

# PHYSIQUE

**TOUT LE COURS EN FICHES**

Licence • CAPES • Prépas



# PHYSIQUE

## TOUT LE COURS EN FICHES

Licence • CAPES • Prépas

*Sous la direction de*

Laurent Gautron

Professeur à l'université Paris-Est, Marne-la Vallée

■ Christophe Balland

Maître de conférences à l'université Pierre-et-Marie-Curie (UPMC, Paris)

■ Laurent Cirio

Maître de conférences à l'université Paris-Est, Marne-la-Vallée

■ Richard Mauduit

Professeur en BTS au lycée Robert Schuman (Le Havre)

■ Odile Picon

Professeur à l'université Paris-Est, Marne-la Vallée

■ Eric Wenner

Professeur en BTS au lycée Robert Schuman (Le Havre)

DUNOD

Illustration de couverture :  
« Tesla Sphere » © underworld-Fotolia.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	---	--

© Dunod, Paris, 2015

5 rue Laromiguière, 75005 Paris  
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-072407-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

Avant-propos	XI
Comment utiliser cet ouvrage ?	XII
Remerciements	XIV

## Partie 1 – Mécanique et physique moderne

<b>Chapitre 1</b>	<b>La cinématique du point</b>	<b>1</b>
Fiche 1	Le repérage dans l'espace et le temps	2
Fiche 2	Les coordonnées cartésiennes et cylindriques	4
Fiche 3	Le repère de Frenet	6
Fiche 4	La vitesse et l'accélération	8
Fiche 5	La vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques	10
Fiche 6	L'accélération en coordonnées cartésiennes et cylindriques	12
Fiche 7	La vitesse et l'accélération dans le repère de Frenet	14
Focus	<i>Les horloges atomiques</i>	16
QCM		17
Exercices		19
<b>Chapitre 2</b>	<b>La dynamique du point et des systèmes de points</b>	<b>21</b>
Fiche 8	Le principe d'inertie et les référentiels galiléens	22
Fiche 9	Le principe fondamental de la dynamique	24
Fiche 10	Le principe de l'action et de la réaction	26
Fiche 11	La force d'attraction gravitationnelle	28
Fiche 12	Les forces de frottement	30
Fiche 13	Le travail d'une force	32
Fiche 14	Les forces conservatives	34
Fiche 15	L'énergie potentielle	36
Fiche 16	Les puits et les barrières de potentiel	38
Fiche 17	Le théorème de l'énergie cinétique	40
Fiche 18	La conservation de l'énergie mécanique	42
Fiche 19	Les oscillations harmoniques	44
Fiche 20	Les oscillations amorties	46
Fiche 21	Les oscillations forcées et le phénomène de résonance	48
Fiche 22	La description d'un système de points	50
Fiche 23	Les grandeurs dynamiques d'un système de points	52
Fiche 24	Les grandeurs énergétiques d'un système de points	54
Fiche 25	Les théorèmes généraux de la mécanique d'un système de points	56
Fiche 26	Les collisions de particules matérielles	58
Focus	<i>Isaac Newton (1642-1727), le père de la mécanique classique</i>	60
QCM		61
Exercices		63

<b>Chapitre 3</b>	<b>La mécanique terrestre et céleste</b>	65
Fiche 27	Le changement de référentiel	66
Fiche 28	La composition des vitesses	68
Fiche 29	La composition des accélérations	70
Fiche 30	Les référentiels en translation	72
Fiche 31	Les référentiels en rotation autour d'un axe fixe : définitions	74
Fiche 32	Les référentiels en rotation autour d'un axe fixe : vitesses et accélérations	76
Fiche 33	Les forces d'inertie	78
Fiche 34	L'accélération gravitationnelle et la latitude	80
Fiche 35	Deux phénomènes terrestres	82
Fiche 36	Le théorème du moment cinétique	84
Fiche 37	Le mouvement dû à des forces centrales	86
Fiche 38	Les lois de Kepler	88
Focus	<i>Objectif Mars !</i>	90
QCM		91
Exercices		93
<b>Chapitre 4</b>	<b>La physique « moderne »</b>	95
Fiche 39	La relativité restreinte	96
Fiche 40	La dynamique relativiste	98
Fiche 41	Le photon	100
Fiche 42	Les ondes et les particules	102
Fiche 43	Les atomes	104
Fiche 44	La classification périodique	106
Fiche 45	Le noyau atomique	108
Fiche 46	La radioactivité	110
Fiche 47	Le modèle standard	112
Fiche 48	Les particules élémentaires	114
Fiche 49	La structure des solides	116
Fiche 50	Les propriétés des solides	118
Focus	<i>Les expériences de physique au CERN : comprendre l'origine et le fonctionnement de l'Univers</i>	120
QCM		121
Exercices		123

## Partie 2 – Thermodynamique

<b>Chapitre 5</b>	<b>Les systèmes thermodynamiques</b>	125
Fiche 51	Les systèmes et les variables d'état	126
Fiche 52	L'équation d'état d'un système	128
Fiche 53	Les gaz parfaits	130
Fiche 54	Les mélanges de gaz parfaits	132
Fiche 55	Les gaz réels	134
Fiche 56	La théorie cinétique des gaz parfaits	136
Fiche 57	La température	138
Fiche 58	La thermométrie	140
Fiche 59	L'étude microscopique du gaz parfait	142
Fiche 60	La pression en un point d'un fluide	144
Fiche 61	La statique des fluides	146
Fiche 62	La poussée d'Archimède	148

Fiche 63	Les coefficients thermoélastiques	150
<i>Focus</i>	<i>Le pouvoir des forces de pression</i>	152
<i>QCM</i>		153
<i>Exercices</i>		155
<b>Chapitre 6</b>	<b>Les principes de la thermodynamique</b>	159
Fiche 64	Les transformations thermodynamiques	160
Fiche 65	L'énergie interne et l'énergie totale	162
Fiche 66	Les transferts thermiques	164
Fiche 67	Les coefficients calorimétriques	166
Fiche 68	Le travail des forces de pression	168
Fiche 69	Le premier principe de la thermodynamique (système fermé)	170
Fiche 70	Les lois de Joule	172
Fiche 71	Les transformations du gaz parfait (1)	174
Fiche 72	Les transformations du gaz parfait (2)	176
Fiche 73	Le premier principe de la thermodynamique (système ouvert)	178
Fiche 74	L'entropie et le deuxième principe	180
Fiche 75	L'interprétation statistique de l'entropie	182
Fiche 76	Le deuxième principe et son utilisation	184
Fiche 77	Le diagramme entropique ( $T, S$ )	186
Fiche 78	L'énergie libre – L'enthalpie libre	188
Fiche 79	Les propriétés des fonctions $F$ et $G$	190
<i>Focus</i>	<i>De l'énergie à l'exergie : la démarche qualité</i>	192
<i>QCM</i>		193
<i>Exercices</i>		195
<b>Chapitre 7</b>	<b>Les transferts de masse et de chaleur</b>	199
Fiche 80	Les phénomènes de transport	200
Fiche 81	La résolution de l'équation de diffusion	202
Fiche 82	La diffusion particulière	204
Fiche 83	La diffusion thermique par conduction	206
Fiche 84	La diffusion thermique par convection	208
Fiche 85	Les transferts thermiques radiatifs	210
Fiche 86	Les caractéristiques énergétiques du rayonnement thermique	212
Fiche 87	Les résistances thermiques de systèmes	214
Fiche 88	Les échangeurs thermiques	216
<i>Focus</i>	<i>Question de sensibilité...</i>	218
<i>QCM</i>		219
<i>Exercices</i>		221
<b>Chapitre 8</b>	<b>Les cycles thermodynamiques avec ou sans changements d'états</b>	225
Fiche 89	Les changements d'état d'un corps pur	226
Fiche 90	La relation de Clapeyron	228
Fiche 91	L'équilibre liquide-vapeur	230
Fiche 92	La courbe de saturation	232
Fiche 93	Les fonctions d'état du corps pur diphasique liquide-vapeur	234
Fiche 94	Les cycles thermodynamiques	236
Fiche 95	Le cycle moteur de Carnot	238
Fiche 96	Les moteurs à combustion interne	240

Fiche 97	Les cycles moteurs à changement d'état	242
Fiche 98	Les cycles récepteurs et leurs efficacités	244
Fiche 99	Les cycles récepteurs réels	246
<i>Focus</i>	<i>La cogénération : principe et intérêt</i>	248
<i>QCM</i>		249
<i>Exercices</i>		251

## Partie 3 – Ondes et optique

<b>Chapitre 9</b>	<b>Les ondes</b>	255
Fiche 100	Qu'est-ce qu'une onde ?	256
Fiche 101	La propagation suivant une direction $x$	258
Fiche 102	La propagation à trois dimensions	260
Fiche 103	Les ondes sinusoïdales à une dimension	262
Fiche 104	Les ondes sinusoïdales à trois dimensions	264
Fiche 105	La puissance transportée par une onde progressive	266
Fiche 106	Le changement de milieu	268
Fiche 107	La corde vibrante	270
Fiche 108	Les ondes acoustiques	272
Fiche 109	Les ondes stationnaires	274
Fiche 110	Les modes propres, la résonance	276
<i>Focus</i>	<i>Les instruments de musique et les gammes</i>	278
<i>QCM</i>		279
<i>Exercices</i>		281
<b>Chapitre 10</b>	<b>Nature et propagation de la lumière</b>	283
Fiche 111	La nature de la lumière	284
Fiche 112	De l'onde au rayon lumineux	286
Fiche 113	Le principe de Fermat	288
Fiche 114	Les lois de Snell-Descartes	290
Fiche 115	L'interprétation de la loi de la réfraction	292
Fiche 116	L'indice de réfraction	294
Fiche 117	Les fibres optiques	296
Fiche 118	Le prisme	298
Fiche 119	Les coefficients de réflexion et de transmission	300
<i>Focus</i>	<i>Le phénomène de mirage</i>	302
<i>QCM</i>		303
<i>Exercices</i>		305
<b>Chapitre 11</b>	<b>La formation des images en optique</b>	307
Fiche 120	Qu'est-ce qu'une image optique ?	308
Fiche 121	Le stigmatisme et les conditions de Gauss	310
Fiche 122	Les foyers et les plans focaux d'un système centré	312
Fiche 123	Les plans principaux et les distances focales d'un système centré	314
Fiche 124	La relation de conjugaison d'un système mince	316
Fiche 125	Les miroirs	318
Fiche 126	Les lentilles minces	320
Fiche 127	La construction de l'image géométrique d'un objet par un système mince	322
Fiche 128	Les rayons particuliers pour la construction d'une image géométrique	324
Fiche 129	La formation d'une image par un miroir	326



Fiche 130	La formation d'une image par une lentille	328
Fiche 131	La mesure de distances focales de lentilles	330
Fiche 132	Les instruments optiques	332
Focus	<i>La physiologie de l'œil humain</i>	334
QCM		335
Exercices		337

## Chapitre 12 Interférences et diffraction des ondes lumineuses 339

Fiche 133	Les interférences et la diffraction	340
Fiche 134	Les interférences à deux ondes : source ponctuelle monochromatique (1)	342
Fiche 135	Les interférences à deux ondes : source ponctuelle monochromatique (2)	344
Fiche 136	Le dispositif des trous d'Young	346
Fiche 137	Les interférences à deux ondes : le cas d'un doublet	348
Fiche 138	Les interférences à deux ondes : le cas d'un continuum de longueurs d'onde	350
Fiche 139	La diffraction des ondes lumineuses	352
Fiche 140	La diffraction par une ouverture circulaire	354
Fiche 141	La diffraction par une ouverture rectangulaire	356
Fiche 142	La diffraction par deux fentes minces	358
Fiche 143	La diffraction par $N$ fentes : le réseau (1)	360
Fiche 144	La diffraction par $N$ fentes : le réseau (2)	362
Focus	<i>L'interféromètre de Michelson</i>	364
QCM		365
Exercices		367

## Partie 4 – Électricité, électromagnétisme et électronique

### Chapitre 13 L'électrostatique et la magnétostatique 369

Fiche 145	Les charges électriques	370
Fiche 146	La force et le champ électrostatiques créés par des charges ponctuelles	372
Fiche 147	Le champ électrostatique créé par une distribution continue de charges	374
Fiche 148	La circulation du champ électrostatique et le potentiel électrostatique	376
Fiche 149	Le calcul des potentiels électrostatiques	378
Fiche 150	Le calcul d'un champ électrique à partir du potentiel	380
Fiche 151	Le dipôle électrostatique	382
Fiche 152	Le théorème de Gauss	384
Fiche 153	Les applications du théorème de Gauss	386
Fiche 154	L'énergie potentielle électrostatique	388
Fiche 155	La force de Lorentz	390
Fiche 156	L'induction magnétique créée par un courant filiforme	392
Fiche 157	Les propriétés de l'induction magnétique	394
Fiche 158	Exemples de calculs d'inductions magnétiques	396
Fiche 159	La force de Laplace sur un conducteur parcouru par un courant	398
Fiche 160	Les interactions magnétiques	400
Focus	<i>La détermination de la charge élémentaire de l'électron</i>	402
QCM		403
Exercices		405

### Chapitre 14 L'électrocinétique 407

Fiche 161	Les grandeurs électriques fondamentales	408
Fiche 162	Les conventions et la caractéristique courant-tension	410

Fiche 163	Les différents types de dipôles	412
Fiche 164	La loi d'Ohm	414
Fiche 165	Les circuits en régime continu	416
Fiche 166	Les théorèmes d'électrocinétique	418
Fiche 167	L'établissement du régime continu pour un circuit inductif	420
Fiche 168	L'établissement du régime continu pour un circuit capacitif	422
Fiche 169	L'étude du circuit <i>RLC</i>	424
Fiche 170	Le régime sinusoïdal et les notations complexes	426
Fiche 171	Les impédances complexes	428
Fiche 172	La puissance électrique	430
Fiche 173	Le circuit résonant	432
<i>Focus</i>	<i>Différents types de conceptions électriques</i>	434
<i>QCM</i>		435
<i>Exercices</i>		437
<b>Chapitre 15</b>	<b>L'électromagnétisme</b>	439
Fiche 174	L'induction magnétique	440
Fiche 175	L'inductance propre d'un circuit et l'inductance mutuelle	442
Fiche 176	Les opérateurs vectoriels	444
Fiche 177	Les équations de Maxwell dans le vide	446
Fiche 178	L'interprétation intégrale des équations de Maxwell	448
Fiche 179	La solution des équations de Maxwell sous forme d'ondes planes	450
Fiche 180	Les propriétés des ondes planes progressives monochromatiques	452
Fiche 181	L'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting	454
<i>Focus</i>	<i>Le four à micro-ondes</i>	456
<i>QCM</i>		457
<i>Exercices</i>		459
<b>Chapitre 16</b>	<b>L'électronique</b>	461
Fiche 182	La jonction PN	462
Fiche 183	La diode à jonction PN polarisée	464
Fiche 184	Les modèles électriques	466
Fiche 185	L'étude statique et dynamique	468
Fiche 186	Le transistor bipolaire	470
Fiche 187	Les réseaux de caractéristiques Le régime statique	472
Fiche 188	Les analyses statique et dynamique	474
Fiche 189	Le schéma équivalent petit signal Les paramètres hybrides	476
Fiche 190	L'amplificateur à transistor	478
Fiche 191	L'amplificateur opérationnel	480
Fiche 192	Les modes de fonctionnement de l'AOP	482
Fiche 193	Les limitations statiques et dynamiques de l'AOP	484
<i>Focus</i>	<i>La lampe à diodes LED... connectée</i>	486
<i>QCM</i>		487
<i>Exercices</i>		497
	Corrigés des exercices	501
	Références bibliographiques	571
	Index	575

# Avant-propos

**La physique est la science qui permet de décrire et de comprendre la nature** ; c'est pour cette raison que, pendant longtemps, on parlait plutôt de *philosophie naturelle* pour expliquer l'origine de phénomènes naturels.

Les premiers « physiciens » ont été de brillants astronomes, et comme leurs questions tournaient autour de l'Univers, de la Terre, de l'Homme dans l'Univers, ils étaient aussi souvent de grands penseurs et de grands philosophes.

Copernic, en plaçant le Soleil au centre de l'Univers, a bouleversé notre vision du monde. Galilée et Newton peuvent être considérés comme les pères fondateurs de la physique, en mettant l'expérimentation et le formalisme mathématique en avant pour le premier, et en posant les principes de la physique pour le second. À partir du  $xvi^e$  siècle, des avancées considérables sont réalisées par de nombreux scientifiques dans tous les domaines de la physique, du fait notamment des progrès techniques et des instruments d'observation. Ces outils ont permis la réalisation d'expériences essentielles pour la découverte des lois de la physique toujours enseignées de nos jours. Ce sont surtout les bases de cette physique dite classique qui sont traitées dans cet ouvrage.

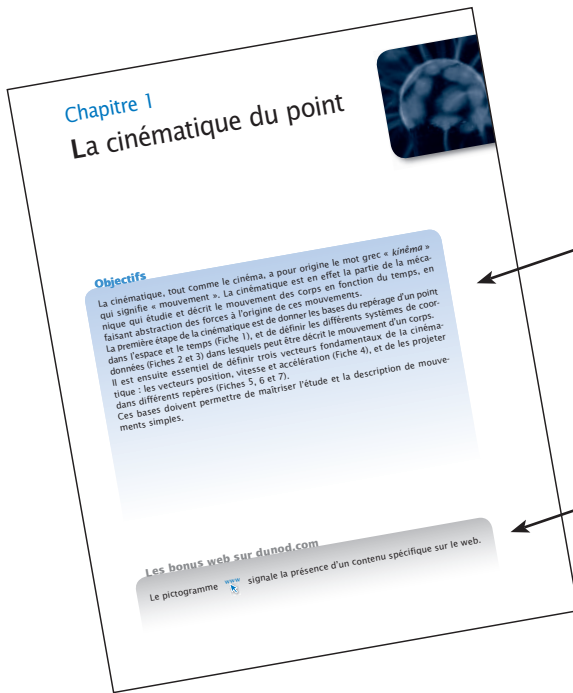
Les progrès techniques de la deuxième partie du  $xix^e$  siècle permettent la réalisation d'expériences plus fiables et beaucoup plus précises : les portes s'ouvrent vers le monde de l'infiniment petit, à l'échelle microscopique (échelle du micromètre). Cette période de transition entre les deux siècles constitue un bouleversement pour la physique, avec notamment les découvertes majeures de l'électron, de l'atome, de la radioactivité et des rayons X. La physique atomique et nucléaire était née, amenant alors la révolution des quanta.

Parallèlement à la physique quantique, Einstein a élaboré au début du  $xx^e$  siècle la théorie de la relativité restreinte en premier lieu puis celle de la relativité générale, qui s'applique à l'infiniment grand (planètes, trous noirs, gravité...).

Cet ouvrage est composé de quatre grandes parties : la **mécanique** avec une ouverture sur la physique moderne, la **thermodynamique** qui présente les bases puis les applications aux différentes machines thermiques, l'**optique** qui considère le caractère ondulatoire de la lumière et l'**électricité** qui présente aussi l'électrostatique et l'électromagnétisme avec un prolongement vers des applications électroniques. Chacune de ces parties est elle-même découpée en chapitres présentant les notions de base jusqu'aux applications importantes. Le découpage en fiches permet au lecteur de trouver rapidement l'information recherchée. La lecture est rendue facile par une présentation simple illustrée de nombreux schémas, avec des QCM corrigés pour s'auto-évaluer, des exercices d'application avec corrigés et des bonus web téléchargeables sur la page associée à l'ouvrage sur le site [dunod.com](http://dunod.com).

L'ouvrage s'adresse aux étudiants en Licences (L1 et L2) de Sciences de la Matière, de Sciences Physique, de Physique-Chimie, de Sciences de l'Ingénieur, aux étudiants abordant les études de santé (PACES, concours paramédicaux), aux élèves des classes préparatoires et des grandes écoles, ainsi qu'aux candidats aux concours de l'enseignement.

# Comment utiliser



Le cours est structuré en 4 parties et 16 chapitres

Des compléments en ligne sur le site [dunod.com](http://dunod.com)

193 fiches de cours  
Les notions essentielles avec des renvois pour naviguer d'une fiche à l'autre

Des renvois vers les fiches ou les bonus web

**fiche 133** **Les interférences et la diffraction**

Les phénomènes d'interférences et de diffraction de la lumière ne peuvent s'expliquer que dans le cadre d'une description ondulatoire de la lumière. Ces phénomènes ne se limitent pas aux ondes lumineuses, et on les retrouve pour les autres types d'ondes : ondes mécaniques à la surface de l'eau, ondes acoustiques, ondes centimétriques. Le phénomène de diffraction est de même nature que le phénomène d'interférences.

**1. Le principe d'interférences**  
Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, l'Anglais Thomas Young réalisa l'expérience célèbre qui porte désormais son nom : il fit passer la lumière issue d'une source ponctuelle à travers deux petits trous voisins percés dans un écran opaque (**expérience d'Young**). Les deux trous agissent alors comme deux sources ponctuelles émettant de la lumière dans deux cônes divergents par diffraction. Là où ces cônes se superposent, il apparaît une alternance de traits sombres et clairs, appelés **franges d'interférences**, à l'intérieur d'anneaux de diffraction (figure 133.1).

**Figure 133.1** L'expérience d'Young.  
La superposition des cônes de lumière diffractés par les trous donne des franges d'interférence rectilignes à l'intérieur d'un système d'anneaux de diffraction concentriques.  
Young a formulé une « loi d'interférences » qui rend compte de cette observation.

**La loi d'interférences de Young**  
« Lorsque deux portions de la même lumière arrivent à l'œil par des voies différentes (...), la lumière est au maximum d'intensité lorsque la différence des chemins parcourus est un multiple d'une certaine longueur, et au minimum d'intensité pour l'état intermédiaire des portions interférentes. »

**2. La diffraction des ondes lumineuses**  
Contrairement à ce que prédisent les lois de l'optique géométrique, on observe au voisinage du bord d'un écran éclairé par un faisceau lumineux monochromatique la présence d'une alternance de franges sombres et lumineuses. Ce phénomène résulte du changement de direction de la lumière au voisinage du bord de l'écran. Plus généralement, au passage d'un obstacle, la lumière est déviée et les ondes ainsi diffractées vont aller interférer dans des directions privilégiées. La figure 133.2 illustre la diffraction par un bord d'écran.

**Figure 133.2** La diffraction par un bord d'écran.  
Alors que l'optique géométrique (principe de Fermat) prédit que, lorsque l'on éclaire le bord d'un écran, toute l'intensité lumineuse arrive hors de l'écran est transmise, et toute l'intensité lumineuse arrivant sur l'écran opaque est stoppée, l'expérience montre qu'il n'en est rien : sous certaines conditions, on voit apparaître des franges de diffraction au voisinage du bord. (Photo © C. Italland.)

**3. La notion de cohérence**  
Pour que le phénomène d'interférences se produise, il faut en principe une source monochromatique et ponctuelle pour laquelle les ondes émises par chaque point de la source sont en phase. Ces conditions sont difficilement réalisables pour une source lumineuse. Lorsqu'une source permet d'obtenir des interférences, on dit qu'elle est **cohérente**. On distingue la **cohérence temporelle** de la **cohérence spatiale**.  
Dans les deux cas, la disparition de la cohérence d'une source entraîne un **brouillage** et la disparition des interférences par superposition de plusieurs systèmes de franges décalés les uns par rapport aux autres.  
Dans le premier cas, ce brouillage est dû à la présence de plusieurs longueurs d'onde dans la source qui créent chacune un système de frange dont la période est différente.  
Dans le second cas, la source étant étendue spatialement, chaque point constitue une source qui produit un système d'interférence décalé par rapport à ceux produits par les points voisins.

**De très nombreux schémas**

**Chapitre 12**

340 341

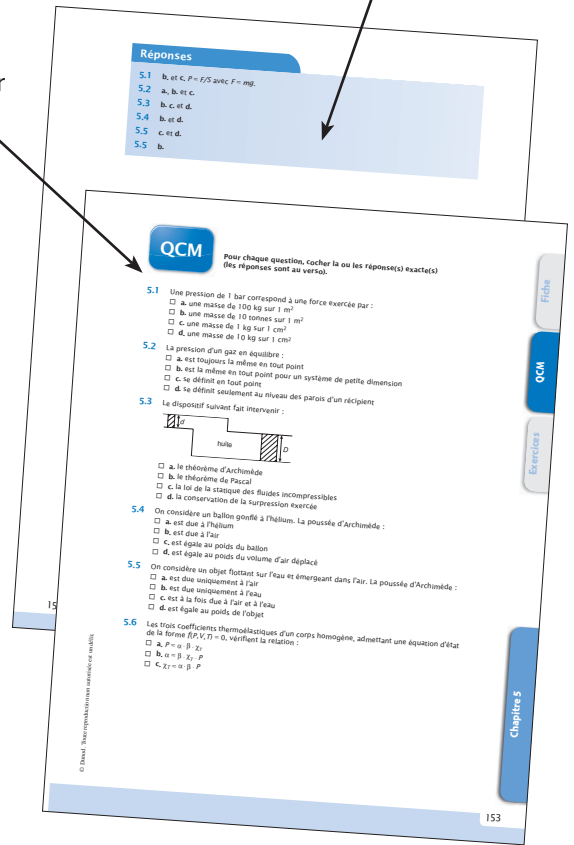
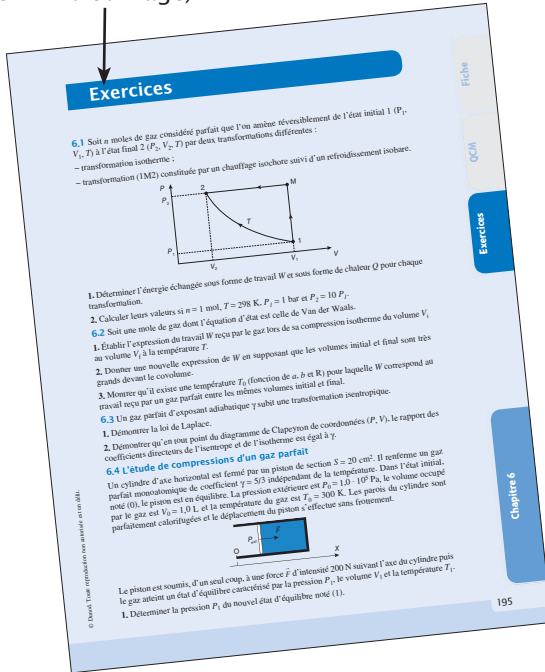
Les notions à retenir

# cet ouvrage ?

Les réponses commentées au verso

Des exercices en fin de chapitre pour réviser (corrigés en fin d'ouvrage)

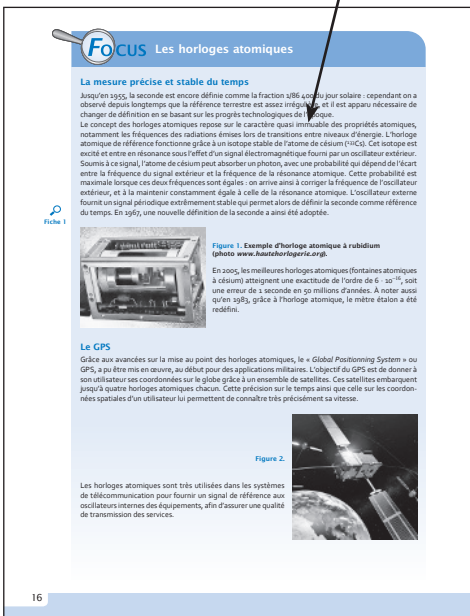
Des QCM en fin de chapitre pour s'auto-évaluer



Des focus techniques ou historiques sur une page à la fin de chaque chapitre

Et aussi...

- Un index détaillé
- Des bonus web : QCM et exercices corrigés supplémentaires, compléments de cours.



- Points clés
- À noter
- Exemples
- Renvois aux bonus web
- Renvois aux autres fiches

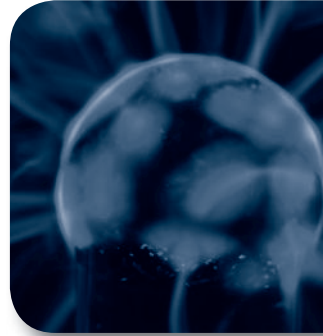
# Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier très sincèrement les personnes suivantes pour leurs relectures et conseils tout au long de la rédaction de cet ouvrage :

- Florence Rouyer, maître de conférences, université Paris-Est, Marne-la-Vallée.
- Lidija Andric, maître de conférences, université Paris-Est, Marne-la-Vallée
- Jean-Louis Izbicki, professeur des universités, Le Havre.
- Martine Mouchet, maître de conférences, université Paris-Diderot.
- Sébastien Payan, professeur des universités, université Pierre-et-Marie-Curie (UPMC, Paris).

# Chapitre 1

## La cinématique du point



### Objectifs


La cinématique, tout comme le cinéma, a pour origine le mot grec « *kínêma* » qui signifie « mouvement ». La cinématique est en effet la partie de la mécanique qui étudie et décrit le mouvement des corps en fonction du temps, en faisant abstraction des forces à l'origine de ces mouvements.

La première étape de la cinématique est de donner les bases du repérage d'un point dans l'espace et le temps (Fiche 1), et de définir les différents systèmes de coordonnées (Fiches 2 et 3) dans lesquels peut être décrit le mouvement d'un corps.

Il est ensuite essentiel de définir trois vecteurs fondamentaux de la cinématique : les vecteurs position, vitesse et accélération (Fiche 4), et de les projeter dans différents repères (Fiches 5, 6 et 7).

Ces bases doivent permettre de maîtriser l'étude et la description de mouvements simples.

### Les bonus web sur [dunod.com](http://dunod.com)

Le pictogramme  signale la présence d'un contenu spécifique sur le web.

# Le repérage dans l'espace et le temps

## 1. Le point matériel comme représentation

Pour décrire plus simplement les mouvements d'un corps, on assimile souvent ce dernier à un point appelé point matériel.

Un corps matériel peut être assimilé à un point s'il ne roule pas sur lui-même et si ses dimensions caractéristiques sont petites par rapport aux distances qu'il parcourt.

Un point matériel est un point géométrique dont la position peut être parfaitement définie par trois coordonnées seulement.

En mécanique, il est essentiel de définir le système avant toute étude ou calcul. Ensuite en mécanique du point, pour simplifier, on assimile ce système à un point matériel.

## 2. Le choix d'un repère et d'un référentiel

Pour décrire la position d'un objet dans l'espace, il est nécessaire de disposer d'une référence. Par exemple, un homme assis dans un train est immobile par rapport au wagon, mais en mouvement par rapport à la Terre. Ainsi, pour déterminer le mouvement d'un point, on se rapporte à un solide  $S$  supposé indéformable qui doit être défini clairement. Ce solide constitue le référentiel d'étude ( $R$ ).

Ensuite, on repère les points de l'espace dans ce référentiel à l'aide d'un repère orthonormé direct, soit un point origine particulier au solide  $S$  (souvent on prend le centre de gravité de  $S$ ) et trois axes orthogonaux formant un trièdre direct. Plusieurs repères ou systèmes de coordonnées peuvent alors être choisis en fonction notamment de la géométrie du problème.



### L'importance des schémas

Un bon schéma est la clef de la résolution de tout problème de mécanique. Comme l'objectif est de décrire ici des mouvements dans l'espace, il est particulièrement important de savoir faire des dessins en perspective, et de savoir réaliser les projections adéquates selon des plans bien choisis. Ce point sera détaillé lors de la présentation des systèmes de coordonnées.



Fiche 2

## 3. Le repérage dans le temps

La géométrie dans l'espace ne suffit pas à décrire les mouvements en mécanique. Il est nécessaire d'introduire la notion d'événement décrivant un phénomène instantané. On dit qu'on établit une chronologie lorsqu'on sait classer une succession d'événements. Un phénomène physique se décrit donc par le lieu où il se produit mais aussi par l'instant où il se produit.

La mécanique classique repose sur une hypothèse essentielle : le temps est considéré comme **absolu** et **universel**. Cela signifie que la notion de temps est indépendante du référentiel et du mouvement. Ainsi, un intervalle de temps entre deux événements est



le même quel que soit l'observateur et quel que soit le mouvement de l'observateur. Cette hypothèse a été remise en cause par les théories d'Einstein, notamment en ce qui concerne les mouvements se produisant à des vitesses proches de la vitesse de la lumière : ces théories ont ouvert la voie à une nouvelle forme de mécanique, la mécanique quantique. Celle-ci sera introduite et développée dans le chapitre 4. Par ailleurs, le temps est aussi considéré comme **irréversible**, monotone et croissant : cette hypothèse implicite repose sur le principe de causalité qui postule qu'un effet ne peut être antérieur à sa cause.

Au fil des siècles, la notion de temps et sa mesure ont beaucoup évolué en fonction des avancées technologiques et des progrès scientifiques. Basée d'abord sur la période de rotation de la Terre, puis sur celle de la rotation de la Terre autour du Soleil, la notion de temps repose maintenant sur des mesures réalisées avec des horloges atomiques.

Pour décrire le mouvement dans l'espace, on a défini un repère avec une origine : cette origine peut correspondre à un observateur fixe ou mobile, le repère étant considéré comme fixe ou local se déplaçant avec le point M respectivement. De même, pour décrire un mouvement dans le temps, il est nécessaire de définir une origine des temps : un temps  $t_0$  ou  $t = 0$  s, à partir duquel on pourra définir une chronologie d'événements liés au mouvement du point M. On a indiqué plus haut que l'observateur à partir duquel on repère le mouvement du point matériel M, était considéré comme le référentiel (R). Il faut noter que dans certains cas, il est d'usage de considérer ce référentiel d'étude du mouvement comme étant l'association du repère géométrique dans l'espace et du repère chronologique dans le temps. Ce type de définition « élargie » du référentiel sera utilisé dans la suite de ce cours de mécanique.



### Les unités

Le mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant une durée de  $1/299\,792\,458$  seconde.

La seconde correspond à la durée de  $9\,192\,631\,770$  périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.



### Remarque

Un nouveau système de contrôle des vitesses sur les routes s'appelle le LIDAR (*Light Detection And Ranging*), et il n'utilise pas l'effet doppler (mesure de la variation de fréquence entre l'onde radio envoyée et celle reçue en écho). Il utilise des lasers infrarouges pour effectuer une multitude de calculs de distance dans des intervalles de temps très courts, et il en déduit la vitesse à partir des changements de distance détectés en un temps donné.

Cette technique est appliquée dans les nouveaux radars de la police (les jumelles laser par exemple) mais aussi dans les nouveaux radars automatiques.



## 1. Les coordonnées cartésiennes

On considère un repère constitué de trois axes rattachés à un point origine  $O$ , caractéristique du solide de référence  $(R)$ .

À ce repère on associe une base orthonormée directe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Les vecteurs  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$  sont alors les vecteurs unitaires des axes  $OX, OY$  et  $OZ$  respectivement.

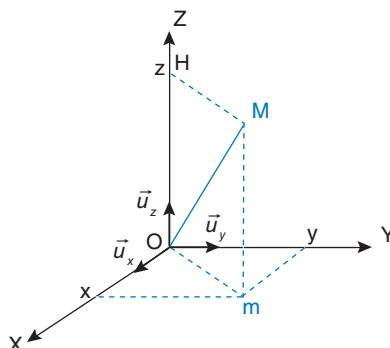
La base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est orthonormée directe si :

- $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$  ;
- les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux ;
- $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$ .

À un instant donné, on repère la position du point  $M$  par le vecteur  $\vec{r} = \overline{OM}$  appelé **vecteur position**. On note  $x, y$  et  $z$  les coordonnées cartésiennes du point  $M$  définies par la relation suivante :

$$\vec{r} = \overline{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$$

Les coordonnées  $x, y$  et  $z$  sont des grandeurs algébriques, positives ou négatives.



**Figure 2.1** Le système de coordonnées cartésiennes.

Représentation du système de coordonnées cartésiennes dans le repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  : cas du point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$ , et du vecteur position  $\vec{r} = \overline{OM}$ .

## 2. Les coordonnées cylindriques

La position du point  $M$  est définie dans un repère  $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On introduit la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  orthonormée directe, associée aux coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Les vecteurs de cette base sont définis comme suit :

- $\vec{u}_\rho = \frac{\overline{Om}}{\rho}$  dans le plan  $(OX, OY)$ .  $\vec{u}_\rho$  est appelé vecteur radial ;
- $\vec{u}_\theta$  est obtenu par rotation de  $+\pi/2$  dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) à partir du vecteur  $\vec{u}_\rho$ , dans le plan  $(OX, OY)$ .  $\vec{u}_\theta$  est appelé vecteur orthoradial ;

- $\vec{u}_z$  est le vecteur directeur de l'axe OZ, identique à celui du repère associé aux coordonnées cartésiennes.

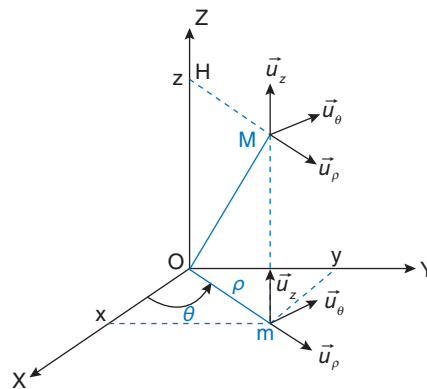
À noter que ce repère n'est pas lié au point O, donc n'est pas lié au référentiel (R). Le repère cylindrique est associé au point M, c'est donc un repère local **mobile**. Dans ce repère, le vecteur position du point M s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{u}_z$$

Les coordonnées cylindriques sont définies comme suit :  $\rho$  est une distance donc toujours positive ; la cote  $z$  est une valeur algébrique (positive ou négative) ; l'angle  $\theta$  est orienté dans le sens (+) défini en imaginant une rotation de l'axe OX vers l'axe OY.

Pour couvrir tout l'espace, il suffit que les coordonnées cylindriques décrivent les intervalles suivants :

$$\rho \in [0, +\infty[ ; \theta \in [0, 2\pi] ; z \in ]-\infty, +\infty[$$



**Figure 2.2** Le système de coordonnées cylindriques.

Représentation du système de coordonnées cylindriques dans le repère  $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  : cas du point M de coordonnées  $(\rho, \theta, z)$ , et du vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ .



### Remarque

- 1) Si le mouvement du point a lieu dans le plan  $(OX, OY)$ , il n'est pas nécessaire d'utiliser la cote  $z$ . On utilise alors les **coordonnées polaires** ( $\rho$ , angle polaire  $\theta$ ). Ainsi les coordonnées cylindriques correspondent aux coordonnées polaires auxquelles on ajoute la cote  $z$ . On parle parfois de coordonnées cylindro-polaires.
- 2) Les relations entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes sont les suivantes :

$$x = \rho \cdot \cos \theta, y = \rho \cdot \sin \theta, z = z, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## 1. La base de Frenet

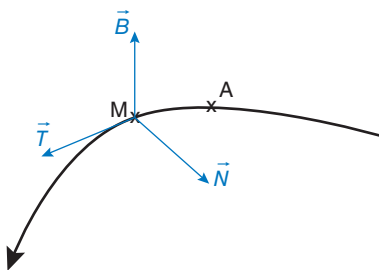
Un autre repère local, appelé repère de Frenet, peut être utilisé pour décrire la position d'un point  $M$ . Il est représenté sur une courbe qui, par définition, correspond à l'ensemble des positions prises par le point  $M$  au cours d'un mouvement quelconque.

Sur cette courbe on fixe une origine  $A$  et un sens pris en général positif dans le sens du mouvement. La position du point  $M$  sur la courbe est alors repérée par la donnée de son abscisse dite curviligne et notée  $s(M)$  : cette abscisse correspond en fait à la longueur de l'arc orienté  $AM$ .

On fait l'hypothèse que lorsque l'arc de cercle  $AM$  est infiniment petit, la courbe peut être considérée comme inscrite dans un plan, appelé alors plan **osculateur**. Dans ce cas, on définit un repère local dit de Frenet avec une base orthonormée directe  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ , où :

- $\vec{T}$  est le vecteur tangent à la courbe au point  $M$  (pour simplifier le formalisme, le sens de  $\vec{T}$  est en général pris dans le sens du mouvement) ;
- le vecteur  $\vec{N}$  est perpendiculaire à  $\vec{T}$  et dirigé vers la concavité de la courbe ( $\vec{N}$  définit alors la normale principale à la courbe) ;
- le vecteur  $\vec{B}$  est perpendiculaire à  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  est tel que le trièdre  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$  soit direct ( $\vec{B}$  définit alors la binormale à la courbe).

À noter que  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  sont inscrits dans le plan osculateur de la courbe lorsque  $M$  est très proche de  $A$ . La base  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$  est mobile et suit le mouvement de  $M$  sur la courbe.



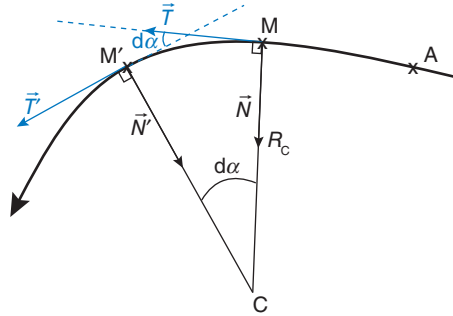
**Figure 3.1** Le système de représentation de Frenet.

Représentation du repère local de Frenet avec la base  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$  orthonormée directe associée. La position de  $M$  sur la courbe orientée est donnée par son abscisse curviligne  $s(M)$  comptée à partir de l'origine  $A$ .

## 2. Les relations entre les vecteurs de la base de Frenet

On considère deux points  $M$  et  $M'$  très proches l'un de l'autre de telle manière qu'ils forment un arc de cercle  $MM' = ds$  infiniment petit. L'angle interceptant cet arc de cercle est noté  $d\alpha$ . On considère alors que  $M$  et  $M'$  sont dans un même plan, le plan osculateur. On peut représenter les vecteurs tangents  $\vec{T}$  et  $\vec{T}'$  ainsi que les vecteurs normaux  $\vec{N}$  et  $\vec{N}'$ , respectivement aux points  $M$  et  $M'$ .

L'intersection des deux droites définies par les vecteurs normaux  $\vec{N}$  et  $\vec{N}'$  correspond au point C appelé centre de courbure. La distance de C au point M définit alors ce que l'on appelle le rayon de courbure noté  $R_c$ .



**Figure 3.2** Les relations entre les vecteurs de la base de Frenet.

Représentation du déplacement du repère local de Frenet avec la base  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$  orthonormée directe associée.

On retrouve l'angle  $d\alpha$  entre les vecteurs tangents  $\vec{T}$  et  $\vec{T}'$ , comme indiqué sur la figure 3.2. L'angle  $d\alpha$  correspond à un angle polaire pour le vecteur  $\vec{T}$ . Or on sait que lorsqu'on dérive un vecteur par rapport à son angle polaire, on obtient un vecteur directement perpendiculaire. Dans le cas présenté ici, c'est le vecteur  $\vec{N}$  qui est directement perpendiculaire à  $\vec{T}$ . On peut donc écrire :

$$\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$$

On sait aussi qu'une dérivée correspond à un rapport de deux infinitésimaux (lorsque la dérivée est définie sur un domaine continu). On peut donc multiplier et diviser simultanément ce rapport par une même quantité. Ainsi on peut écrire une relation qui sera utile dans la suite du cours :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds}$$

On connaît la relation entre un arc de cercle, le rayon du cercle et l'angle qui intercepte l'arc de cercle :  $ds = R_c \cdot d\alpha$ . Ainsi, on trouve :  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R_c}$ .

## 1. La définition de la vitesse

Dans le référentiel d'étude (R), la position d'un point M est repérée à tout instant par son vecteur position :  $\vec{r}(t) = \overline{OM}(t)$ .

### ■ La vitesse moyenne

À l'instant  $t_1$ , le vecteur position de M est noté  $\vec{r}_1$ , à l'instant  $t_2$  (postérieur à  $t_1$ ), ce vecteur est noté  $\vec{r}_2$ . On appelle vecteur déplacement le vecteur  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Entre les deux instants successifs  $t_1$  et  $t_2$ , la vitesse moyenne (notée  $\vec{v}_m$ ) est définie par le rapport de son vecteur déplacement  $\Delta\vec{r}$  par l'intervalle de temps  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Ainsi on écrit :

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_2)}{t_2 - t_1}$$

### ■ La vitesse instantanée

La vitesse instantanée de M à l'instant  $t$  correspond à la limite de ce rapport lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro : par définition, la vitesse instantanée est la dérivée du vecteur position par rapport au temps ; ainsi on écrit la vitesse instantanée  $\vec{v}(t)$  du point matériel M :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Par analyse dimensionnelle, on trouve qu'une vitesse est le rapport d'une longueur par un temps, elle s'exprime donc en mètres par seconde ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Il est important de préciser par rapport à quel référentiel la vitesse est définie. On écrit alors par exemple :

$$\vec{v} = \vec{v}_R(\text{M}) = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_R$$

Le référentiel (R) est indiqué en indice : on a donc ici l'expression de la vitesse du point M dans le référentiel (R). Dans ce référentiel, les axes sont considérés comme fixes, donc ne dépendant pas du temps.



### Remarques

La définition d'un vecteur donne en fait trois informations en une : elle indique la direction, le sens et la norme du vecteur.

À noter aussi que le vecteur vitesse d'un point M est toujours tangent (au point M) à la courbe décrite par le point M au cours de son mouvement.



## Notations

On utilise en cinématique la notation de Newton qui consiste à marquer toute dérivation d'un vecteur ou d'une grandeur par rapport au temps, avec un point au-dessus de ce vecteur ou grandeur. Ainsi, on note :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

## 2. La définition de l'accélération

Dans la plupart des mouvements, la vitesse varie au cours du temps, soit en norme, soit en direction, soit en sens, soit les trois à la fois. On caractérise cette variation par l'accélération  $\vec{a}$  du point.

### ■ L'accélération moyenne

On imagine un point M passant d'un point A (atteint à l'instant  $t_1$ , avec une vitesse  $\vec{v}_1$ ) à un point B (atteint à l'instant  $t_2$ , avec une vitesse  $\vec{v}_2$ ). On peut alors définir l'accélération moyenne (notée  $\vec{a}_m$ ) du point M entre ces deux positions A et B :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_2)}{t_2 - t_1}$$

### ■ L'accélération instantanée

L'accélération instantanée de M à l'instant  $t$  correspond à la limite de ce rapport lorsque  $\Delta t = t_2 - t_1$  tend vers zéro : par définition, l'accélération instantanée est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps et donc la dérivée seconde du vecteur position  $\overline{OM}$  par rapport au temps ; ainsi on écrit la vitesse instantanée  $\vec{a}(t)$  du point matériel M :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} = \ddot{\overline{OM}}$$

Par analyse dimensionnelle, on trouve qu'une accélération est le rapport d'une vitesse par un temps, elle s'exprime donc en mètres par seconde au carré ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

Tout comme la vitesse, l'accélération est définie par rapport à un référentiel donné que l'on indique par une lettre en indice. L'accélération du point M dans le référentiel (R) s'écrit donc :

$$\vec{a} = \vec{a}_R(M) = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_R$$



## 1. La vitesse en coordonnées cartésiennes

Le vecteur position du point M dans le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  lié au référentiel (R) s'écrit :  $\overline{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$ .

On rappelle une règle élémentaire de dérivation d'une somme de produits, en marquant les dérivées avec la notation « primée » :

$$(fg + hk)' = f'g + fg' + h'k + hk'$$

On applique cette même règle en dérivant le vecteur position  $\overline{OM}$  par rapport au temps (avec la notation de Newton, « pointée ») :

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\overline{OM}} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + x \cdot \dot{\vec{u}}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + y \cdot \dot{\vec{u}}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z + z \cdot \dot{\vec{u}}_z.$$

Or les vecteurs  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$  dans le repère cartésien lié au référentiel (R) sont invariants avec le temps, donc  $\dot{\vec{u}}_x = \dot{\vec{u}}_y = \dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$  ; on écrit alors :

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\overline{OM}} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Les coordonnées de  $\vec{v}_R(M)$  sont donc  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ .

## 2. La vitesse en coordonnées cylindriques

L'objectif ici est d'exprimer le vecteur vitesse du point M en fonction des vecteurs  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  de la base du repère cylindrique (local, mobile, associé au point M) associé au référentiel (R) qui correspond à un observateur fixe situé au point origine O.

Le vecteur position a été écrit précédemment :  $\overline{OM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{u}_z$ .

On peut le dériver par rapport au temps pour obtenir le vecteur vitesse instantanée du point M dans (R) et dans la base du repère cylindrique :

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\overline{OM}} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z} \cdot \vec{u}_z + z \cdot \dot{\vec{u}}_z$$

Notons d'abord que dans le référentiel d'étude (R), le vecteur  $\vec{u}_z$  est fixe alors que  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  évoluent avec le temps.

Ainsi on peut déjà écrire que  $\dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$ .

Pour exprimer  $\dot{\vec{u}}_\rho$  dans la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , on utilise la méthode mathématique suivante, basée sur le fait qu'on peut diviser et multiplier un rapport par la même quantité :

$$\dot{\vec{u}}_\rho = \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$$

Or, on a vu que lorsqu'on dérive un vecteur (ici  $\vec{u}_\rho$ ) par son angle polaire (ici  $\theta$ ), on obtient un vecteur directement perpendiculaire (ici  $\vec{u}_\theta$ ).



Ainsi on a :  $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta$ .

On obtient alors l'expression de la vitesse instantanée du point M dans la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  :

$$\vec{v}_R(M) = \dot{\vec{OM}} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

### Exemple

Les coordonnées cylindriques sont particulièrement adaptées à l'étude des mouvements hélicoïdaux qui correspondent à une combinaison d'un mouvement de translation suivant un axe et d'un mouvement de rotation autour de ce même axe. Un point M décrivant une hélice se déplace en effet sur les parois d'un cylindre, donc toujours à la même distance de l'axe du cylindre : on a alors  $\rho = \text{cste}$ , soit  $\dot{\rho} = 0$ .

Pour un mouvement hélicoïdal de vitesse angulaire  $\omega$  constante, la vitesse en coordonnées cylindriques s'écrit comme suit :

$$\vec{v}(M) = \rho \cdot \omega \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

## 1. L'accélération en coordonnées cartésiennes

L'expression de la vitesse instantanée du point M dans le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  lié au référentiel (R) est :

 Fiche 5

$$\vec{v}_R(M) = \overrightarrow{OM} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

En appliquant la règle de dérivation d'une somme de produits, on trouve l'expression de l'accélération instantanée du point M :

$$\vec{a}_R(M) = \overrightarrow{OM} = \ddot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{x} \cdot \dot{\vec{u}}_x + \ddot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{y} \cdot \dot{\vec{u}}_y + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z + \dot{z} \cdot \dot{\vec{u}}_z$$

Or les vecteurs dans le repère cartésien lié au référentiel (R) sont invariants avec le temps, donc  $\dot{\vec{u}}_x = \dot{\vec{u}}_y = \dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$  ; on écrit alors :

$$\vec{a}_R(M) = \overrightarrow{OM} = \ddot{x} \cdot \vec{u}_x + \ddot{y} \cdot \vec{u}_y + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Les coordonnées de  $\vec{a}_R(M)$  sont donc  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ .

## 2. L'accélération en coordonnées cylindriques

On exprime ici le vecteur accélération du point M en fonction des vecteurs  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  de la base du repère cylindrique (local au point M) associé au référentiel (R) qui correspond à un observateur fixe situé au point origine O.

Le vecteur vitesse a été écrit précédemment :

$$\vec{v}_R(M) = \overrightarrow{OM} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

On peut le dériver par rapport au temps pour obtenir le vecteur accélération instantanée du point M dans R et dans la base du repère cylindrique :

$$\vec{a}_R(M) = \overrightarrow{OM} = \ddot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\vec{u}}_\theta + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z + \dot{z} \cdot \dot{\vec{u}}_z$$

Dans le référentiel d'étude (R), le vecteur  $\vec{u}_z$  est fixe alors que  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  évoluent avec le temps. Ainsi on peut déjà écrire que  $\dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$ .

Pour exprimer  $\dot{\vec{u}}_\rho$  et  $\dot{\vec{u}}_\theta$  dans la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , on utilise la même méthode que dans le cas de la vitesse en coordonnées cylindriques. On trouve donc que :

 Fiche 5

$$\dot{\vec{u}}_\rho = \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = -\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho$$

En effet lorsqu'on dérive  $\vec{u}_\theta$  par rapport à  $\theta$ , cela revient à dériver une seconde fois  $\vec{u}_\rho$  par rapport à son angle polaire, donc à effectuer deux rotations successives de  $+\frac{\pi}{2}$  dans le sens trigonométrique : on obtient alors  $-\vec{u}_\rho$ .

L'accélération instantanée du point M dans la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  s'écrit donc :

$$\vec{a}_R(M) = \ddot{\vec{O}M} = \ddot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{\rho} \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \left( -\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho \right) + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

d'où :

$$\vec{a}_R(M) = \ddot{\vec{O}M} = \left( \ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2 \right) \cdot \vec{u}_\rho + \left( 2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta} \right) \cdot \vec{u}_\theta + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

### Exemple

Pour un mouvement hélicoïdal de vitesse angulaire  $\omega$  constante, on peut écrire l'accélération du point M en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a}(M) = -\rho \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_\rho + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Si le déplacement selon l'axe  $OZ$  se fait à vitesse constante ( $\dot{z} = \text{cste}$ , donc  $\ddot{z} = 0$ ) l'accélération est seulement centripète, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et dirigée vers l'axe du cylindre :

$$\vec{a}(M) = -\rho \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_\rho$$

## 1. La vitesse dans le repère de Frenet

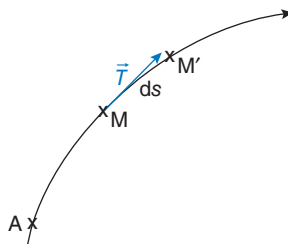


Figure 7.1 Trajectoire curviligne suivie par un point M.

Sur la figure 7.1 est représentée la courbe suivie par un point M. La distance entre les points M et M' sur la courbe est notée ds. Si M et M' sont infiniment proches, on peut faire l'hypothèse que M et M' sont à la fois sur la courbe et sur la tangente à la courbe au point M (tangente de vecteur directeur unitaire  $\vec{T}$ ).

Ainsi le vecteur déplacement peut s'écrire :  $\overline{MM'} = ds \cdot \vec{T}$ .

La vitesse instantanée du point M peut donc s'écrire comme suit, en soulignant que sur la tangente à la courbe au point M le vecteur  $\vec{T}$  est fixe :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\overline{MM'}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} = \dot{s} \cdot \vec{T}$$

## 2. L'accélération dans le repère de Frenet

La vitesse du point M dans la base mobile de Frenet a pour expression :

$$\vec{v}(M) = \dot{s} \cdot \vec{T}$$

On trouve l'accélération du point M dans cette même base en dérivant par rapport au temps la vitesse instantanée. On écrit donc :

$$\vec{a}(M) = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \dot{s} \cdot \dot{\vec{T}}$$

On peut écrire la dérivée de  $\vec{T}$  par rapport au temps, sous la forme suivante :

$$\dot{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$



Fiche 3

Nous connaissons les termes de ce produit :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R_c} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$$

avec  $R_c$  le rayon de courbure et  $\vec{N}$  le vecteur normal (tourné vers la concavité de la courbe).

Ainsi, on trouve :

$$\vec{a}(M) = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_c} \cdot \vec{N}$$

Il y a donc deux composantes de l'accélération : une composante tangentielle (notée  $a_T(M)$ ) et une composante normale (notée  $a_N(M)$ ). Leurs expressions sont :

$$a_T(M) = \ddot{s} \quad \text{et} \quad a_N(M) = \frac{\dot{s}^2}{R_c}$$



### Remarques

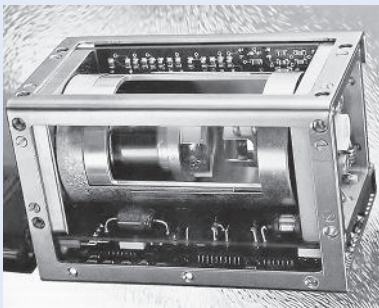
- On utilise parfois la notation suivante :  $v = \dot{s}$ , où  $v$  est une mesure algébrique, positive si le point  $M$  se déplace dans le sens des abscisses curvilignes croissantes et négative si le point  $M$  se déplace dans le sens des abscisses curvilignes décroissantes. On écrit donc l'expression de l'accélération comme suit :  $\vec{a}(M) = v \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{R_c} \cdot \vec{N}$ .
- En cinématique du point, la courbe dont le comportement est étudié avec le repère de Frenet, correspond à la trajectoire parcourue par le point. Le vecteur vitesse est toujours porté par la tangente à la courbe. Le vecteur accélération présente une composante normale qui décrit le changement de direction de la trajectoire (courbure) et une composante tangentielle qui donne la variation de la norme du vecteur vitesse.

## La mesure précise et stable du temps

Jusqu'en 1955, la seconde est encore définie comme la fraction  $1/86\,400$  du jour solaire : cependant on a observé depuis longtemps que la référence terrestre est assez irrégulière, et il est apparu nécessaire de changer de définition en se basant sur les progrès technologiques de l'époque.

Le concept des horloges atomiques repose sur le caractère quasi immuable des propriétés atomiques, notamment les fréquences des radiations émises lors de transitions entre niveaux d'énergie. L'horloge atomique de référence fonctionne grâce à un isotope stable de l'atome de césium ( $^{133}\text{Cs}$ ). Cet isotope est excité et entre en résonance sous l'effet d'un signal électromagnétique fourni par un oscillateur extérieur. Soumis à ce signal, l'atome de césium peut absorber un photon, avec une probabilité qui dépend de l'écart entre la fréquence du signal extérieur et la fréquence de la résonance atomique. Cette probabilité est maximale lorsque ces deux fréquences sont égales : on arrive ainsi à corriger la fréquence de l'oscillateur extérieur, et à la maintenir constamment égale à celle de la résonance atomique. L'oscillateur externe fournit un signal périodique extrêmement stable qui permet alors de définir la seconde comme référence du temps. En 1967, une nouvelle définition de la seconde a ainsi été adoptée.

Fiche 1



Exemple d'horloge atomique à rubidium  
(photo [www.hautehorlogerie.org](http://www.hautehorlogerie.org)).

En 2005, les meilleures horloges atomiques (fontaines atomiques à césium) atteignent une exactitude de l'ordre de  $6 \cdot 10^{-16}$ , soit une erreur de 1 seconde en 50 millions d'années. À noter aussi qu'en 1983, grâce à l'horloge atomique, le mètre étalon a été redéfini.

## Le GPS

Grâce aux avancées sur la mise au point des horloges atomiques, le « *Global Positioning System* » ou GPS, a pu être mis en œuvre, au début pour des applications militaires. L'objectif du GPS est de donner à son utilisateur ses coordonnées sur le globe grâce à un ensemble de satellites. Ces satellites embarquent jusqu'à quatre horloges atomiques chacun. Cette précision sur le temps ainsi que celle sur les coordonnées spatiales d'un utilisateur lui permettent de connaître très précisément sa vitesse.

Les horloges atomiques sont très utilisées dans les systèmes de télécommunication pour fournir un signal de référence aux oscillateurs internes des équipements, afin d'assurer une qualité de transmission des services.

