Corrigé de la série de TD N°01

Exercice 01 :

(a) Comme $\sqrt{9} = -3$ est fausse donc la proposition

$$[((-3)^2 = 9) \wedge (\sqrt{9} = -3)]$$

est aussi Fausse

La negation $\overline{[((-3)^2 = 9) \wedge (\sqrt{9} = -3)]} \iff ((-3)^2 \neq 9) \vee (\sqrt{9} \neq -3)$

b) Comme $\sqrt{36} = 6$ est vrai, Donc la proposition

$$[(\underset{F}{|-8| = -8}) \underset{V}{\vee} (\underset{V}{\sqrt{36} = 6})]$$

est vraie

La négation : $\overline{[|-8| = -8 \vee (\sqrt{36} = 6)]} \iff [(|-8| \neq -8) \wedge (\sqrt{36} \neq 6)]$

c) Comme il n'existe aucun réel x tq $x^2 = -9$, alors cette proposition est Fausse

negation $\overline{\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -9} \iff \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -9$

d) $\exists x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+3) < 0$, cette proposition est vraie car il existe $x = 0$ qui vérifie $\overbrace{(0-1)(0+3)}^{-3} < 0$

La negation : $\overline{\exists x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+3) < 0} \iff \forall x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+3) \geq 0$

e) $\forall x \in [3, +\infty[, x^2 \geq 9$ est vrai car x^2 est croissante

En effet $x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 3^2 \Rightarrow x^2 \geq 9$

La negation $\overline{\forall x \in \cancel{\mathbb{R}} [3, +\infty[, x^2 \geq 9} \iff \exists x \in [3, +\infty[, x^2 < 9$

f) $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+1) \neq 0$: cette proposition est Fausse

car il existe $x = -1$ ou $x = 1 \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} (1-1)(1+1) = 0 \\ (-1-1)(-1+1) = 0 \end{cases}$

negation $\overline{\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+1) \neq 0} \iff \exists x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+1) = 0$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 < y$: cette proposition est vrai car pour :

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{et } y = x^2+1 \end{array}\right\} \quad x^2 < x^2+1$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 < y \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 \geq y$

4) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 < y$ Fausse.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 < y \\ 5^2 < 0 \\ 25 < 0 \end{array}$$

Il suffit de montrer que sa négation est vrai.

En effet pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $x = (y + \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}$

Don $x^2 = y^2 + y + \frac{1}{4} \geq y$.

$[\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 < y] \Leftrightarrow [\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq y]$

Exercice 02 :

1) Le Produit de deux nombre pairs est-il pair ?

Soit $P = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des nombres pairs

$\forall n, m \in P, n \times m \in P$?

Soint $n, m \in P$ $\left.\begin{array}{l} n = 2k_1 / k_1 \in \mathbb{Z} \\ m = 2k_2 / k_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$ $n \times m \in P$? $\frac{1}{2} = 0.5$

$n \times m = 2k_1 \times 2k_2 = 2(2k_1 \times k_2) = 2k_3$ $/ k_3 = 2k_1 \times k_2$, $k_3 \in \mathbb{Z}$

Donc $n \times m \in P$

Alors $\forall n, m \in P, n \times m \in P$ est une proposition vraie.

2) Le produit de deux nombres impairs est il impair ?

Soint $I = \{2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensembl des nombres impairs

$\forall n \in I, \forall m \in I, n \times m \in I$ Vraie car :

$n \in I \Rightarrow n = 2k_1 + 1$ $/ k_1 \in \mathbb{Z}$

$m \in I \Rightarrow m = 2k_2 + 1$ $/ k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} n \times m = (2k_1+1)(2k_2+1) &= 2k_1 2k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 \\ &= 2(\underbrace{2k_1k_2 + k_1 + k_2}_{k_3}) + 1 \\ &= 2k_3 + 1 \end{aligned}$$

$/ k_3 = 2k_1k_2 + k_1 + k_2$, $k_3 \in \mathbb{Z}$

3) Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est il pair ou impair ?

$P = \{2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad I = \{2k+1,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$\forall\ n \in P,\ m \in I\ ,\ n \times m \in P\ ?\quad n \times m \in I\ ?$

$k_1 \in P\ /\ n = 2k_1$

$k_2 \in I\ /\ m = 2k_2 + 1$

$n \times m = (2k_1)(2k_2+1) = 2k_1 2k_2 + 2k_1 = 2(2k_1 k_2 + k_1)$

$= 2k_3\ /\ k_3 = 2k_1 k_2 + k_1$, $k_3 \in \mathbb{Z}$

Donc $\forall n \in P,\ m \in I,\ n \times m \in P$

4) Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair?

$\forall\ n \in \mathbb{Z},\ n$ est pair $\Leftrightarrow n^2$ est pair

$\Rightarrow$ n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair vrai car —— (1) $\Leftarrow$

$P = \{2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$n^2 = (2k)^2 = 4(k^2) = 2(2k^2) = 2k_1\ /\ k_1 = 2k^2$, $k_1 \in \mathbb{Z}$

Donc n^2 est pair

$\Leftarrow n^2$ est paire $\Rightarrow$ n est pair —— (2)

La contraposée de (n^2 est paire $\Rightarrow$ n est pair) $\Leftrightarrow \overline{n \text{ est pair}} \Rightarrow \overline{n^2 \text{ est pair}}$

n n'est pas pair $\Rightarrow n^2$ n'est pas pair.

n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair vrai car:

$I = \{2k+1\quad k \in \mathbb{Z}\}$

$n^2 = n \times n = (2k+1)(2k+1) = 2k\,2k + 2k + 2k + 1$

$= 2(2kk + k + k) + 1$

$= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1$

$= 2k'\ /\ k' \in \mathbb{Z}$

Donc n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair

Alors à partir de (1) et (2) n est pair $\Leftrightarrow n^2$ est impair est vrai

TD N°1 Exercice n°3

1/ $\overline{A \vee (\bar{B} \wedge C)}$

Methode 1:

FNC: $\overline{A \vee (\bar{B} \wedge C)} \equiv \bar{A} \mathbin{\bar{\vee}} (\bar{\bar{B}} \mathbin{\bar{\wedge}} \bar{C})$

$\equiv \bar{A} \wedge (B \vee \bar{C})$

FND: $\overline{A \vee (\bar{B} \wedge C)} \equiv \bar{A} \mathbin{\bar{\vee}} (\bar{\bar{B}} \mathbin{\bar{\wedge}} \bar{C})$

$\equiv \bar{A} \wedge (B \vee \bar{C})$

$\equiv (\bar{A} \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{C})$

Methode 2 (table de verité)

$2^3 = 8$

	A	B	C	$\bar{B}$	$\bar{B} \wedge C$	$A \vee (\bar{B} \wedge C)$	$\overline{A \vee (\bar{B} \wedge C)}$	
	1	1	1	0	0	1	0	
	1	1	0	0	0	1	0	
	1	0	1	1	1	1	0	
	1	0	0	1	0	1	0	
5	0	1	1	0	0	0	1	5
6	0	1	0	0	0	0	1	6
	0	0	1	1	1	1	0	
8	0	0	0	1	0	0	1	8

$(\bar{A} \wedge B \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C})$ FND

$\neg\left[(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C)\right]$

FNC $(\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (A \vee B \vee \bar{C}$

2) FND : ok car elle est déjà en FND

$(\bar{A} \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge B) \equiv (\bar{A} \vee (\bar{A} \wedge B)) \wedge (B \vee (\bar{A} \wedge B))$ (Distrib

$\equiv ((\bar{A} \vee \bar{A}) \wedge (\bar{A} \vee B)) \wedge ((B \vee \bar{A}) \wedge (B \vee B))$ Distri

$\equiv \bar{A} \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge (B \vee \bar{A}) \wedge B$ idempondence

$\equiv \bar{A} \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge B$ commutativité

$\equiv \bar{A} \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge B$ idempondence

Methode 02

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \wedge B$	$(\bar{A} \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge B)$
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

$p \vee p \quad p$

FND $\equiv (\bar{A} \wedge B)$ FND

$\equiv (\bar{A} \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge B)$ Règle de d'idempodence (11)

FNC: $\neg\big((A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})\big)$

$(\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee B)$ FNC

3/ $(A \vee \bar{B}) \wedge (A \vee \bar{B})$ FNC

FND $(A \vee \bar{B}) \wedge (A \vee \bar{B}) \equiv \big(A \wedge (A \vee \bar{B})\big) \vee \big(\bar{B} \wedge (A \vee \bar{B})\big)$

$\equiv \big((A \wedge A) \vee (A \wedge \bar{B})\big) \vee \big((\bar{B} \wedge A) \vee (\bar{B} \wedge \bar{B})\big)$

$\equiv A \vee (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{B} \wedge A) \vee \bar{B}$

$\equiv A \vee (A \wedge \bar{B}) \vee (A \wedge \bar{B}) \vee \bar{B}$

$\equiv A \vee (A \wedge \bar{B}) \vee \bar{B}$

Methode(2)

A	B	$\bar{B}$	$(A \vee \bar{B})$	$(A \vee \bar{B}) \wedge (A \vee \bar{B})$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

FND: $(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$

FNC $\neg(\bar{A} \wedge B) \equiv (A \vee \bar{B}) \equiv (A \vee \bar{B}) \wedge (A \vee \bar{B})$ Règle d'idempotence (10)

$\equiv (A \vee \bar{B}) \cancel{\wedge} (A \cancel{\wedge} \bar{B})$

$A = \boxed{A \wedge A}$

4) $A \wedge \neg(B \vee \neg C) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow (A \wedge B))$

$\equiv \overline{A \wedge \neg(B \vee \neg C)} \vee (\overline{\neg B} \vee (A \wedge B))$

$\equiv \bar{A} \vee \neg\neg(B \vee \neg C) \vee (\neg\neg B \vee (A \wedge B))$

$\equiv \bar{A} \vee (B \vee \neg C) \vee (B \vee (A \wedge B))$

$\equiv \bar{A} \vee B \vee \neg C \vee B \vee (A \wedge B)$

$\equiv (\bar{A} \vee B \vee \neg C \vee A) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$ FNC

FND:

$A \cdot \wedge \neg(B \vee \neg C) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow (A \wedge B))$

$\equiv \neg(A \wedge \neg(B \vee \neg C)) \vee (\neg\neg B \vee (A \wedge B))$

$\equiv \neg A \vee (B \vee \neg C) \vee (B \vee (A \wedge B))$

$\equiv \neg A \vee B \vee \neg C \vee (A \wedge B)$ FND.

$2^3 = 8$

Methode 2:

A	B	C	(1) $\neg B$	$\neg C$	$B \vee \neg C$	(3) $\neg(B \vee \neg C)$	(2) $A \wedge B$	(5) (1) $\Rightarrow$ (2)	(4) $A \wedge$ (3)	(4) $\Rightarrow$ (5)
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1

FND:

$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}$

FNC: $\overline{A \wedge \bar{B} \wedge C} \equiv \bar{A} \vee B \vee \bar{C}$

$\equiv (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee A)$

Exercice 04 :

1/ Montrer par table de vérité que :

a/ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ $\qquad 2^n = 2^2 = 4$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

b/ $[P \vee (q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \vee q) \vee R]$ $\qquad 2^3 = 8$

P	q	R	① $q \vee R$	② $p \vee q$	③ $p \vee$ ①	④ ② $\vee R$	③ $\Leftrightarrow$ ④
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1

2) Montrer par raisonnement direct que :

a/ $(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$

$x^2 - 4 = 0$ est vrai, est ce que ($x = 2$ ou $x = -2$) est aussi vrai ?

on a $x^2 - 4 = 0 \equiv x^2 - 2x + 2x - 2^2 = 0$

$\equiv (x - 2)(x + 2) = 0$ $\qquad x \cdot y = 0 \; \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = 0 \end{array}\right\}$

$\equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$

$\equiv \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -2 \end{cases}$ est vraie.

Donc $(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$ est vraie.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+1$ est un carré

$\left(\underline{\quad}\right)^2$

$8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+1$ est vraie, alos est ce qu son carré ?

$$8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+1 = \frac{8}{2}\left(n(n+1)\right)+1 = 4\left(n(n+1)\right)+1$$
$$= 4(n^2+n)+1$$
$$= 4n^2+4n+1$$
$$= (2n+1)^2$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+1$ est un carré est vraie

3] Démonstrer en raisonnant par contraposeé que :

a) soit $n \in \mathbb{N}^*$: [si (n^2-1) n'est pas divisible par 8] $\Rightarrow$ n est pair

$\overline{n \text{ est pair}} \Rightarrow \overline{[\text{si } (n^2-1) \text{ n'est pas divisible par } 8]}$

n est impair $\Rightarrow$ (n^2-1) est divisible par 8

n est impair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = (2k+1)^2$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 4k^2+4k+1$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2-1 = 4k^2+4k.$

on distingue deux cas:

$k = 2l$
$k = 2l+1$

si k est pair, alors $\exists l \in \mathbb{N} : k = 2l$.

$$n^2-1 = 4(2l)^2+4(2l)$$
$$= 16l^2+8l$$
$$= 8l', \quad l' = (2l^2+l) \in \mathbb{N}$$

Donc (n^2-1) est divisible par 8.

Fin si;

$\frac{3}{2} = 1,5$

si k est impair, alor $\exists l_1 \in \mathbb{N},\ k = 2l_1+1$

$$n^2-1 = 4(2l_1+1)^2 + 4(2(l_1+1))$$
$$= 4(4l_1^2+4l_1+1)+8l_1+4$$
$$= 16l_1^2+24l_1+8$$
$$= 8(2l_1^2+3l_1+1)$$
$$= 8l'$$

Donc (n^2-1) est divisible par 8

Fin si;

Finalement :

$n \in \mathbb{N}^*$ [si (n^2-1) n'est pas divisible par 8] $\Rightarrow$ n est pair est vraie

b) soient $x, y \in \mathbb{R} : [(xy-1)(x-y) \neq 0] \Rightarrow [x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1)]$

$\overline{x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1)} \Rightarrow \overline{(xy-1)(x-y) \neq 0}$

$x(y^2+y+1) = y(x^2+x+1) \Rightarrow (xy-1)(x-1) = 0$

$x(y^2+y+1) = y(x^2+x+1)$ est vrai,

est ce $(xy-1)(x-1) = 0$ est aussi vraie ?

$x(y^2+y+1) = y(x^2+x+1) = xy^2+xy+x = yx^2+xy+y$

$= xy^2+\cancel{xy}+x-yx^2-\cancel{xy}-y = 0$

$= xy^2-yx^2+x-y = 0$

$= xy(y-x)+(x-y) = 0$

$= -xy(x-y)+(x-y) = 0$

$= (-xy+1)(x-y) = 0$

$= (-1)(xy-1)(x-y) = 0$ car $-1 \neq 0$

$= (xy-1)(x-y) = 0$

$xy-1 = 0$

$x-y = 0$

Donc $x, y \in \mathbb{R}$ $[(xy-1)(x-y) \neq 0] \Rightarrow [x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1)]$

c) Soient $x, y \in \mathbb{R} : [(x \neq 11) \wedge (y \neq -10)] \Rightarrow (xy+10x-11y-10 \neq 100)$

$\overline{xy+10x-11y-10 \neq 100} \Rightarrow \overline{(x \neq 11) \wedge (y \neq -10)}$

$xy+10x-11y-10 = 100 \Rightarrow (x = 11) \vee (y = -10)$

V   V ?

$xy+10x-11y-10 = 100 \Rightarrow xy+10x-11y-10-100 = 0$

$\Rightarrow x(y+10) - 11(y+10) = 0$

$\Rightarrow (y+10)(x-11) = 0$

$\Rightarrow (y+10 = 0) \vee (x-11 = 0)$

$\Rightarrow (y = -10) \vee (x = 11)$

$\Rightarrow (x = 11) \vee (y = -10)$

Donc $x, y \in \mathbb{R}$ $[(x \neq 11) \wedge (y \neq -10)] \Rightarrow (xy+10x-11y-10 \neq 100)$ est vraie

4) Montrer par Contre exemple que les propositions suivantes sont fausses :

a) $\underset{V}{(n \text{ est un nombre pair})} \underset{\Rightarrow}{\Rightarrow} \underset{F}{(n^2+1) \text{ est pair}} \underset{=}{} F$, fausse car

Pour $n = 4 \Rightarrow 4^2+1 = 17$ n'est pas pair, c'est un contre exemple

b) $\forall n \in \mathbb{N}, (3.n-7) \in \mathbb{N}$ est fausse, car ~~3n-7~~

Pour $n = 1$, $3\times 1 - 7 = 3-7 = -4 \notin \mathbb{N}$

5) Montrer par l'absurde que :

a) soient $x, y \in \mathbb{R}$. $\underbrace{(x \neq y)}_{P} \Rightarrow \underbrace{(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)}_{q}$

on suppose $(x \neq y) \wedge (x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ vrai

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$$
$$\Rightarrow \cancel{xy} - x + y - \cancel{1} - \cancel{xy} - x + y + \cancel{1} = 0$$
$$\Rightarrow -2x + 2y = 0$$
$$\Rightarrow 2(y-x) = 0$$
$$\Rightarrow y - x = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{y = x}$$ (ce qui est une contradiction, car $x \neq y$)

Donc, $x, y \in \mathbb{R}$ $(x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ est vrai.

b) $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{9+x^5} \neq 3 + \dfrac{x^5}{6}\right)$ P

on suppose $\overline{\left(\forall x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{9+x^5} \neq 3 + \dfrac{x^5}{6}\right)} \equiv \overline{P}$ est vrai

$$\exists\, x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{9+x^5} = 3 + \frac{x^5}{6}$$

$$\sqrt{9+x^5} = 3 + \frac{x^5}{6} \Rightarrow \left(\sqrt{9+x^5}\right)^2 = \left(3 + \frac{x^5}{6}\right)^2$$
$$\Rightarrow 9 + x^5 = 9 + 2.3.\frac{x^5}{6} + \frac{x^{10}}{36}$$
$$\Rightarrow \cancel{9} + \cancel{x^5} = \cancel{9} + \cancel{x^5} + \frac{x^{10}}{36}$$
$$\Rightarrow \frac{x^{10}}{36} = 0 \Rightarrow x^{10} = 0 \Rightarrow x = 0$$
(ce qui est une contradiction) car $x \in \mathbb{R}^*$

Donc $\overline{P}$ est fausse $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}^*, \sqrt{9+x^5} \neq 3 + \frac{x^5}{6}$ est vraie.

c) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ pair $\Rightarrow n$ est pair

On suppose que $\neg(\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ est pair})$ est vrai.

$$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ pair} \wedge n \text{ est impair}$$

n est impair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1$.

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2k' + 1 \qquad / \ k' = 2k^2 + 2k \end{aligned}$$

Contradiction car n^2 est impair

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ pair $\Rightarrow n$ est pair vraie.

6 Montrer par récurence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Etape 1 : $n = 1$

$$P(1) : \sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

$$\Rightarrow 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

$$\Rightarrow 1 = 1$$

Donc $P(1)$ est vraie.

Etape 2 : On suppose que $P(n)$ est vrai et on verifie si $P(n+1)$?

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6}{6}(n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie $= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Etape 3 : On a donc démontrer par récurence que $P(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 17 divise $(3 \times 5^{2n-1} + 3^{3n-2})$

On note $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 17 divise $(3 . 5^{2n-1} + 3^{3n-2})$

Etape 1 : $n = 1$

$P(1)$: 17 divise $(3 . 5^{2n-1} + 3^{3n-2})$?

17 divise $(3 . 5^{2.1-1} + 3^{3.1-2})$

17 divise $(3 . 5^{1} + 3^{1})$

17 divise $(15 + 3)$

17 divise 18 Fausse.

Don par récurrence $[\forall n \in \mathbb{N}^*$ 17 divise$(3 . 5^{2n-1} + 3^{3n-2})]$ est Fausse.

c] $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$, où x est un réel positif.

on note $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$ $x \in \mathbb{R}$ et $x \geq 0$

Etape 1 : $P(0)$: $(1+x)^0 \geq 1 + 0 . x$

$1 \geq 1$

Donc $P(0)$ est vraie

Etape 2 : On suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est aussi vrai ?

$P(n+1)$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ $x \in \mathbb{R}$ et $x \geq 0$

$(1+x)^n \geq 1 + nx$

$(1+x)^n (1+x)^1 \geq (1+nx)(1+x)$

$(1+x)^{n+1} \geq (1 + x + nx + nx^2$

$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \longrightarrow ①$

on sait que :

$x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow nx^2 \geq 0$

$\Rightarrow 0 \geq -nx^2$ — ②

$① + ② = (1+x)^{n+1} + 0 \geq 1 + (n+1)x + \cancel{nx^2} - \cancel{nx^2}$

$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Etape 3 : On a montré par récurrence que $P(n)$ est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ et $x \geq 0$.