Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Département de Mathématiques

Année universitaire
2020/2021

SÉRIES DE TD DE TOPOLOGIE

(100 exercices dont 64 sont obligatoires)

Les exercices précédés d'une étoile (★) sont obligatoires.

1. Généralités sur les espaces métriques

★ **Exercice 1.1.** Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on considère d_1 et d_∞ les applications de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par :

$$\left.\begin{aligned} d_1\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ d_\infty\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i| \end{aligned}\right. \qquad (\forall (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

(1) Montrer que d_1 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{R}^n$.

(2) On prend $n = 2$. Représenter graphiquement les boules ouvertes et les boules fermées de $\mathbb{R}^2$ relativement à chacune de ces deux distances.

Exercice 1.2 (La distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d_2\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \qquad (\forall (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

(1) Montrer que pour tous $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 = 2\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2\right)$$

(c'est l'identité de Lagrange).

(2) En déduire que pour tous $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}$$

(c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

(3) En déduire que pour tous $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}$$

(c'est l'inégalité de Minkowski).

Date: **Vendredi, 12 février 2021.**

(4) Montrer que d_2 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

⋆ **Exercice 1.3** (La distance discrète d'un ensemble).
Soient E un ensemble non vide et $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x,y) \ := \ \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

— Montrer que d est une distance sur E.

⋆ **Exercice 1.4.** Soit (E,d) un espace métrique. Montrer qu'on a pour tous $x,y,z \in E$:

$$d(x,z) \ \geqslant \ |d(x,y) - d(y,z)|\,.$$

⋆ **Exercice 1.5.** Soit (E,d) un espace métrique et soient d', d'' et $d^\star$ les applications de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ données par :

$$\begin{aligned} d' &:= \min(1,d) \\ d'' &:= \frac{d}{1+d} \\ d^\star &:= \arctan d. \end{aligned}$$

— Montrer que d', d'' et $d^\star$ sont des distances sur E.

⋆ **Exercice 1.6.** Soit (E,d) un espace métrique.
— Montrer que pour tous $x,y \in E$, avec $x \neq y$, il existe deux réels strictement positifs r et s tels que :

$$B(x,r) \cap B(y,s) \ = \ \varnothing.$$

Exercice 1.7 (Produit fini d'espaces métriques).
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1,d_1),(E_2,d_2),\dots,(E_n,d_n)$ des espaces métriques. On pose $E := E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$ et on considère $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) \ := \ \max_{1\leqslant i\leqslant n} d_i(x_i,y_i) \qquad (\forall (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in E).$$

— Montrer que d est une distance sur E.

Exercice 1.8 (Produit dénombrable d'espaces métriques).
Soit $\{(E_i,d_i)\}_{i\geqslant 1}$ une famille (dénombrable) d'espaces métriques. On pose $E := \displaystyle\prod_{i=1}^{+\infty} E_i$ et on considère $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d\big((x_i)_{i\geqslant 1},(y_i)_{i\geqslant 1}\big) \ := \ \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\arctan d_i(x_i,y_i)}{2^i} \qquad (\forall (x_i)_{i\geqslant 1},(y_i)_{i\geqslant 1} \in E).$$

— Montrer que d est une distance sur E.

2. Généralités sur les espaces topologiques

⋆ **Exercice 2.1.** Soit $X = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à 4 éléments et soit la famille de $\mathscr{P}(X)$ suivante :

$$\tau := \Big\{\varnothing \ , \ X \ , \ \{a\} \ , \ \{b\} \ , \ \{a,b\} \ , \ \{a,c\} \ , \ \{b,d\} \ , \ \{a,b,c\} \ , \ \{a,b,d\}\Big\}.$$

(1) Montrer que τ constitue une topologie sur X, puis donner les ouverts et les fermés de l'espace topologique (X, τ).

(2) Déterminer les ensembles suivants :

$$\overset{\circ}{\widehat{\{b,c\}}} \ , \ \overline{\{b,c\}} \ , \ \overset{\circ}{\widehat{\{c,d\}}} \ , \ \overline{\{c,d\}} \ , \ \overset{\circ}{\widehat{\{b,c,d\}}} \ , \ \overline{\{b,c,d\}} \ \text{ et } \ \mathbf{Fr}(\{b,c,d\}).$$

⋆ **Exercice 2.2.** On pose $E :=]0, +\infty[$ et pour tout réel positif α, on pose $\theta_\alpha :=]\alpha, +\infty[\subset E$. On considère τ la famille de parties de E donnée par :

$$\tau := \big\{\varnothing\big\} \cup \big\{\theta_\alpha \ , \ \alpha \in \mathbb{R}^+\big\}.$$

(1) Montrer que τ constitue une topologie sur E.

(2) Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).

(3) Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$A =]0,1[\ ; \ A = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\ ; \ A = \mathbb{N}^*.$$

(4) Montrer que (E, τ) n'est pas séparé.

Exercice 2.3 (Examen de rattrapage de l'année 2014-2015)**.**
Soient $E :=]0, +\infty[$ et $\tau := \big\{E, \ \theta_\alpha :=]0, \alpha[\ (\text{avec } \alpha \geqslant 0)\big\}$.

(1) Montrer que τ constitue une topologie sur E.

(2) Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).

(3) Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$A =]0,1[\ ; \ A = \left\{\frac{2}{3}\right\} \ ; \ A = \mathbb{N}^*.$$

⋆ **Exercice 2.4** (La topologie cofinie)**.**

Soient X un ensemble non vide et τ la famille constituée de l'ensemble vide et de toutes les parties de X dont le complémentaire est fini.

(1) Montrer que τ constitue une topologie sur X.

(2) Que devient τ lorsque X est fini ?

(3) Montrer que si X est infini alors il n'est pas séparé.

Exercice 2.5. Soit (E, τ) un espace topologique <u>fini</u> et <u>séparé</u>.
— Montrer que τ est forcément la topologie discrète de E.

N.B : On dira plus simplement que tout espace topologique fini et séparé est discret.

3. Notions de base de Topologie générale

⋆ **Exercice 3.1.** Soient A et B deux parties d'un espace topologique (X,τ). Montrer les propriétés suivantes :

(1) $A \subset B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subset \overline{B}$.

(2) $\overline{A \cap B} \;\subset\; \overline{A} \cap \overline{B}$.

(3) $\overline{A \cup B} \;=\; \overline{A} \cup \overline{B}$.

⋆ **Exercice 3.2.** Soient A et B deux parties d'un espace topologique (X,τ). Montrer les propriétés suivantes :

(1) $A \subset B \;\Rightarrow\; \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

(2) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

(3) $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

⋆ **Exercice 3.3.** Soit A une partie d'un espace topologique (X,τ). Montrer les formules suivantes :

$$\text{(i) } \complement_X \overline{A} \;=\; \overset{\circ}{\widehat{\complement_X A}} \qquad ; \qquad \text{(ii) } \complement_X \overset{\circ}{A} \;=\; \overline{\complement_X A} \qquad ; \qquad \text{(iii) } \mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A}.$$

⋆ **Exercice 3.4.** Soit (X,τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de X. Montrer que si A est un <u>ouvert</u>, alors on a :

$$A \cap \overline{B} \;\subset\; \overline{A \cap B}.$$

⋆ **Exercice 3.5.** Soit (X,τ) un espace topologique et soient U et V deux <u>ouverts disjoints</u> de X. Montrer qu'on a :

$$\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} \;=\; \varnothing.$$

⋆ **Exercice 3.6.** Soit (X,τ) un espace topologique. Pour tout $x \in X$, on désigne par F_x l'ensemble de tous les <u>voisinages fermés</u> de x. Montrer que X est séparé si et seulement si on a :

$$\forall x \in X : \bigcap_{V \in F_x} V = \{x\}.$$

⋆ **Exercice 3.7.** Soit (X,τ) un espace topologique et soit D une partie de X. Montrer que D est dense dans X si et seulement si tout ouvert non vide de X rencontre D.

Exercice 3.8. Soit (X,τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de X qui sont toutes les deux partout denses. On suppose de plus que A est un ouvert de X.
— Montrer que $A \cap B$ est partout dense.
☞ Vous pouvez utiliser le résultat de l'exercice 3.7.

Exercice 3.9. Soit (X,τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de X. Montrer les propriétés suivantes :

(1) $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$ et $\mathrm{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$.

(2) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

Exercice 3.10. Soit (X, τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de X telles que $E = A \cup B$. Montrer qu'on a :

$$E = \overline{A} \cup \mathring{B}.$$

Exercice 3.11. Soit (X, τ) un espace topologique et soient D un sous-ensemble dense dans X et O un ouvert de X. Montrer qu'on a :

$$O \subset \overline{O \cap D}.$$

Exercice 3.12. Soit (X, τ) un espace topologique et soit A une partie de X. Montrer que A rencontre tout sous-ensemble dense dans X si et seulement si A est d'intérieur non vide.

Exercice 3.13.

Définition : Un espace topologique est dit *séparable* s'il existe une partie de X qui soit à la fois dénombrable et partout dense.

(1) Justifier que $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle) est séparable.

(2) Soit (X, τ) un espace topologique. Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B}$ pour τ qui soit dénombrable. Montrer que X est séparable.

4. Limite, continuité, topologie induite et topologie produit

⋆ **Exercice 4.1.** Soit X un ensemble non vide muni de sa topologie discrète. Montrer qu'une suite d'éléments de X est convergente ssi elle est stationnaire (i.e., constante à partir d'un certain rang).

⋆ **Exercice 4.2.** Soient (X, τ) un espace topologique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k := \{u_n, \text{ avec } n \geqslant k\}$.

— Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ est égale à $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{A_k}$.

— En déduire que cet ensemble est un fermé.

⋆ **Exercice 4.3.** Soient (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue ssi on a :

$$\forall A \in \mathscr{P}(X) : \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Exercice 4.4. Soient (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue ssi on a :

$$\forall B \in \mathscr{P}(Y) : \quad \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

⋆ **Exercice 4.5.** Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X. Montrer les deux équivalences suivantes :

$$A \text{ est un ouvert de } X \iff \text{Tout ouvert de } (A, \tau_A) \text{ est un ouvert de } (X, \tau) \qquad (1)$$

$$A \text{ est un fermé de } X \iff \text{Tout fermé de } (A, \tau_A) \text{ est un fermé de } (X, \tau) \qquad (2)$$

⋆ **Exercice 4.6.** Montrer que tout sous-espace topologique d'un espace topologique séparé est séparé.

⋆ **Exercice 4.7.** Soient (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) deux espaces topologiques et $X = X_1 \times X_2$ l'espace topologique produit. Montrer que X est séparé ssi X_1 et X_2 sont tous les deux séparés.

⋆ **Exercice 4.8.** Soient (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques. Montrer que les deux espaces produits $X \times Y$ et $Y \times X$ sont homéomorphes.

⋆ **Exercice 4.9.** Soit (E, τ) un espace topologique et soit $\Delta := \{(x, x), \ x \in E\}$. Montrer que E est séparé ssi Δ est un fermé dans l'espace produit $E \times E$.

⋆ **Exercice 4.10.** Soient (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques, avec Y séparé et soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que le graphe de f est un fermé dans l'espace produit $X \times Y$.

5. Espaces métriques

⋆ **Exercice 5.1.** Soit X un ensemble non vide. Montrer que la topologie associée à la distance discrète de X est la topologie discrète de X.

⋆ **Exercice 5.2.** Montrer que toute boule fermée d'un espace métrique est un fermé.

Exercice 5.3. Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques. Soient aussi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et ℓ un élément de X. Soient enfin $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ et $f : X \to Y$ une application.

(1) Montrer que $(u_n)_n$ converge vers ℓ dans l'espace métrique (X, d) ssi $(u_n)_n$ converge vers ℓ dans l'espace topologique (X, τ_d).

(2) Montrer que f tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 en tant qu'application entre deux espaces métriques ssi f tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 en tant qu'application entre deux espaces topologiques (X, τ_d) et $(Y, \tau_{d'})$.

(3) Montrer que f est continue en x_0 en tant qu'application entre deux espaces métriques ssi f est continue en x_0 en tant qu'application entre deux espaces topologiques (X, τ_d) et $(Y, \tau_{d'})$.

(4) Montrer que f est continue sur X en tant qu'application entre deux espaces métriques ssi f est continue sur X en tant qu'application entre deux espaces topologiques (X, τ_d) et $(Y, \tau_{d'})$.

⋆ **Exercice 5.4.** Soit (X, d) un espace métrique et soient A et B deux parties non vides de X. Montrer les propriétés suivantes :

(1) $A \subset B \implies d(x, B) \leqslant d(x, A) \qquad (\forall x \in X)$.

(2) $d(x, A) = d(x, \overline{A}) \qquad (\forall x \in X)$.

(3) $[\forall x \in X : d(x, A) = d(x, B)] \iff \overline{A} = \overline{B}$.

⋆ **Exercice 5.5.** Montrer qu'une partie d'un espace métrique est bornée ssi elle est contenue dans une boule ouverte.

⋆ **Exercice 5.6.** Montrer que toute réunion finie de parties bornées d'un espace métrique est bornée.

⋆ **Exercice 5.7.** Soient A et B deux parties d'un espace métrique (X, d). Montrer les propriétés suivantes :

(1) $A \subset B \implies \delta(A) \leqslant \delta(B)$.

(2) $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

Exercice 5.8. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X et x un élément de X. — Montrer que x est un point d'accumulation de A si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A, tous distincts, qui converge vers x.

⋆ **Exercice 5.9.** Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les distances d_1, d_2 et d_∞ de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

⋆ **Exercice 5.10.** On munit $X :=]0, +\infty[$ des deux distances d et d' suivantes :

- d est la distance induite de la distance usuelle de $\mathbb{R}$.
- d' est définie par :

$$d'(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \qquad (\forall x, y \in]0, +\infty[).$$

— Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes mais qu'elles ne sont pas équivalentes.

⋆ **Exercice 5.11.** Soit (X, d) un espace métrique et soit d' la distance de X définie par : $d' := \dfrac{d}{1+d}$.

(1) Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes.

(2) Supposons que $X = \mathbb{R}$ et que d est sa distance usuelle. Montrer que d' n'est pas équivalente à d.

Exercice 5.12. Soient $(X_1, d^{(1)}), \dots, (X_n, d^{(n)})$ des espaces métriques (où $n \in \mathbb{N}^*$) et soit $X := X_1 \times \cdots \times X_n$, muni de la distance d_∞ définie par :

$$\begin{array}{rccl} d_\infty : & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) & \longmapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d^{(i)}(x_i, y_i) \end{array}.$$

— Montrer que la topologie de X associée à sa distance d_∞ est la même que la topologie produit sur X.

☞ Commencer par caractériser les boules ouverte de (X, d_∞).

6. Espaces complets

⋆ **Exercice 6.1.** Soient $E :=]0, +\infty[$ et d la distance de E définie par :

$$d(x, y) \ := \ |\ln x - \ln y| \qquad\qquad (\forall x, y \in E).$$

— Montrer que l'espace métrique (E, d) est complet.

⋆ **Exercice 6.2.** Soit d la distance de $\mathbb{R}$ définie par :

$$d(x, y) \ := \ |\arctan x - \arctan y| \qquad\qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

— L'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet ?

⋆ **Exercice 6.3.** En utilisant convenablement le théorème du point fixe, montrer que l'équation :

$$\sqrt{x^2 + 1} \ = \ e^{2x} - x - 1$$

possède une solution unique sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

⋆ **Exercice 6.4.** En utilisant convenablement le théorème du point fixe, montrer que le système de deux équations :

$$\begin{cases} \sin x + \cos y & = \ 3x \\ \cos x + 2\sin y & = \ 4y \end{cases}$$

possède une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

⋆ **Exercice 6.5.** Soit (E, d) un espace métrique et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n(x) = d(u_n, x)$.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\alpha_n(x))_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$.
Pour la suite, on définit :

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n(x) \end{array} \cdot$$

(2) Montrer que f est continue.

(3) Montrer qu'on a $\inf\limits_{x\in E} f(x) = 0$ et donner la condition sur $(u_n)_n$ pour que cet infinimum soit atteint.

⋆ **Exercice 6.6.** Soit (E, d) un espace métrique.

(1) Montrer que toute intersection de parties complètes de E est une partie complète de E.

(2) Montrer que toute réunion <u>finie</u> de parties complètes de E est une partie complète de E.

⋆ **Exercice 6.7** (la réciproque du théorème de Cantor)**.**
Soit (E, d) un espace métrique vérifiant la propriété des fermés emboîtés de Cantor.
— Montrer que (E, d) est complet.

☞ Etant donnée une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, considérer la suite de fermés emboîtés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, avec $F_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

⋆ **Exercice 6.8** (autour du théorème de Baire)**.**
Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

(ii) Toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense.

⋆ **Exercice 6.9.** En utilisant le théorème de Baire, montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

⋆ **Exercice 6.10.**

(1) Montrer que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$.

(2) En se servant du théorème de Baire, en déduire que $\mathbb{Q}$ ne peut pas s'écrire comme intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.11. Soit (E, d) un espace métrique complet. On suppose que E est une réunion dénombrable de fermés ; c'est-à-dire que E s'écrit : $E = \cup_{n=1}^{+\infty} F_n$ (avec F_n est un fermé de E, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On pose $\Omega := \cup_{n=1}^{+\infty} \overset{\circ}{F}_n$.

— Montrer que Ω est dense dans E.

☞ Appliquer le théorème de Baire pour les fermés $F_n' := F_n \cap (E \backslash \Omega) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

7. Espaces compacts

⋆ **Exercice 7.1.** Soit E un ensemble infini et τ sa topologie cofinie (voir l'exercice 2.4). Montrer que E satisfait la propriété de Borel-Lebesgue mais qu'il n'est pas compact.

Exercice 7.2. Soit E un ensemble muni de sa topologie discrète. Montrer que E est compact si et seulement s'il est fini.

⋆ **Exercice 7.3.** Soient E un espace topologique séparé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers un élément ℓ de E.
— Montrer que l'ensemble :

$$K \ := \ \{u_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$$

est une partie compacte de E.

Exercice 7.4. Soit E un espace topologique séparé. Montrer les deux propriétés suivantes :

(i) Toute réunion finie de parties compactes de E est une partie compacte de E.

(ii) Toute intersection de parties compactes de E est une partie compacte de E.

⋆ **Exercice 7.5.** Soient E un espace topologique séparé et A et B deux parties compactes, non vides et disjointes de E.
— Montrer qu'il existe un voisinage U de A et un voisinage V de B qui soient disjoints.
☞ Commencer par traiter le cas où B est un singleton puis généraliser en se servant de ce cas particulier.

⋆ **Exercice 7.6.** On munit $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle et on considère deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que A est compacte et B est fermée. On pose :

$$C \ := \ \{a + b \ ; \ a \in A, b \in B\}.$$

(1) Montrer que C est fermée.

(2) Monter que si B est compacte alors C est compacte.

Exercice 7.7 (Examen de rattrapage de l'année 2017-2018)**.**
On munit $\mathbb{R}$ de la distance d définie par :

$$d(x, y) \ := \ |e^x - e^y| \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

(1) Déterminer explicitement la boule ouverte $B_d(0, 1)$.

(2) Montrer que l'intervalle $]-\infty, 0]$ est une partie fermée et bornée mais non compacte de l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$.

(3) Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 7.8. Soient E un espace topologique séparé et F un espace topologique compact et soit $f : E \to F$ une application.
— Montrer que si le graphe de f est fermé dans $E \times F$ alors f est continue.

⋆ **Exercice 7.9.** Soit (E, d) un espace métrique compact. Montrer que E est complet et totalement borné.

Exercice 7.10. Soit (E,d) un espace métrique complet et totalement borné. Montrer que E est compact.

☞ Justifier d'abord que cela revient à montrer que toute suite de E possède une sous-suite de Cauchy. Soit donc $S_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots\}$ une suite de E. Montrer qu'on peut extraire de S_1 une sous-suite $S_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots\}$ qui soit contenue dans une boule ouverte de E de rayon $1/2$. Montrer ensuite qu'on peut extraire de S_2 une sous-suite $S_3 = \{x_{31}, x_{32}, x_{33}, \ldots\}$ qui soit contenue dans une boule ouverte de E de rayon $1/3$, ...etc. Considérer au final la suite diagonale $S = \{x_{11}, x_{22}, x_{33}, \ldots\}$ et montrer que c'est une sous-suite de S_1 et qu'elle est de Cauchy dans E. Conclure.

⋆ **Exercice 7.11.** Soient (E,d) un espace métrique et A et B deux parties non vides de E. **On rappelle que $d(A,B) := \inf_{(a,b)\in A\times B} d(a,b) = \inf_{a\in A} d(a,B)$.**

(1) Montrer que si A est compacte, alors il existe $a \in A$ tel que $d(a,B) = d(A,B)$.

(2) En déduire que si A est compacte et B est fermée, on a :

$$d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \varnothing.$$

(3) Donner un exemple où A et B sont fermées et disjointes et telles que $d(A,B) = 0$.

Exercice 7.12. Soient (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant :

$$d\left(f(x), f(y)\right) \geqslant d(x,y) \qquad (\forall x, y \in E).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^n : E \to E$ par :

$$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

(avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$).

(1) Montrer que tout élément a de E est une valeur d'adhérence de la suite $\left(f^n(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
— En déduire que $f(E)$ est dense dans E.

(2) Montrer que tout élément (a,b) de E^2 est une valeur d'adhérence de la suite $\left(f^n(a), f^n(b)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de E^2.

☞ Munir E^2 de la distance d_∞ (par exemple) et introduire :

$$g : \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (f(x), f(y)) \end{array}.$$

Montrer que g vérifie la même propriété que f (sur E^2 au lieu de E) puis appliquer le résultat de la question précédente.

(3) Conclure que f est une isométrie bijective.

Exercice 7.13. Soit (E,d) un espace métrique vérifiant la propriété : « de tout recouvrement ouvert dénombrable de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini ». Montrer que E est compact.

8. Espaces connexes

⋆ **Exercice 8.1.** Soit (E,τ) un espace topologique et A une partie connexe de E.

— Montrer que toute partie B de E, vérifiant :

$$A \subset B \subset \overline{A}$$

est connexe. **En particulier, l'adhérence d'une partie connexe de E est connexe.**

⋆ **Exercice 8.2 (Le théorème du passage de la douane).**
Soient (E,τ) un espace topologique et A et B deux parties de E. On suppose que A est connexe et que A rencontre à la fois l'intérieur et l'extérieur de B (i.e. $A \cap \overset{\circ}{B} \neq \varnothing$ et $A \cap \overset{\circ}{\widehat{\complement_E B}} \neq \varnothing$).

— Montrer alors que A rencontre la frontière de B (i.e. $A \cap \mathrm{Fr}(B) \neq \varnothing$).

⋆ **Exercice 8.3.** Soient (E,d_E) un espace métrique complet, (F,d_F) un espace métrique connexe et $f : E \to F$ une application continue et ouverte[1]. On suppose que f satisfait l'inégalité :

$$d_F\left(f(x),f(y)\right) \geqslant k\, d_E(x,y) \qquad (\forall x,y \in E),$$

pour une certaine constance absolue et strictement positive k.

(1) Montrer que f est injective.

(2) (a) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E telle que la suite $\left(f(x_n)\right)_n$ est de Cauchy dans F alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E.

(b) En déduire que $f(E)$ est une partie fermée de F.

(c) En déduire que f est surjective puis que f est un homéomorphisme.

(d) Conclure que E est connexe.

⋆ **Exercice 8.4.** Soit (E,d) un espace métrique compact. On suppose que l'on a pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$:

$$\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r).$$

— Montrer que toute boule ouverte de E est connexe.

⋆ **Exercice 8.5.** Soit (E,d) un espace métrique connexe, de distance bornée.

(1) Montrer que toute sphère de E est non vide.

(2) En déduire que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ est non connexe.

---

1. Une application d'un espace topologique dans un autre est dite **ouverte** si elle transforme tout ouvert (de l'espace topologique de départ) en un ouvert (de l'espace topologique d'arrivée).

9. Espaces vectoriels normés

Pour tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps commutatifs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et **e.v.n** est l'abréviation de l'expression « espace vectoriel normé ».

★ **Exercice 9.1.** Soit E un **e.v.n** sur $\mathbb{K}$.

(1) Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\|x - y\| \geqslant \big| \|x\| - \|y\| \big|.$$

(2) En déduire que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

est continue (où $\mathbb{R}$ est muni de sa norme usuelle).

★ **Exercice 9.2.** Soient E un $\mathbb{K}$**-e.v.n** et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— Montrer que chacune des deux applications

$$\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

est continue.

☞ Remarquer que ces applications sont linéaires.

★ **Exercice 9.3.** Soit E un $\mathbb{K}$**-e.v.n**.

— Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E alors $\overline{H}$ l'est également.

★ **Exercice 9.4.** Soient E un $\mathbb{K}$**-e.v.n** et H un sous-espace vectoriel propre[2] de E.

— Montrer que H est d'intérieur vide.

Exercice 9.5. Soit E un $\mathbb{K}$**-e.v.n**.

— Montrer que pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, on a :

$$\overline{B(a, r)} = \overline{B}(a, r) \qquad \text{et} \qquad \overset{\circ}{\overline{B}(a, r)} = B(a, r).$$

★ **Exercice 9.6.** Soit E un $\mathbb{K}$**-e.v.n**.

— Montrer que tout sous-espace vectoriel F <u>de dimension finie</u> de E est un fermé.

★ **Exercice 9.7.** Soit E un $\mathbb{K}$**-e.v.n** de Banach.

— Montrer que E est ou bien de dimension <u>finie</u> ou bien de dimension <u>infinie non dénombrable</u>.

☞ Utiliser le théorème de Baire en se servant des résultats des exercices 9.4 et 9.6.

Exercice 9.8. Soit $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et soit $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ l'application qui associe à tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ le maximum des valeurs absolues de ses coefficients.

(1) Montrer brièvement que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(2) Montrer de deux façons différentes que le $\mathbb{R}$**-e.v.n** $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas de Banach (pour la première façon, vous utilisez la définition même d'un espace de Banach et pour la seconde, vous utilisez le résultat de l'exercice 9.7).

2. C'est-à-dire que $H \neq E$.

Exercice 9.9. Soient E un $\mathbb{R}$-**e.v.n** et f une forme linéaire non identiquement nulle sur E. Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est continue sur } E \iff \mathrm{Ker}\, f \text{ est un fermé de } E.$$

☞ Pour montrer l'implication inverse, vous pouvez procéder par l'absurde en supposant que $\mathrm{Ker}\, f$ est fermé mais que f n'est pas continue et suivre les étapes suivantes :

— Montrer (en utilisant la discontinuité de f) qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E, vérifiant : $|f(x_n)| > n\|x_n\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. En particulier $f(x_n) \neq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

— Par suite, considérer la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E, définie par : $y_n := x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_n)}x_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Vérifier que $(y_n)_n$ est une suite de $\mathrm{Ker}\, f$ et qu'elle converge vers x_0.

— Conclure (en utilisant l'hypothèse « $\mathrm{Ker}\, f$ est un fermé de E ») que $x_0 \in \mathrm{Ker}\, f$; ce qui donne une contradiction avec $f(x_0) \neq 0$.

Exercice 9.10. Soient E un $\mathbb{R}$-**e.v.n** et $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue[3] et non identiquement nulle. Considérons $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

(1) Montrer que l'on a : $d(x_0, \mathrm{Ker} f) > 0$.

(2) (a) Montrer que pour tout $y \in \mathrm{Ker} f$, on a : $|f(x_0)| \leqslant |||f||| \cdot \|x_0 - y\|$.

(b) En déduire que l'on a :

$$|||f||| \;\geqslant\; \frac{|f(x_0)|}{d(x_0, \mathrm{Ker} f)}.$$

Exercice 9.11. Soient E un $\mathbb{R}$-**e.v.n** et f un endomorphisme de E. On définit

$$A_f \;:=\; \{x \in E : \; \|f(x)\| = 1\}.$$

— Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est continue} \iff A_f \text{ est fermé.}$$

⋆ **Exercice 9.12.** On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \int_0^1 |f(t)|\, dt \\ \|f\|_\infty &:= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \end{aligned}\right\} \quad (\forall f \in E). \tag{3}$$

(1) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

(2) Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas de Banach.
☞ Utiliser la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ de E, définie par :

$$\begin{aligned} f_n :\; [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ at + b & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } t \in]\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases} \end{aligned} \qquad (\forall n \geqslant 2)$$

(où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis de sorte que f_n soit continue sur $[0,1]$ (i.e., $f_n \in E$)).

3. Bien entendu, $\mathbb{R}$ est muni de sa norme usuelle qui n'est rien d'autre que la valeur absolue.

⋆ **Exercice 9.13.** Soient $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi(f): & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(f)(x) := \frac{1}{2}\left[1 + \int_0^1 xe^{xt} f(t)\,dt\right] \end{array} \qquad (\forall f \in E).$$

— Montrer que φ possède un unique point fixe dans E.

Exercice 9.14. Montrer que l'unique application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation intégrale :

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 \sin\left(x^2 + t^2\right) f(t)\,dt \qquad (\forall x \in [0,1])$$

est l'application identiquement nulle.

Exercice 9.15. Soit φ l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, défini par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \int_0^x f(t)\,dt \end{array}.$$

— Montrer que l'endomorphisme φ^2 ne possède pas de point fixe non trivial dans E (le point fixe trivial est 0_E).

⋆ **Exercice 9.16.** On munit $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. la norme de la convergence uniforme). Soit $\varphi : E \to E$, définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi(f): & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(f)(x) := x(1-x)f(x) \end{array} \qquad (\forall f \in E).$$

— Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}_c(E,E)$ et calculer $|||\varphi|||$.

⋆ **Exercice 9.17.** On munit $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. la norme de la convergence uniforme). Soient φ et Ψ les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(1) - f(0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} \Psi: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)\,dx \end{array}.$$

— Montrer que φ et Ψ appartiennent à $\mathscr{L}_c(E,\mathbb{R})$ puis calculer la norme de chacun d'entre eux.

Exercice 9.18. Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et N_1 et N_2 les deux applications de E dans $\mathbb{R}^+$, définies par :

$$\begin{aligned} N_1(f) &:= \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + |f(0)| \\ N_2(f) &:= \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \end{aligned} \qquad (\forall f \in E). \tag{4}$$

— Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

☞ Pour montrer l'équivalence de N_1 et N_2, utiliser le théorème des accroissements finis.

Exercice 9.19. Soient $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\|\cdot\|_\infty$ la norme de $\mathbb{R}[X]$ définie par : $\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ $(\forall P \in \mathbb{R}[X])$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} N: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & P & \longmapsto & N(P) := \max_{k\in\mathbb{N}} |P^{(k)}(0)| \end{array}.$$

(1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(2) Montrer que N est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \alpha \cdot N$) mais que N n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

(3) (a) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & (\mathbb{R}[X], N) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & P & \longmapsto & \varphi(P) := \int_0^1 P(t)\, dt \end{array}$$

est linéaire et continue.

(b) Déterminer la valeur exacte de $|||\varphi|||$.

☞ La formule de Taylor est d'une grande utilité pour toutes les questions de cet exercice.

Exercice 9.20. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_1$, définie par :

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt \qquad (\forall f \in E)$$

et on considère φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = g \end{array}, \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rccl} g : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) := \int_0^x f(t)\, dt \end{array}.$$

(1) Montrer que φ est continue et que $|||\varphi||| \leqslant 1$.

(2) Montrer que l'on a précisément $|||\varphi||| = 1$.
☞ Considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E dont le terme général $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est défini par :

$$f_n(x) := ne^{-nx} \quad (\forall x \in [0,1]).$$

N.B : On peut également considérer la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E dont le terme général $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est défini par :

$$h_n(x) := n(1-x)^{n-1} \quad (\forall x \in [0,1]).$$

Exercice 9.21. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. la norme induite sur E de la norme de la convergence uniforme de $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$) et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & (E, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := \int_0^1 x f'(x)\, dx \end{array}.$$

(1) Montrer que φ est linéaire et continue et que $|||\varphi||| \leqslant 2$.

(2) Montrer que l'on a précisément : $|||\varphi||| = 2$.
☞ Considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E dont le terme général $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est défini par :

$$f_n(x) := 2x^n - 1 \quad (\forall x \in [0,1]).$$

Exercice 9.22 (Examen de l'année 2017-2018)**.**
Soient E le $\mathbb{R}$-**e.v.n** $E := \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_\infty$ sa norme de la convergence uniforme, qui est définie par : $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ $(\forall f \in E)$. Considérons $N : E \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$N(f) := |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt \qquad (\forall f \in E).$$

(1) Montrer que N est une norme sur E.

(2) Montrer que l'on a $\|\cdot\|_\infty \leqslant N$ (c'est-à-dire : $\forall f \in E : \|f\|_\infty \leqslant N(f)$).
- Qu'est ce que cette inégalité entraîne à propos des topologies de E engendrées par les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ?

(3) Soit
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & (E, N) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := f(0) - f(\tfrac{1}{2}) + f(1) \end{array}.$$

(a) Montrer que φ est linéaire et continue.

(b) Montrer que l'on a précisément $|||\varphi||| = 1$.

Exercice 9.23. Soit E un $\mathbb{R}$**-e.v.n** et soient f et g deux endomorphismes de E, vérifiant l'identité :
$$f \circ g - g \circ f \;=\; \mathrm{id}_E \qquad (\star)$$

(1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$f \circ g^n - g^n \circ f \;=\; n g^{n-1} \qquad (\star\star)$$

(2) (a) En utilisant $(\star\star)$, montrer que g ne peut être nilpotent [4].

(b) En déduire, en se servant toujours de $(\star\star)$ et du résultat de (2)(a), que l'un au moins des deux endomorphismes f et g est discontinu.

(c) Conclure que E est forcément de dimension infinie.
— Retrouvez ce résultat plus simplement en utilisant seulement de l'algèbre linéaire.
☞ Procéder par l'absurde et utiliser la notion de « trace d'un endomorphisme ».

B. Farhi
E-Mail : bakir.farhi@gmail.com
Site web : http://farhi.bakir.free.fr/

4. On dit que g est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^k \equiv 0$.