



Faculté de Technologie
Département de Technologie
L1 (ST)

Mathématiques 1
(Analyse et Algèbre)

M'hamdi Mohammed Salah

Table des matières

1 Fonctions réelles à une variable	2
1.1 Généralités sur les fonctions numériques	2
1.2 Limite d'une fonction	4
1.2.1 Limite en un point	4
1.2.2 Limite en l'infini	6
1.2.3 Les formes indéterminées	7
1.2.4 Propriétés sur les limites	7
1.3 Continuité d'une fonction	8
1.3.1 Continuité en un point	8
1.3.2 Continuité sur un intervalle	11
1.4 Dérivabilité d'une fonction	12
1.4.1 Définitions et propriétés	12
1.4.2 Opérations sur les fonctions dérivables	15
1.4.3 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables	16

1 Fonctions réelles à une variable

1.1 Généralités sur les fonctions numériques

Soit X un intervalle de \mathbb{R} .

1. On appelle fonction numérique définie dans un domaine X (on dit aussi fonction réelle), toute application f telle que à chaque point x de X , on fait correspondre un seul élément y de \mathbb{R} . Et on écrit

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

X est le domaine de définition de la fonction f .

2. On appelle graphe d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble

$$G(f) = \{(x, y) / x \in X \text{ et } y = f(x)\}.$$

3. **Opérations sur les fonctions réelles** Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) On dit que f est égale à g si et seulement si $f(x) = g(x), \forall x \in X$.
- (b) On dit que f est inférieure ou égale à g si et seulement si $f(x) \leq g(x), \forall x \in X$.
- (c) On dit que f est supérieure ou égale à g si et seulement si $f(x) \geq g(x), \forall x \in X$.
- (d) La somme : $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$.
- (e) Le produit : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in X$.
- (f) Le rapport : $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in X \text{ et } g(x) \neq 0$.

4. **Propriétés générales des fonctions**

- (a) Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite paire si :

$$\forall x \in X, -x \in X \text{ on a } f(-x) = f(x).$$

Exemple 1.1. $f(x) = \cos(x)$ est paire car on a

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x).$$

- (b) Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite impaire si :

$$\forall x \in X, -x \in X \text{ on a } f(-x) = -f(x).$$

Exemple 1.2. $f(x) = \sin(x)$ est impaire car on a

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x).$$

- (c) On dit qu'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est périodique si $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que
- i. $x + \alpha \in X$,
 - ii. $f(x + \alpha) = f(x)$.

La plus petite valeur positive de α est appelée la période de f .

Exemple 1.3. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques. La fonction tangente est π -périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, et $\alpha = 2\pi$ est la période de la fonction $\cos(x)$ définie sur \mathbb{R} .

- (d) Fonctions monotones. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, f est dite
- i. croissante si $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
 - ii. strictement croissante si $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
 - iii. décroissante si $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
 - iv. strictement décroissante si $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Exemple 1.4. Les fonctions exponentielle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et logarithme $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.

- (e) Fonctions bornées. La fonction f est dite
- i. majorée sur X si $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \forall x \in X$;
 - ii. minorée sur X si $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m, \forall x \in X$;
 - iii. bornée sur X si $\exists M, n \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M, \forall x \in X$;

Exemple 1.5. La fonction $f(x) = \sin(x)$ est bornée car on a :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.6. 1. $f(x) = x^2$ est une fonction paire, $\forall x \in \mathbb{R}$;

2. $f(x) = x$ est une fonction impaire, $\forall x \in \mathbb{R}$;

3. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ est une fonction paire, $\forall x \in \mathbb{R}$;

4. $f(x) = \sin(x)$ est une fonction impaire, $\forall x \in \mathbb{R}$;

5. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est une fonction paire, $\forall x \in \mathbb{R}^*$;

6. $f(x) = \cos(x)$ est une fonction paire, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.2 Limite d'une fonction

1.2.1 Limite en un point

Définition 1.1. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de \mathbb{R} . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de X ou une extrémité de X . Le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall x \in X, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon].$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 et on écrit $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Remarque 1.1. N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \epsilon$ avec le $\exists \delta$: le δ dépend en général du ϵ . Pour marquer cette dépendance on écrit $\delta(\epsilon)$.

Exemple 1.7. 1. Montrer que la fonction $f(x) = 7x - 3$ admet pour limite $l = 11$ en $x = 2$.

On a

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &= |(7x - 3) - 11| \\ &= |7x - 14| \\ &= |7(x - 2)| \\ &= 7|x - 2|, \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} |f(x) - l| < \epsilon &\Rightarrow 7|x - 2| < \epsilon \\ &\Rightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{7}, \end{aligned}$$

donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{7} > 0, \forall x \in \mathbb{R}, [|x - 2| < \delta = \frac{\epsilon}{7} \Rightarrow |f(x) - 11| < \epsilon].$$

2. Calculer la limite des fonctions suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -3} (3x + 2) = -7, \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 9)}{x - 3} = 6,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)}{x - 2} = 4, \text{ (ici } \frac{(x^2 - 4)}{x - 2} \text{ n'est pas définie en 2).}$$

Proposition 1.2. Si f admet une limite en un point x_0 , cette limite est unique.

Exemple 1.8. Calculer la limite des fonctions suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'est pas unique, elle est entre $[-1, 1]$, donc elle n'existe pas.

Définition 1.3. Soit f une fonction définie sur un ensemble X de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A].$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A].$$

Remarque 1.2.

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0, +\infty[$. f est définie uniquement à droite de 0, donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x),$$

d'où la nécessité d'introduire les deux notions suivantes :

1. On dit que f a une limite à droite en x_0 si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ existe et finie.
2. On dit que f a une limite à gauche en x_0 si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ existe et finie.

Exemple 1.9. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{(x-1)^3} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty.$$

Théorème 1.4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) existe, finie et unique.

Remarque 1.3. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 1.10. Soit la fonction f définie comme suit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On remarque que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -x = 0,$$

donc la limite en 0 existe et égale à 0 c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Exemple 1.11. Soit la fonction g définie comme suit

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On remarque que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 0}} x + 1 = 1$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x - 1 = -1$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ n'existe pas.

1.2.2 Limite en l'infini

Définition 1.5. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble X de la forme $]a, +\infty[$.

Le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in X, [x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon].$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ et on écrit $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in X, [x > B \Rightarrow f(x) > A].$$

Remarque 1.4. On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $] -\infty, a[$.

$+\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \times \infty$
--------------------	-------------------------	---------------	-------------------

TABLE 1 – Quelques formes indéterminées

1.2.3 Les formes indéterminées

Voici quelques formes indéterminées (FI) dans le tableau (1) suivant :

Exemple 1.12.

1.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty - \infty \text{ (FI)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty \times (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 4} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x - 4} - x) \times (\sqrt{x^2 + 3x - 4} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x - 4} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 4}{\sqrt{x^2 + 3x - 4} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{4}{x} \right)}{x \left(\sqrt{x + 3 - \frac{4}{x}} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(3 - \frac{4}{x} \right)}{\left(\sqrt{x + 3 - \frac{4}{x}} + 1 \right)} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 4}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{4}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(3 - \frac{4}{x} \right)}{\left(1 + \frac{2}{x} \right)} = 3. \end{aligned}$$

1.2.4 Propriétés sur les limites

Proposition 1.6. Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, alors on a

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = l_1 \pm l_2.$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = l_1 \times l_2.$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda \pm g(x) = \lambda l_2, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, \text{ si } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l_1|.$

Théorème 1.7. Soient f, g, h trois fonctions définies dans un intervalle X (un voisinage de x_0) et telle que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in X.$$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l.$

Exemple 1.13. Etudier la limite de $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ en 0. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 &\Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) \\ &\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)) \leq 0 \end{aligned}$$

En utilisant le théorème précédent, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \sin(\frac{1}{x})) = 0.$

1.3 Continuité d'une fonction

1.3.1 Continuité en un point

Définition 1.8. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de \mathbb{R} et x_0 un point de X .

- On dit que f est continue en un point x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon],$$

c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

- On dit que f est continue sur X si f est continue en tout point de X .

Définition 1.9. (continuité à gauche et à droite)

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de \mathbb{R} et x_0 un point de X .

- Une fonction définie en x_0 et à droite de x_0 est continue à droite de x_0 si
$$\lim_{\substack{> \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = f(x_0).$$
- Une fonction définie en x_0 et à gauche de x_0 est continue à gauche de x_0 si
$$\lim_{\substack{< \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = f(x_0).$$
- f est continue en x_0 si
$$\lim_{\substack{> \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 1.14. Soit la fonction g définie comme suit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On remarque que $g(0) = 1$. Puis :

$\lim_{\substack{> \\ x \rightarrow 0}} g(x) = 1 = g(0)$ donc g est continue à droite de 0.

$\lim_{\substack{< \\ x \rightarrow 0}} g(x) = 0 \neq g(0)$ donc g n'est pas continue à gauche de 0.

Finalement, g n'est pas continue en 0.

Exemple 1.15. Soit la fonction g définie comme suit

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On remarque que

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Puis :

$$\lim_{\substack{> \\ x \rightarrow 0}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x \rightarrow 0}} 1 - x = 1,$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x \rightarrow 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x \rightarrow 0}} 1 + x = 1.$$

Finalement,

$$\lim_{\substack{> \\ x \rightarrow 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x \rightarrow 0}} g(x) = 1 = g(0),$$

et donc g est continue en 0.

Proposition 1.10. (Opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions continues en x_0 , alors

1. $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $k_1f + k_2g$ est continue en x_0 .
2. La fonction $f \times g$ est continue en x_0 .
3. Si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .
4. La fonction $|f|$ est continue en x_0 .

Proposition 1.11. (Continuité des fonctions composées)

Soient $f : X \rightarrow X'$ et $g : X' \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continue en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 .

Remarque 1.5. f est dite discontinue en x_0 si

1. f n'est pas définie en x_0 ;
2. la limite en x_0 (à droite ou à gauche) existe mais différente de $f(x_0)$;
3. la limite en x_0 n'existe pas.

Définition 1.12. (Prolongement par continuité)

Si f n'est pas définie en x_0 (f définie sur $X - \{x_0\}$) et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, alors on définit un prolongement par continuité de f en x_0 par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X - \{x_0\} \\ l & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Exemple 1.16. Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$.

Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$-x^2 \leq x^2 \sin(\frac{1}{x}) \leq x^2,$$

on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction \tilde{f} définie sur \mathbb{R} comme suit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exemple 1.17. Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$. Voyons si g admet un prolongement par continuité en 0 ?

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x)}{1} = 2.$$

Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction \tilde{g} définie sur \mathbb{R} comme suit

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exemple 1.18. Soit $h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

et par suite

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de h en 0.

1.3.2 Continuité sur un intervalle

Théorème 1.13. (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

1. f est continue sur $[a, b]$;
2. $f(a).f(b) < 0$.

Alors

$$\exists c \in]a, b[, f(c) = 0.$$

De plus, si f est strictement monotone, alors le c est unique.

Exemple 1.19. Soit la fonction définie sur par $f(x) = x^3 + x^2 - x - 5$.

1. Montrer que la fonction est continue sur $[-1, 2]$.
2. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.
3. En déduire que l'équation $x^3 + x^2 - x = 5$ admet au moins une solution dans $[-1, 2]$.

Corrigé

1. La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur \mathbb{R} et en particulier sur $[-1, 2] \subset \mathbb{R}$.
2. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.
D'une part, $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 5 = -4 < 0$. D'autre part, $f(2) = (2)^3 + (2)^2 - (2) - 5 = 5 > 0$.
3. D'une part, f est continue sur $[-1, 2]$ (d'après la première question). D'autre part, comme $f(-1).f(2) < 0$ (d'après la deuxième question), le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-1, 2]$.

1.4 Dérivabilité d'une fonction

1.4.1 Définitions et propriétés

Définition 1.14. Soient X un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 \in X$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et finie.}$$

Cette limite est appelée dérivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

Remarque 1.6. Une autre écriture de la dérivée en un point :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow l} \frac{f(x+l) - f(x_0)}{l}.$$

Exemple 1.20. Soit la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3. \end{aligned}$$

Trouver la dérivée de f en un point x_0 de \mathbb{R} . On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) \\ &= 3x_0^2. \end{aligned}$$

Définition 1.15. (Dérivée à gauche et à droite en un point)

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle X de \mathbb{R} et x_0 un point de X .

- On définit la dérivée à droite de f en x_0 par

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- On définit la dérivée à gauche de f en x_0 par

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$.

Exemple 1.21. Soit la fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

f est-elle dérivable en 0 ?

On a $f(0) = 3(0) + 2 = 2$, autrement dit

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 2 & \text{si } x = 0 \\ 2 - x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

puis,

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(3x + 2) - 2}{x} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{3x}{x} \\ &= 3, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'_g(0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{(2 - x) - 2}{x} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} \\ &= -1, \end{aligned}$$

donc, f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.

Définition 1.16. f est dérivable sur X si elle est dérivable en tout point de X et l'application

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x),$$

est appelée la fonction dérivée de f .

Remarque 1.7. (Interprétation géométrique de la dérivée en un point)

Soit f une fonction dérivable en x_0 et (C) la courbe représentative de f . L'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f'(x_0)$ représente la pente de la droite tangente à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x_0))$.

Remarque 1.8. (Dérivabilité et continuité)

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 . La réciproque est fautive en général.

Exemple 1.22. Exemple : soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0 = f(0) = 0$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -x = 0 = f(0) = 0$$

donc f est continue en 0. Pour la dérivabilité en 0, on a

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(x) - 0}{x} \\ &= 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'_g(0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{(-x) - 0}{x} \\ &= -1, \end{aligned}$$

donc f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.

Conclusion : f est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

1.4.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.17. Soient f et g deux fonctions dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $(h.f)$, $h \in \mathbb{R}$, $f + g$, $f.g$ sont dérivable en x_0 , et $(\frac{f}{g})$ est dérivable en x_0 si $g(x_0) \neq 0$. De plus

1. $(h.f(x_0))' = h.f'(x_0)$.
2. $(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$.
3. $(f(x_0).g(x_0))' = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$.
4. $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{(f'(x_0).g(x_0)) - (f(x_0).g'(x_0))}{g^2(x_0)}$.

Proposition 1.18. (Dérivée d'une fonction composée)

Soient $f : X \rightarrow X_0$ et $g : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

Proposition 1.19. (Dérivée d'une fonction réciproque)

Si f est dérivable en x_0 , alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Définition 1.20. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur X , alors :

- f' est dite dérivée d'ordre 1 de f . Si f' est dérivable sur X alors sa dérivée est appelée dérivée d'ordre 2 de f . On la note

$$f'' = f^{(2)} = (f')'.$$

D'une manière générale, on définit la dérivée d'ordre n de f par

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad \forall n \geq 1, \quad f^{(0)} = f.$$

- On dit que f est de classe C^1 sur X si f est dérivable sur X et f' est continue sur X .
- On dit que f est de classe C^n sur X (et on écrit $f \in C^n(X)$) si f est n fois dérivable sur X et $f^{(n)}$ est continue sur X .
- f est dite de classe C^∞ sur X si elle est de classe C^n , $\forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.21. (Règles de l'Hospital)

Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur X , dérivables sur $X - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{0, \pm\infty\},$$

$$2. \forall x \in X - \{x_0\}, g'(x) \neq 0,$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple 1.23. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \quad (FI),$$

par la suite, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1.$$

1.4.3 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

Théorème 1.22. (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$,
3. $f(a) = f(b)$, alors,

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0.$$

Remarque 1.9. Le théorème de Rolle nous affirme qu'il existe un point c en lequel la tangente est parallèle à l'axe des x .

Théorème 1.23. (Théorème des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$, alors,

$$\exists c \in]a, b[: f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$