Université A.Mira de Bejaia
Faculté des Science Exactes
Département d'Informatique
1ère année Licence
Module : Analyse 1

Année universitaire 2020/2021

Série de TD N°2

Exercice N°1

Démontrer en appliquant la définition que la suite (U_n) définie par

$$U_n = \frac{4n-1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$$

converge vers $l = 2$.

Exercice N°2

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite definie par :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ V_n = \frac{U_0 + U_1 + ... + U_n}{n+1}$$

1. Montrer que si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. La réciproque est elle vraie ?
3. Montrer que si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Exercice N°3

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 3$.
2. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
3. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°4

Utiliser le critère de Cauchy pour étudier la nature des suites :

1. $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$
2. $V_n = \cos \frac{1}{n}$
3. $W_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2+\ln 2} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n+\ln n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2^k + \ln k}$
4. $X_n = \frac{\sin a}{1^k} + \frac{\sin 2a}{2^k} + ... + \frac{\sin na}{n^k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin ja}{j^k}$, où $n \geq 1,\ a \in \mathbb{R}^*, k \geq 2$

Exercice N°5

Soit la suite

$$U_n = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
2. Étudier la nature de la suite (U_n).
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq 3$.