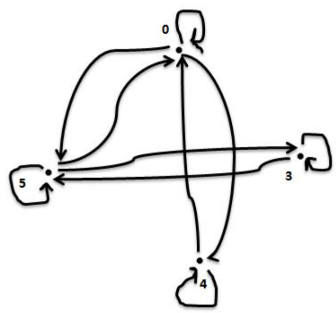
c) $C_E^{(A \cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.

Soit $x \in C_E^{(A\cap B)}$,

$$\begin{aligned} x &\in C_E^{(A\cap B)} \Leftrightarrow (x \notin A \cap B) \wedge (x \in E) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B) \wedge (x \in E) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \in E) \vee (x \notin B \wedge x \in E) \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^A \vee x \in C_E^B \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^A \cup C_E^B. \end{aligned}$$

Donc $C_E^{(A\cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.

**Exercice 2.** 1. le graphe représentatif de $\mathcal{R}$




2. $\mathcal{R}$ est réflexive car on a $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$

$$0\mathcal{R}0,\ 3\mathcal{R}3,\ 4\mathcal{R}4 \text{ et } 5\mathcal{R}5.$$

3. $\mathcal{R}$ est symétrique car on a $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

$$\begin{aligned} 0\mathcal{R}0 &\Rightarrow 0\mathcal{R}0 \\ 0\mathcal{R}4 &\Rightarrow 4\mathcal{R}0 \\ 3\mathcal{R}3 &\Rightarrow 3\mathcal{R}3 \\ 4\mathcal{R}4 &\Rightarrow 4\mathcal{R}4 \\ 5\mathcal{R}5 &\Rightarrow 5\mathcal{R}5 \\ 0\mathcal{R}5 &\Rightarrow 5\mathcal{R}0 \\ 3\mathcal{R}5 &\Rightarrow 5\mathcal{R}3. \end{aligned}$$

4. $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique car par exemple, on a $0\mathcal{R}4$ et $4\mathcal{R}0$ mais $0 \neq 4$.
5. $\mathcal{R}$ n'est pas transitive car par exemple, on a $0\mathcal{R}5$ et $5\mathcal{R}3$ mais $0\not\mathcal{R}3$.

**Exercice 3.** **a)** Sur $\mathbb{Z}$, on considère la relation $\triangle$ définie par :

$$x \triangle y \Leftrightarrow x + y \text{ est pair},$$

la relation $\triangle$ peut s'écrire :

$$x \triangle y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k.$$

Montrons que $\triangle$ est une relation d'équivalence.

**i)** Réflexivité de $\triangle$ : Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned} x + x = 2x &\Rightarrow \exists k = x \in \mathbb{Z} : x + x = 2k \\ &\Rightarrow x \triangle x \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x \triangle x$. D'où la réflexivité de $\triangle$.

**ii)** Symétrie de $\triangle$ : soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \triangle y$. Montrons que $y \triangle x$. On a

$$\begin{aligned} x \triangle y &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y + x = 2k \\ &\Rightarrow y \triangle x. \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x \triangle y \Rightarrow y \triangle x$. D'où la symétrie de $\triangle$.

**iii)** Transitivité de $\triangle$ : Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x \triangle y$ et $y \triangle z$. Montrons que $x \triangle z$. On a

$$\left\{ \begin{array}{c} x \triangle y \\ \text{et} \\ y \triangle z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k \ldots (1) \\ \text{et} \\ \exists k_1 \in \mathbb{Z} : y + z = 2k_1 \ldots (2) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow \exists k, k_1 \in \mathbb{Z} : x + y + y + z = 2k + 2k_1 \\ &\Rightarrow \exists k, k_1 \in \mathbb{Z} : x + z = 2k + 2k_1 - 2y \\ &\Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} : x + z = 2k_2 \text{ tel que } k_2 = 2(k + k_1 - y) \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x \triangle z. \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x \triangle y$ et $y \triangle z \Rightarrow x \triangle z$. D'où la transitivité de $\triangle$.
De (i), (ii), (iii) on a $\triangle$ est une relation d'équivalence.

**b)** Déterminons la classe d'équivalence de 0 et 1.

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z}, x \triangle 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\} \\ &= \{2k / k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{1} &= \{x \in \mathbb{Z}, x \triangle 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x + 1 = 2k\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k - 1\} \\ &= \{2k - 1 / k \in \mathbb{Z}\} \\ &. \end{aligned}$$

**c)** Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\triangle$ .

Par définition, l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\triangle$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\triangle$. Pour identifier cet ensemble, on va déterminer quelque classes d'équivalences.

D'après la question précédente, on a

$$\begin{array}{rcl} \overline{0} & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\} \\ \overline{1} & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k - 1\} \end{array}$$

et on a

$$\begin{array}{rcl} \overline{2} & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k - 2\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2\,(k-1)\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k^{'} \in \mathbb{Z} : x = 2k^{'}\} \\ & = & \overline{0} \\ \overline{-2} & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k + 2\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2(k+1)\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k' = k + 1 \in \mathbb{Z} : x = 2k'\} \\ & = & \overline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{3} & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k - 3\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k - 2 - 1\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2\,(k-1) - 1\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k^{'} \in \mathbb{Z} : x = 2k^{'} - 1\} \\ & = & \overline{1} \\ \overline{-1} & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k + 1\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k + 2 - 1\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2(k+1) - 1\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z}, \exists k' \in \mathbb{Z} : x = 2k' - 1\} \\ & = & \overline{1} \end{array}$$

On peut remarquer que tous les éléments en relation avec 0 sont les entiers pairs, tandis que tous les éléments en relation avec 1 sont les entiers impairs. Donc

$$\mathbb{Z}/\triangle = \{\overline{0}, \overline{1}\}.$$

**Exercice 4. a)** Sur $\mathbb{N}^2$, on considère la relation $\mathcal{S}$ définie par :

$$(a, b)\,\mathcal{S}\left(a^{'}, b^{'}\right) \Leftrightarrow a + b^{'} = b + a^{'}\ ,$$

Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

**i)** Réflexivité de $\mathcal{S}$ : Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$a + b = b + a.$$

Donc $\forall\,(a,b)\in\mathbb{N}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\,(a,b)$. D'où la réflexivité de $\mathcal{S}$.

**ii)** Symétrie de $\mathcal{S}$ : soient $(a,b)\,,\left(a^{'},b^{'}\right)\in\mathbb{N}^2$ tels que$(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right)$.
Montrons que $\left(a^{'},b^{'}\right)\mathcal{S}\,(a,b)$. On a

$$\begin{array}{rcll}(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right) & \Rightarrow & a+b^{'}=b+a^{'} & \\ & \Rightarrow & b+a^{'}=a+b^{'} & \text{( symétrie de l'égalité)}\\ & \Rightarrow & a^{'}+b=b^{'}+a & \text{( commutativité de l'addition)}\\ & \Rightarrow & \left(a^{'},b^{'}\right)\mathcal{S}\,(a,b)\,. & \end{array}$$

Donc $\forall\,(a,b)\,,\left(a^{'},b^{'}\right)\in\mathbb{N}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right)\Rightarrow\left(a^{'},b^{'}\right)\mathcal{S}\,(a,b)$. D'où la symétrie de $\mathcal{S}$.

**iii)** Transitivité de $\mathcal{S}$ : Soient $(a,b)\,,\left(a^{'},b^{'}\right),\left(a^{''},b^{''}\right)\in\mathbb{N}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right)$ et $\left(a^{'},b^{'}\right)\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right)$. Montrons que $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right)$. On a

$$\left\{\begin{array}{c}(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right)\\ \text{et}\\ \left(a^{'},b^{'}\right)\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}a+b^{'}=b+a^{'}\dots(1)\\ \text{et}\\ a^{'}+b^{''}=b^{'}+a^{''}\dots(2)\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl}(1)+(2) & \Rightarrow & a+b^{'}+\left(a^{'}+b^{''}\right)=b+a^{'}+\left(b^{'}+a^{''}\right)\\ & \Rightarrow & a+b^{''}=b+a^{''}\\ & \Rightarrow & (a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right).\end{array}$$

Donc $\forall\,(a,b)\,,\left(a^{'},b^{'}\right),\left(a^{''},b^{''}\right)\in\mathbb{N}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right)$ et $\left(a^{'},b^{'}\right)\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right)\Rightarrow(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{''},b^{''}\right)$.
D'où la transitivité de $\mathcal{S}$.
De (i), (ii), (iii) on a $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

**b)** Déterminons la classe d'équivalence de $(1,1)$.

$$\begin{array}{rcl}\overline{(1,1)} & = & \left\{(a,b)\in\mathbb{N}^2,\ (a,b)\,\mathcal{S}\,(1,1)\right\}\\ & = & \left\{(a,b)\in\mathbb{N}^2, a+1=b+1\right\}\\ & = & \left\{(a,b)\in\mathbb{N}^2, a=b\right\}\\ & = & \left\{(a,a)\,/a\in\mathbb{N}\right\}.\end{array}$$

**Exercice 5.**

**a)** Sur $]1,+\infty[$, on considère la relation $\mathcal{T}$ définie par :

$$x\mathcal{T}y\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{y}{y^2+1},$$

Montrons que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre.

**i)** Réflexivité de $\mathcal{T}$ : Soit $x\in\,]1,+\infty[$. On a

$$\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{x}{x^2+1}$$

Donc $\forall x \in ]1,+\infty[\, , x\mathcal{T}\, x$. D'où la réflexivité de $\mathcal{T}$.

**ii)** Antisymétrie de $\mathcal{T}$ : Soient $x, y \in ]1,+\infty[$ tels que $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}x$ . Montrons que $y{=}x$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{T}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{T}x \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \\ \text{et} \\ \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \\
&\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1} \\
&\Rightarrow x\left(y^2+1\right) = y\left(x^2+1\right) \\
&\Rightarrow xy^2 + x = yx^2 + y \\
&\Rightarrow xy^2 + x - yx^2 - y = 0 \\
&\Rightarrow xy^2 - yx^2 + x - y = 0 \\
&\Rightarrow xy\,(y-x) + x - y = 0 \\
&\Rightarrow -xy\,(x-y) + x - y = 0 \\
&\Rightarrow (x-y)\,(-xy+1) = 0 \\
&\Rightarrow (x-y) = 0 \vee (-xy+1) = 0 \\
&\Rightarrow x = y
\end{aligned}$$

car $x, y \in ]1,+\infty[$ entraine $(-xy+1) < 0$ c-à-d $(-xy+1) \neq 0$.

Donc $\forall x, y \in ]1,+\infty[$,$x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}x \Rightarrow x = y$. D'où l'antisymétrie de $\mathcal{T}$.

**iii)** Transitivité de $\mathcal{T}$ : Soient $x, y, z \in ]1,+\infty[$ tels que $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z$. Montrons que $x\mathcal{T}z$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{T}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{T}z \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \dots (1) \\ \text{et} \\ \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{z}{z^2+1} \dots (2) \end{array}\right. \\
(1) \text{ et } (2) &\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{z}{z^2+1} \\
&\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{z}{z^2+1} \\
&\Rightarrow x\mathcal{T}z.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in ]1,+\infty[$, $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z \Rightarrow x\mathcal{T}z$. D'où la transitivité de $\mathcal{T}$.
De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.

**b)** Cet ordre est-il total ?

Soit $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1}$ et alors $x\mathcal{T}y$, soit $\frac{y}{y^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$ et alors $y\mathcal{T}x$. Donc $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre total.

**Exercice 6. a)** Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation $\mathcal{S}$ définie par :

$$(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ et } b \leq d$$

Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

**i)** Réflexivité de $\mathcal{S}$ : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$a\leq a \text{ et } b\leq b.$$

Donc $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\,(a,b)$, d'où la réflexivité de $\mathcal{S}$.

**ii)** Antisymétrie de $\mathcal{S}$ : soient $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(a,b)$ .
Montrons que $(a,b)=(c,d)$. On a

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c}(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)\\ \text{et}\\ (c,d)\,\mathcal{S}\,(a,b)\end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}[a\leq c \text{ et } b\leq d]\\ \text{et}\\ [c\leq a \text{ et } d\leq b]\end{array}\right.\\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}[a\leq c \text{ et } c\leq a]\\ \text{et}\\ [b\leq d \text{ et } d\leq b]\end{array}\right.\\ &\Rightarrow\ a=c \text{ et } b=d\\ &\Rightarrow\ (a,b)=(c,d).\end{aligned}$$

Donc $\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$,$(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(a,b)\Rightarrow(a,b)=(c,d)$, d'où l'antisymétrie de $\mathcal{S}$.

**iii)** Transitivité de $\mathcal{T}$ : Soient $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f)$.
Montrons que $(a,b)\,\mathcal{S}\,(e,f)$. On a

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c}(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)\\ \text{et}\\ (c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f)\end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}[a\leq c \text{ et } b\leq d]\ldots(1)\\ \text{et}\\ [c\leq e \text{ et } d\leq f]\ldots(2)\end{array}\right.\\ (1)\ \text{et}\ (2) &\Rightarrow\ [a\leq c\leq e \text{ et }\ b\leq d\leq f]\\ &\Rightarrow\ a\leq e \text{ et } b\leq f\\ &\Rightarrow\ (a,b)\,\mathcal{S}\,(e,f).\end{aligned}$$

Donc $\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f)\Rightarrow(c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f)$, d'où la transitivité de $\mathcal{S}$.
De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

**b)** Cet ordre est-il total ?

L'ordre $\mathcal{S}$ n'est pas total (il est partiel) : en effet, les deux couples $(0,8)$ et $(3,7)$ ne sont pas comparables. On a

$$\begin{aligned}8 &\not\leq 7\Rightarrow(0,8)\not{\mathcal{S}}(3,7)\\ 3 &\not\leq 0\Rightarrow(3,7)\not{\mathcal{S}}(0,8).\end{aligned}$$