

Corrigé de la série spéciale

Exercice 01 :

1. Dimension d'une énergie

On a par exemple :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow [E] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2 = M(LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2}$$

2. Condition d'homogénéité :

$$[v] = [v_0] \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \Rightarrow [v] = [v_0] \text{ et } \left[\frac{t}{\tau}\right] = 1$$

Donc $[v_0] = LT^{-1}$ et $[\tau] = [t] = T$.

L'unité en SI de v_0 est $\left(\frac{m}{s}\right)$

L'unité en SI de τ est (s)

Exercice 02 :

2. Les modules :

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

Le produit scalaire:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 12$$

Le produit vectoriel :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

3. L'angle formé entre \vec{V}_1 et \vec{V}_2 :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\|} = \frac{12}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}} = \frac{12}{3\sqrt{22}} \rightarrow \alpha = 31.48^\circ$$

4. Montrons que le vecteur \vec{V}_3 est perpendiculaire au plan (P) formé par \vec{V}_1 et \vec{V}_2 :

$$\begin{cases} \vec{V}_3 \perp \vec{V}_1 \\ \vec{V}_3 \perp \vec{V}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 = 0 = 3 - 3 = 0 \\ \vec{V}_3 \cdot \vec{V}_2 = 0 = 1 - 3 + 2 = 0 \end{cases}$$

On peut utiliser aussi la relation : $\vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{0}$

5. le vecteur \vec{V}_4 appartient au plan (P) :

On dispose de plusieurs méthodes :

$$\vec{V}_4 = \alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_4 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \quad (\alpha = -\beta = 1)$$

$$\vec{V}_4 \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = 0 \Rightarrow \vec{V}_4 \perp \vec{V}_3 \Rightarrow \vec{V}_4 \cdot \vec{V}_3 = 0 = 2 - 2$$

6. Le vecteur unitaire \vec{u} porté par le vecteur $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\|} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{53}} = \frac{4}{\sqrt{53}}\vec{i} + \frac{6}{\sqrt{53}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{53}}\vec{k}$$

7. Le produit mixte :

On a déjà $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$, donc :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = (3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}) \cdot (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 3 + 3 + 12 = 18$$

On peut aussi le calculer par la relation :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 03 :

Le vecteur position:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = t - 1 & (1) \\ y = \frac{t^2}{2} & (2) \end{cases}$$

1. L'équation de la trajectoire :

de (1): $t = x + 1$ on remplace dans (2) :

$$y = \frac{(x + 1)^2}{2}$$

La trajectoire est une parabole.

2. Les composantes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{cases} v_x = 1 \\ v_y = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \vec{i} + t.\vec{j} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{1 + t^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \vec{j} \Rightarrow \|\vec{a}\| = 1$$

3. Accélération tangentielle :

$$a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

4. L'accélération normale :

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

5. Le rayon de courbure :

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = (1 + t^2)^{3/2}$$

Exercice 04 :

1. Dans la base des coordonnées polaires :

1.1. Le vecteur position :

$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho = b \cos(\omega t) \vec{e}_\rho$$

1.2. Les vitesses vitesse et accélération ainsi que leurs normes :

$$\rho = b \cos(\omega t) \rightarrow \dot{\rho} = -b\omega \sin(\omega t) \rightarrow \ddot{\rho} = -b\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\theta = \omega t \rightarrow \dot{\theta} = \omega \rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta = -b\omega [\sin(\omega t) \vec{e}_\rho - \cos(\omega t) \vec{e}_\theta]$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta = -2b\omega^2 [\cos(\omega t) \vec{e}_\rho + \sin(\omega t) \vec{e}_\theta]$$

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{(-b\omega \sin(\omega t))^2 + (b\omega \cos(\omega t))^2} = b\omega$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-2b\omega^2 \cos(\omega t))^2 + (-2b\omega^2 \sin(\omega t))^2} = 2b\omega^2$$

2. Les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs normes dans le système des coordonnées intrinsèques :

$$\vec{v} = v \vec{u}_t = (b\omega) \vec{u}_t$$

$$a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0; a_n = a = 2b\omega^2$$

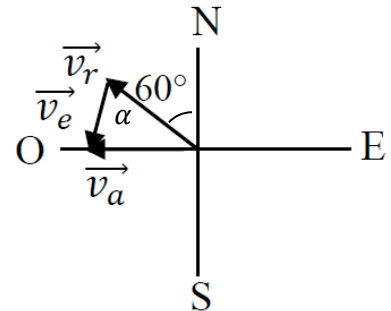
$$\vec{a} = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n = (2b\omega^2) \vec{u}_n$$

Le rayon de courbure :

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{b}{2}$$

Exercice 05 :

1. Repère fixe (R) : la terre, Repère mobile (R') : le courant (l'eau), le mobile (M) : le bateau.



La vitesse absolue : vitesse du bateau par rapport à la terre

$$v_a = v(\text{Mobile}/R) = 5 \text{ km/h}$$

La vitesse relative : vitesse du bateau par rapport au courant d'eau

$$v_r = v(\text{Mobile}/R') = 4 \text{ km/h}$$

La vitesse d'entraînement : vitesse du courant d'eau par rapport à la terre

$$v_e = v(R'/R) = ?$$

2. La vitesse et la direction du courant d'eau (v_e) :

$$\begin{aligned} \vec{v}_a &= \vec{v}_r + \vec{v}_e \rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r \rightarrow (\vec{v}_e)^2 = (\vec{v}_a - \vec{v}_r)^2 \rightarrow v_e^2 = v_a^2 + v_r^2 - 2\vec{v}_a \cdot \vec{v}_r \\ &= v_a^2 + v_r^2 - 2v_a v_r \cos(30^\circ) \end{aligned}$$

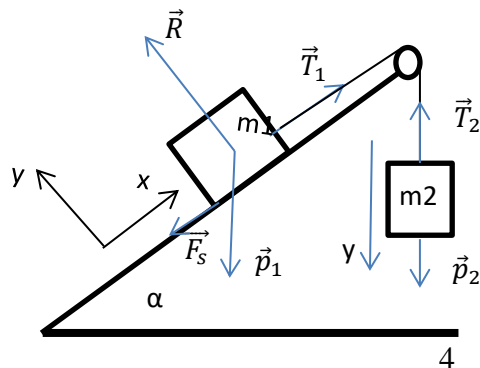
Donc :

$$v_e = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 - 2v_a v_r \cos(30^\circ)} = 2.52 \text{ km/h}$$

La direction. En utilisant la loi des sinus :

$$\frac{v_e}{\sin 30^\circ} = \frac{v_a}{\sin \alpha} \rightarrow \sin \alpha = \frac{v_a}{v_e} \sin 30^\circ \rightarrow \alpha = 82.77^\circ$$

Exercice 06



1. La masse minimale m_{2min} de S_2 :

En appliquant le PDF :

Sur S_1 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{F}_s = \vec{0}$$

Projections :

$$\begin{cases} (OX) : -P_1 \sin \alpha + T_1 - F_s = 0 & (1) \\ (OY) : -P_1 \cos \alpha + R = 0 & (2) \end{cases}$$

Sachant que :

$$F_s = \mu_s R = \mu_s P_1 \cos \alpha$$

L'équation (1) devient :

$$P_1 (\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha) + T_1 = 0 \rightarrow T_1 = P_1 (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha) \quad (3)$$

Sur S_2 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

Projections :

$$(OY) : P_2 - T_2 = 0$$

$$T_2 = P_2 \quad (4)$$

Le fil est inextensible et de mass négligeable $T_2 = T_1$ (3 = 4)

$$P_2 = P_1 (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha) \rightarrow m_{2min} = m_1 (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha) = 1.1kg$$

2. On prend $m_2 = 1.5 kg$:

2.1. L'accélération prise par les deux masses :

On a $m_2 > m_{2min}$ le mouvement se fait dans le sens de m_2 on applique le principe fondamental de la dynamique :

Sur S_1 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_1 \vec{a} \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{F}_d = m_1 \vec{a}_1$$

Projections :

$$\begin{cases} (OX): -P_1 \sin \alpha + T_1 - F_d = m_1 a_1 & (1) \\ (OY): -P_1 \cos \alpha + R = 0 & (2) \end{cases}$$

Sachant que :

$$F_s = \mu_d R = \mu_d P_1 \cos \alpha$$

L'équation (1) devient :

$$-P_1 (\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha) + T_1 = m_1 a_1 \quad (3)$$

Sur S2 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

Projections :

$$(OY): P_2 - T_2 = m_2 a_2 \quad (4)$$

Le fil est inextensible et de masse négligeable $T_2 = T_1$ et $a_1 = a_2$; (3) + (4)

$$-P_1 (\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) + P_2 = (m_1 + m_2) a \rightarrow a = \frac{m_2 - m_1 (\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}{m_1 + m_2} g = 2.9 \text{ m/s}^2$$

2.2. La hauteur h

$$h = \frac{1}{2} a t_h^2 = 5.8 \text{ m}$$

La vitesse des deux masses lorsque la masse m_2 heurte le sol :

$$v = a t_h = 5.8 \text{ m/s}$$

Exercice 07 :

1. La force \vec{F} est conservative :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{F}) = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

En remarquant que $F_z = 0$, F_x et F_y ne dépendent pas de z . On a donc :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{F}) = \vec{0} \rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} = 4xy$$

Le travail de la force \vec{F} :

le travail élémentaire dW de la \vec{F} égale :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Sachant que :

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Alors :

$$dW = (2xy^2)dx + (2x^2y)dy$$

a. Le travail suivant le segment OB :

L'équation de segment est :

$$y = x \rightarrow dy = dx$$

Par conséquent :

$$dW = 2x(x)^2dx + 2x^2(x)dx = 4x^3dx$$

$$W_{OB}(\vec{F}) = \int_0^3 4x^3dx = x^4|_0^3 = 81 J$$

b. Le travail suivant le segment OA ensuite suivant le segment AB avec A(3,0)

$$W_{OAB}(\vec{F}) = W_{OA}(\vec{F}) + W_{AB}(\vec{F})$$

Le chemin OA : $y = 0$, $dy = 0$ et x varie de 0 à 3

$$W_{OA}(\vec{F}) = 0$$

Le chemin AB : $x = 3$, $dx = 0$ et y varie de 0 à 3

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_0^3 18ydy = 81 J$$

c. On remarque que $W_{OB}(\vec{F}) = W_{OAB}(\vec{F})$. Le travail est indépendant du chemin suivi. Par conséquent, la force \vec{F} est conservative.

Exercice 08 :

1. La vitesse au point B :

En appliquant théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}_{NC})$$

Dans notre cas : le poids est une force conservative, la réaction ne travaille pas et il n'y a pas de frottement. Par conséquent :

$$W_{AB}(\vec{F}_{NC}) = 0$$

L'énergie mécanique est conservée :

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = 0 \rightarrow E_M(B) = E_M(A)$$

$$E_M(A) = E_C(A) + E_P(A) ; E_M(B) = E_C(B) + E_P(B)$$

$$E_C(A) = 0 ; E_P(A) = mgh$$

$$E_C(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 ; E_P(B) = 0$$

L'origine des énergies potentielles est prise au niveau du sol (axe OX). Par conséquent :

$$E_M(B) = E_M(A) \rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \rightarrow v_B = 9.9 \text{ m/s}$$

2. Vitesse au point M. Pour les mêmes raisons qu'en 1, on a :

$$\Delta E_M = E_M(M) - E_M(A) = 0$$

$$E_M(A) = E_C(A) + E_P(A) ; E_M(M) = E_C(M) + E_P(M)$$

$$E_C(A) = 0 ; E_P(A) = mgh$$

$$E_C(M) = \frac{1}{2}mv_M^2 ; E_P(M) = mgh'$$

Ce qui donne :

$$mgh = \frac{1}{2}mv_M^2 + mgh'$$

D'après la figure : $h' = R(1 + \cos \theta)$. Par conséquent :

$$v_M = \sqrt{2g(h - R(1 + \cos \theta))} = 6.26 \text{ m/s}$$

3. L'expression de la force de réaction \vec{N} :

PFD:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Projections dans la base intrinsèque (\vec{u}_t, \vec{u}_n) :

$$\begin{cases} \vec{u}_n : P_N + N = ma_N & (1) \\ \vec{u}_t : -P_T = ma_T & (2) \end{cases}$$

De l'équation (1), on a:

$$mg \cos \theta + N = \frac{mv_M^2}{R}$$

Soit :

$$N = m \left(\frac{v_M^2}{R} - g \cos \theta \right) = 14.7 \text{ N}$$

