1 Applications

1.1 Généralités sur les applications

Soient E et F deux ensembles.

1. On appelle fonction de l'ensemble E vers l'ensemble F une relation de E vers F dont à tout élément x de E on lui correspond **au plus** un élément y de F.
2. On appelle application de E dans F une relation de E dans F dont à tout élément x de E on lui correspond **un et un seul** élément y de F.
3. E est appelé ensemble de départ ou des antécédents.
4. F est appelé ensemble d'arrivée ou des images.
   (a) x est dit antécédent de y par f.
   (b) y est appelé l'image de x par f et on le note $f(x)$.
5. En général, on schématise une application f par
$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$
   $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$ est appelé graphe de f.
6. Deux applications f et g sont égales si elles ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée F et si
$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

Exemple 1.1.

On définit l'application identité par
$$\begin{array}{rccc} Id_E: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & Id_E(x) = x. \end{array}$$
On définit l'application constante par (c une constante de $\mathbb{R}$*)*
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = c. \end{array}$$

Exemple 1.2.

$$\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x+1}{x-5} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g:\mathbb{R}-\{5\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = \dfrac{x+1}{x-5} \end{array}$$

f est une fonction et n'est pas une application car l'élément 5 n'a pas une image dans $\mathbb{R}$ tandis que g est une application.

1.1.1 Restriction et prolongement d'une application

Définition 1.1. Soit E' un sous ensemble de E et $f : E \to F$ une application. L'application $g : E' \to F$ telle que $\forall x \in E'$, $g(x) = f(x)$ est appelée la restriction de f à E'. On dit aussi que f est le prolongement de g à E.

Exemple 1.3.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = (x-2)^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : [2,4] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = (x-2)^2 \end{array}$$

g est la restriction de f à $[2,4]$ et f est le prolongement de g à $\mathbb{R}$.

1.1.2 Injection, surjection et bijection

Définition 1.2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. On dit que f est injective si

$$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

2. On dit que f est surjective si

$$\forall y \in F, \exists\, x \in E : y = f(x).$$

3. On dit que f est bijective si f est injective et surjective.

Exemple 1.4.
Considérons l'applications suivante :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x - 4. \end{array}$$

Injectivité de f : Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) = f(x_2) & \Longrightarrow & x_1 - 4 = x_2 - 4 \\ & \Longrightarrow & x_1 = x_2. \end{array}$$

Donc f est injective.
Surjectivité de f : Soit $y \in \mathbb{R}, \exists ? x \in \mathbb{R} : y = f(x)$.

$$\begin{array}{rcl} y = f(x) & \Longrightarrow & y = x - 4 \\ & \Longrightarrow & x = y + 4. \end{array}$$

Donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists\, x = (y+4) \in \mathbb{R} : f(x) = y.$$

D'où f est surjective.
f est injective et surjective, donc f est bijective.

Propriétés

1. f est injective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution.
2. f est surjective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.
3. f est bijective $\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution.

Proposition 1.3. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications, alors on a*

1. *gof est injective $\Rightarrow$ f est injective.*
2. *gof est surjective $\Rightarrow$ g est surjective.*
3. *gof est bijective $\Rightarrow$ f est injective et g est surjective.*

Exemple 1.5. *1. On considère*

$$\begin{array}{rccl} f_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2. \end{array}$$

(a) *On a $f_1(1) = f_1(-1) = 1$ et f_1 n'est donc pas injective.*

(b) *Comme $y = -1$ n'a pas d'antécédent, f_1 n'est pas surjective.*

2. On considère

$$\begin{array}{rccl} f_2 : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2. \end{array}$$

(a) *Soient $x, x' \in \mathbb{R}^+ : f_2(x) = f_2(x')$. On a*

$$\begin{array}{rcl} f_2(x) = f_2(x') & \Longrightarrow & x^2 = x'^2 \\ & \Longrightarrow & x = x' \text{ car } x, x' \geq 0. \end{array}$$

f_2 est donc injective.

(b) *Comme $y = -1$ n'a pas d'antécédent, f_2 n'est pas surjective.*

3. L'application

$$\begin{array}{rccl} f_3 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

n'est pas injective mais elle est surjective.

4. L'application

$$\begin{array}{rccl} f_4 : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

est injective et surjective, elle est donc bijective.

1.2 Composition des applications

Définition 1.4. Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. On appelle application composée de f et g, l'application $gof : E \to G$ définie par

$$\forall x \in E, \ (gof)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 1.6. *Soient les applications suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 2x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = x+1. \end{array}$$

Alors,

$$gof : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto (gof)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x+1.$$

$$fog : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto (fog)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = 2x+2.$$

1.3 Applications réciproques

Définition 1.5. Soit $f : E \to F$ une application bijective, alors il existe une application notée f^{-1} définie par $f^{-1} : F \to E$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

appelée application réciproque de f.

Remarque 1.1. Notons que si f est bijective alors f^{-1} est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Théorème 1.6. *Soit $f : E \to F$ une application bijective, alors son application réciproque f^{-1} vérifie*

$$fof^{-1} = Id_F \text{ et } f^{-1}of = Id_E.$$

On rappelle

$$\begin{array}{rrcl} Id_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & Id_E(x) = x. \end{array}$$

Proposition 1.7. *Soient $f : E \to F$ et $G : F \to G$ deux applications, alors on a*

1. *f et g sont injectives $\Rightarrow$ gof est injective.*
2. *f et g sont surjectives $\Rightarrow$ gof est surjective.*
3. *f et g sont bijectives $\Rightarrow$ gof est bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.*

Exemple 1.7. *D'après un exemple précédent, la réciproque de l'application*

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x-4 \end{array}$$

est

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = x+4. \end{array}$$

1.4 Image directe et image réciproque

1. **Image directe :** Soit $f : E \to F$ une application et A un sous-ensemble de E ($A \subset E$). On appelle image directe de A par l'application f et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F défini par

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Remarque 1.2. (a) $f(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Soit $a \in E$, alors $f(\{a\}) = \{f(a)\}$.

Exemple 1.8. *Soit l'ensemble* $A = [-1, 2]$ *et*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 3x^2 + 2. \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} f(A) & = & \{f(x) \in \mathbb{R}/x \in A\} \\ & = & \{f(x) \in \mathbb{R}/x \in [-1, 2]\} \\ & = & [2, 5] \cup [2, 14] \\ & = & [2, 14]. \end{array}$$

2. **Image réciproque :** Soit $f : E \to F$ une application et B un sous-ensemble de F ($B \subset F$). On appelle image réciproque de B par l'application f et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}.$$

Remarque 1.3. (a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Soit $b \in F$, alors $f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E/f(x) = b\}$.

Exemple 1.9. *Soit l'ensemble* $B = [-1, 3]$ *et*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 - 1. \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(B) & = & \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in B\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [-1, 3]\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}/-1 \leq f(x) \leq 3\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}/-1 \leq f(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}/f(x) \leq 3\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}/-1 \leq x^2 - 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 1 \leq 3\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}/x^2 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 4 \leq 0\} \\ & = & \mathbb{R} \cap [-2, 2] \\ & = & [-2, 2]. \end{array}$$

3. **Propriétés :** Soit $f : E \to F$ une application. Soient E_1, E_2 deux parties de E et F_1, F_2 deux parties de F. Alors :
   (a) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow f(E_1) \subset f(E_2)$.
   (b) $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$.
   (c) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow f^{-1}(F_1) \subset f^{-1}(F_2)$.
   (d) $f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$.