جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté de Technologie
Département de Technologie
L1 (ST)

Mathématiques 1
(Analyse et Algèbre)

M'hamdi Mohammed Salah

Table des matières

1 Logiques et méthodes du raisonnement mathématiques

2 Ensembles, Relations et Applications

2.1 Ensembles

2.2 Relations

2.3 Applications

2.3.1 Généralités

Soient E et F deux ensembles :

1. On appelle application f de E dans F une relation de E dans F dont tout élément x de E on lui correspond un et un seul élément y de F.
2. E est appellé E l'ensemble de départ ou des antécédants.
3. F est appellé l'ensemble d'arrivée ou des images.
   (a) x est dit antécédant de y par f (dans E).
   (b) y est appelé l'image de x par f (dans F) et on le note $f(x) = y$.
4. En général, on schématise une application f par

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Remarque 2.1.

1. Deux applications f et g sont égales si leurs ensembles de départ sont égaux (en le même ensemble de départ E), leurs ensembles d'arrivée sont égaux (en le même ensemble d'arrivée F) et si $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.
2. L'ensemble des couples $\{(x, f(x))/x \in E\}$ est une partie de l'ensemble $E \times F$, qu'on appelle graphe de l'application f.

Exemple 2.1.

On définit l'application identité par

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto Id_E(x) = x. \end{aligned}$$

On définit l'application constante par (c une constante de $\mathbb{R}$)

$$f : E \to F$$
$$x \mapsto f(x) = c.$$

On définit l'application suivante

$$f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

2.3.2 Restriction et prolongement d'une application

Définition 2.1. Soit E' un sous ensemble de E et $f : E \to F$ une application. L'application $g : E' \to F$ telle que $\forall x \in E$, $g(x) = f(x)$ est appelée la restriction de f à E' et on dit aussi que f est le prolongement de g à E.

2.3.3 Injection, surjection et bijection

Définition 2.2. Soit $f : E \to F$ une application.

1. On dit que f est injective si tout élément y de F possède au plus un antécédent x de E par f. Donc deux éléments différents de E ont des images différentes de F par f, autrement dit :
$$\forall x, x' \in E, \;\; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x',$$
ou d'une manière équivalente
$$\forall x, x' \in E, \;\; x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$
2. On dit que f est surjective si tout élément y de F possède au moins un antécédent x de E par f, c'est-à-dire :
$$\forall y \in F, \exists x \in E : \;\; y = f(x).$$
3. On dit que f est bijective si f est à la fois injective et surjective, et on écrit
$$\forall y \in F, \exists! x \in E : \;\; y = f(x).$$

Propriétés

1. f est injective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution.
2. f est surjective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.

3. f est bijective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet une et une seul solution.

Proposition 2.3. *Soient $f : E \to F$ et $f : F \to G$ deux applications, alors on a*

1. *gof est injective $\Rightarrow$ f est injective.*
2. *gof est surjective $\Rightarrow$ g est surjective.*
3. *gof est bijective $\Rightarrow$ f est injective et g est surjective.*

Exemple 2.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1$. Montrons que f est injective : soit $x, x' \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow x + 1 = x' + 1 \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$

donc f est injective.
f est aussi surjective. Il s'agit de trouver un élément y de $\mathbb{R}$ qu'a d'antécédent par f. Ici il est facile de voir que l'on a toujours $f(x) = y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$.

Exemple 2.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 5$.*

1. *f ainsi définie est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 5$:*
   (a) *Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, on a*

   $$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow 3x + 5 = 3x' + 5 \\ &\Rightarrow 3x = 3x' \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$

   donc f est injective.

   (b) *Soit $y \in \mathbb{R}$, on a*

   $$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow 3x + 5 = y \\ &\Rightarrow 3x = y - 5 \\ &\Rightarrow x = \frac{y-5}{3}, \end{aligned}$$

   alors $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x = \frac{y-5}{3}$ tel que $f(x) = y$. Donc f est surjective.

   (c) *f injective et surjective, donc f est bijective.*

En pratique Si $f : E \to F$ est donnée.

1. Pour savoir si f est injective, on suppose $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$.
2. Pour savoir si f est surjective, on se donne $y \in F$ et on cherche une solution $x \in E$ de l'équation $f(x) = y$.
3. Pour savoir si f est bijective, on montre que $f(x) = y$ possède une unique solution $x \in E$.

Exemple 2.4. *1. On considère*

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

(a) On a $f_1(x) = f_1(x') = 1$ et f_1 n'est donc pas injective.

(b) Comme $y = -1$ $(y < 0)$ n'a pas d'antécédent, f_1 n'est pas surjective.

2. On considère

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

(a) On a $f_2(x) = f_2(x') \Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow x = x'$ car $x, x' \geq 0$. f_2 est donc injective.

(b) Comme $y = -1$ n'a pas d'antécédent, f_2 n'est pas surjective.

3. On voit de mème que

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

n'est pas injective mais elle est surjective.

4. Dans le cas

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

est injective et surjective, elle est donc bijective.

2.3.4 Composition des applications

Définition 2.4. Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. On appelle application composée de f et g, l'application $gof : E \to G$ définie par

$$\forall x \in E, \ (gof)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 2.5. *Soient les applications suivantes :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1. \end{aligned}$$

Alors,

$$gof : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto gof(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x+1.$$
$$fog : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto fog(x) = f(g(x)) = f(x+1) = 2x+2.$$

2.3.5 Applications réciproques

Définition 2.5. Soit $f : E \to F$ une application bijective, alors il existe une application notée f^{-1} définie par

$$f^{-1} : F \to E,\ et\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

appelée application réciproque de f.

Remarque 2.2. Notons que si f est bijective alors f^{-1} est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Théorème 2.6. *Soit $f : E \to F$ une application bijective, alors son application réciproque f^{-1} vérifie*

$$fof^{-1} = Id_F \ et\ f^{-1}of = Id_E.$$

On rappelle

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto Id_E(x) = x. \end{aligned}$$

Proposition 2.7. *Soient $f : E \to F$ et $G : F \to G$ deux applications, alors on a*

1. *f et g sont injectives $\Rightarrow$ gof est injective.*
2. *f et g sont surjectives $\Rightarrow$ gof est surjective.*
3. *f et g sont bijectives $\Rightarrow$ gof est bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.*

Exemple 2.6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2$.*

1. *Montrer que f est bijective et donner son application réciproque f^{-1}.*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - 2$:*
   (a) *Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow x - 2 = x' - 2 \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$

   donc f est injective.

   (b) *Soit $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x - 2 = y \\ &\Rightarrow x = y + 2, \end{aligned}$$

   alors $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x = y + 2$ tel que $f(x) = y$. Donc f est surjective.

   (c) *f injective et surjective, donc f est bijective.*

   (d) *f est bijective donc il existe $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et*

$$f(x) = y \Rightarrow x - 2 = y \Rightarrow x = y + 2,$$

   donc

$$f^{-1}(y) = x = y + 2,$$

   et on écrit :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = y + 2. \end{aligned}$$

2.3.6 Image directe et image réciproque

1. **Image directe :** Soit $f : E \to F$ une application et A un sous-ensemble de E ($A \subset E$). On définit l'image directe de A par l'application f le sous-ensemble $f(A)$ de F :

$$f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}.$$

   Remarque 2.3. (a) $f(\emptyset) = \emptyset$.

   (b) Soit a de E, alors $f(\{a\}) = f(a)$.

   Exemple 2.7. *Soit l'ensemble $A = [-1, 2]$ et*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x^2 + 2. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in \mathbb{R}/x \in A\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}/x \in [-1,2]\} \\ &= [2,5] \cup [2,14] \\ &= [2,14]. \end{aligned}$$

2. **Image réciproque :** Soit $f : E \to F$ une application et A un sous-ensemble de F ($B \subset F$). On définit l'image réciproque de B par l'application f le sous-ensemble $f^{-1}(B)$ de F :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}.$$

Remarque 2.4. (a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
(b) Soit b de F, alors $f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E/f(x) = b\}$.

Exemple 2.8. *Soit l'ensemble $B = [-1,3]$ et*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in B\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [-1,3]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/-1 \leq f(x) \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/-1 \leq f(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}/f(x) \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/-1 \leq x^2 - 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 1 \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/x^2 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 4 \leq 0\} \\ &= \mathbb{R} \cap [-2,2] \\ &= [-2,2]. \end{aligned}$$

3. **Propriétés :** Soit $f : E \to F$ une application. Soient E_1, E_2 deux parties de E et F_1, F_2 deux parties de F. Alors :
   (a) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow f(E_1) \subset f(E_2)$.
   (b) $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$.
   (c) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow f^{-1}(F_1) \subset f^{-1}(F_2)$.
   (d) $f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$.

2.3.7 Exercices corrigés

Exemple 2.9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 1$*

1. *f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?*
2. *Soit à présent $g : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $g(x) = x^2 - 1$; montrer que g est bijective et donner l'éxpression de sa réciproque.*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 1$.*
   (a) *Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a*
$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \\ &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0)\ ou\ (x_1 + x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2\ ou\ x_1 = -x_2, \end{aligned}$$
   autrement dit, pour $x_1 = 3$ et $x_2 = -3$, on a $f(3) = f(-3) = 8$ mais $x_1 \neq x_2$, donc f n'est pas injective.
   (b) *Soit $y \in \mathbb{R}$, on a*
$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x^2 - 1 = y \\ &\Rightarrow x^2 = y + 1, \end{aligned}$$
   si $(y + 1 < 0)$ c'est-à-dire $(y < -1)$: l'équation $f(x) = y$ ne possède pas de solution, par exemple pour $y = -3$, on a :
$$x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2,$$
   cette équation ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$ et donc f n'est pas surjective.
2. *Soit $g : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $g(x) = x^2 - 1$.*
   (a) *Soient $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$, on a*
$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \\ &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0)\ ou\ (x_1 + x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2\ ou\ x_1 = -x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2\ car\ x_1, x_2 \geq 1\ (on\ rejette\ x_1 = -x_2) \end{aligned}$$

donc g est injective.

(b) *Soit $y \in [0, +\infty[$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x^2 - 1 = y \\ &\Rightarrow x^2 = y + 1 \\ &\Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1}, \end{aligned}$$

on observe que $y \geq 0 \Rightarrow y + 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{y+1} \geq 1$ c'est-à-dire $\sqrt{y+1} \in [1, +\infty[$, et on rejette $-\sqrt{y+1} \notin [1, +\infty[$.
Donc $\forall y \in [0, +\infty[$, $\exists x = \sqrt{y+1} \in [1, +\infty[$: tel que $g(x) = y$, à la fin g est surjective.

(c) *g est injective et surjective donc g est bijective et on écrit :*

$$\forall y \in [0, +\infty[, \ \ \exists! x = \sqrt{y+1} \in [1, +\infty[,$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) = \sqrt{y+1},$$

donc

$$\begin{aligned} g^{-1} : [0, +\infty[&\to [1, +\infty[\\ y &\mapsto g^{-1}(y) = \sqrt{y+1}. \end{aligned}$$

Exemple 2.10. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$*

1. *f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?*
2. *Soit à présent $g : [-1, +1] \to [-1, +1]$ telle que $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; montrer que g est bijective.*

Corrigé

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.*

(a) *Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1}{x_1^2+1} = \frac{2x_2}{x_2^2+1} \\ &\Rightarrow 2x_1(x_2^2+1) = 2x_2(x_1^2+1) \\ &\Rightarrow 2x_1x_2^2 + 2x_1 = 2x_2x_1^2 + 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 = x_2x_1^2 + x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 - x_2x_1^2 - x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 + x_1x_2(x_2 - x_1) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \text{ ou } (1 - x_1x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1x_2 = 1, \end{aligned}$$

autrement dit, pour $x_1 = 2$ *et* $x_2 = \frac{1}{2}$, *on a* $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$ *mais* $x_1 \neq x_2$, *donc* f *n'est pas injective.*

(b) *Soit* $y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = y \\ &\Rightarrow 2x = y(x^2+1) \\ &\Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0, \end{aligned}$$

équation à résoudre en x : $\triangle = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$.
Dans le cas, si $y < -1$ *ou* $y > 1$, *le* $\triangle < 0$, *donc l'équation* $f(x) = y$ *ne possède pas de solution, par exemple pour* $y = 3$, *on a :*

$$\frac{2x}{x^2+1} = 3 \Rightarrow 2x = 3(x^2+1) \Rightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 0,$$

$\triangle = 4 - 4(9) = -32 < 0$, *donc l'équation* $f(x) = 3$ *ne possède pas de solution* x *dans* $\mathbb{R}$, *autrement dit* $y = 3$ *ne possède pas d'antécédent par* f *et donc* f *n'est pas surjective.*

2. *Soit* $g : [-1, +1] \to [-1, +1]$; $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

(a) *Soient* $x_1, x_2 \in [-1, +1]$, *on a*

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1}{x_1^2+1} = \frac{2x_2}{x_2^2+1} \\ &\Rightarrow 2x_1(x_2^2+1) = 2x_2(x_1^2+1) \\ &\Rightarrow 2x_1x_2^2 + 2x_1 = 2x_2x_1^2 + 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 = x_2x_1^2 + x_2 \\ &\Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 - x_2x_1^2 - x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 + x_1x_2(x_2 - x_1) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \text{ ou } (1 - x_1x_2 = 0) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

on enlève (supprime) $x_1x_2 = 1$ *car, si* $x_1x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$ *(avec* $x_1 \neq 0$ *et* $x_2 \neq 0$*) et puisque* $\forall x_2 \in [-1, +1]$, *c'est-à-dire* $-1 \leq x_2 \leq 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2} \geq 1$ *ou* $x_1 = \frac{1}{x_2} \leq -1$ *impossible car* $x_1 \in [-1, +1]$.
Puisque

$$\forall x_1, x_2 \in [-1, +1], \; g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

donc g *est injective.*

(b) Soit $y \in [-1,+1]$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Rightarrow \quad \frac{2x}{x^2+1} = y \\ &\Rightarrow \quad 2x = y(x^2+1) \\ &\Rightarrow \quad yx^2 - 2x + y = 0, \end{aligned}$$

$\triangle = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$ et comme $y \in [-1,+1]$, alors l'équation $f(x) = y$ $(yx^2 - 2x + y = 0)$ possède deux solutions,telle que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2+\sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1+\sqrt{(1-y^2)}}{y}, \\ x_2 &= \frac{2-\sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1-\sqrt{(1-y^2)}}{y}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+\sqrt{(1-y^2)}}{y} = \frac{(1+\sqrt{(1-y^2)})(1-\sqrt{(1-y^2)})}{y(1-\sqrt{(1-y^2)})} \\ &= \frac{(1-(1-y^2))}{y(1-\sqrt{(1-y^2)})} = \frac{y}{(1-\sqrt{(1-y^2)})}, \\ x_2 &= \frac{1-\sqrt{(1-y^2)}}{y} = \frac{(1-\sqrt{(1-y^2)})(1+\sqrt{(1-y^2)})}{y(1+\sqrt{(1-y^2)})} \\ &= \frac{(1-(1-y^2))}{y(1+\sqrt{(1-y^2)})} = \frac{y}{(1+\sqrt{(1-y^2)})}, \end{aligned}$$

comme $y \in [-1,+1]$, donc on prend $x_2 \in [-1,+1]$ et on rejette x_1 car $x_1 \notin [-1,+1]$.
Donc $\forall y \in [-1,+1]$, $\exists x = x_2 = \frac{1-\sqrt{(1-y^2)}}{y} \in [-1,+1]$: tel que $g(x) = y$, à la fin g est surjective.