Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Département de Mathématiques

Année universitaire
2018/2019

EXERCICES DE TOPOLOGIE

1. Espaces topologiques

Exercice 1.1. Montrer que dans un espace topologique séparé, tout singleton est un fermé.

— La réciproque est-elle vraie ?

☞ Penser à la topologie cofinie.

Exercice 1.2. Pour tout réel α, on pose $\theta_\alpha :=]\alpha, +\infty[$. On considère la famille de parties de $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\tau \ := \ \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{\theta_\alpha \ , \ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Montrer que τ constitue une topologie sur $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).

(3) Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$A = [3, 7[\ \ ; \ \ A = [1, +\infty[\ \ ; \ \ A = \{2, 3, 5\}.$$

Exercice 1.3. On pose $E :=]0, +\infty[$ et pour tout réel positif α, on pose $\theta_\alpha :=]\alpha, +\infty[\subset E$. On considère τ la famille de parties de E donnée par :

$$\tau \ := \ \{\varnothing\} \cup \{\theta_\alpha \ , \ \alpha \in \mathbb{R}^+\}.$$

(1) Montrer que τ constitue une topologie sur E.

(2) Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).

(3) Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$$A =]0, 1[\ \ ; \ \ A = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\ \ ; \ \ A = \mathbb{N}.$$

(4) Montrer que (E, τ) n'est pas séparé.

Exercice 1.4. Soit τ la famille constituée de parties U de $\mathbb{R}$ qui satisfont l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :

(i) $0 \notin U$.

(ii) $]-1, 1[\subset U$.

(1) Montrer que τ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

(2) (a) Caractériser les parties fermées de l'espace topologique $(\mathbb{R}, \tau)$.

(b) Caractériser les parties de $\mathbb{R}$ qui sont ouvertes et fermées à la fois dans $(\mathbb{R}, \tau)$.

Date: **Vendredi, 23 février 2018.**

(3) Montrer que l'espace topologique $(\mathbb{R}, \tau)$ n'est pas séparé.

Exercice 1.5. Soient E un ensemble et $\phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ une application qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\phi(E) = E$.

(ii) $\forall A \in \mathscr{P}(E) : \ \phi(A) \subset A$.

(iii) $\forall A \in \mathscr{P}(E) : \ \phi(\phi(A)) = \phi(A)$.

(iv) $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) : \ \phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$.

(1) Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a :

$$A \subset B \implies \phi(A) \subset \phi(B).$$

(2) Considérons τ le sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$, constitué des parties de E qui sont des points fixe pour ϕ ; c'est-à-dire :

$$\tau := \left\{U \in \mathscr{P}(E) : \ \phi(U) = U\right\}.$$

(a) Montrer que τ est une topologie sur E.

(b) Montrer que pour toute partie A de (E, τ), on a :

$$\overset{\circ}{A} = \phi(A).$$

Exercice 1.6. Soient (E, τ) un espace topologique et A une partie de E. Montrer que A est dense dans E si et seulement si tout ouvert non vide de E rencontre A.

Exercice 1.7. Soit (X, τ) un espace topologique.

(1) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Tout singleton de X est un fermé.

(ii) Pour tous $x, y \in X$, avec $x \neq y$, il existe un voisinage de x qui ne contient pas y.

(2) En déduire que si X est séparé alors tout singleton de X est un fermé.

Exercice 1.8. Soit (X, τ) un espace topologique infini.
— Montrer que si toute partie infinie de X est un ouvert alors τ est forcément la topologie discrète de X.

Exercice 1.9. Soit E un espace topologique.

(1) Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a :

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}.$$

(2) Donner un exemple de parties A et B de $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle) telles que :

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}.$$

(3) Une partie A de E est dite **mince** si $\overset{\circ}{A} = \varnothing$.

(a) Que peut-on dire du complémentaire d'une partie mince de E ? Justifier.

(b) Donner (dans $\mathbb{R}$) un exemple d'une partie qui est à la fois mince et partout dense.

(c) Si A et F sont deux parties minces de E, avec F fermée, montrer que $A \cup F$ est mince.

Exercice 1.10. Soient (E,τ) un espace topologique et $\alpha : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ l'application qui associe à toute partie A de E, la partie $\alpha(A)$ de E définie par : $\alpha(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

(1) Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a :

$$A \subset B \implies \alpha(A) \subset \alpha(B).$$

(2) Montrer que pour toute partie ouverte A de E, on a :

$$A \ \subset \ \alpha(A).$$

(3) Montrer que pour toute partie A de E, on a :

$$\alpha(\alpha(A)) \ = \ \alpha(A).$$

(4) Montrer que si U et V sont deux ouverts disjoints de (E,τ) alors $\alpha(U)$ et $\alpha(V)$ sont aussi disjoints.

(5) On dit qu'une partie A de E est un **ouvert régulier** si l'on a : $\alpha(A) = A$.

(a) Montrer qu'une intersection de deux ouverts réguliers de E donne un ouvert régulier de E.

(b) Donner dans $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle) un exemple de deux ouverts réguliers dont la réunion n'est pas un ouvert régulier.

Exercice 1.11. Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application de X dans Y.
— Montrer que si Y est séparé et f est injective et continue alors X est séparé.

Exercice 1.12. Soit (E,τ) un espace topologique et soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux applications continues. Soit enfin A la partie de E définie par :

$$A \ := \ \{x \in E : \ f(x) \leqslant g(x)\}.$$

— Montrer que A est un fermé de (E,τ).

Exercice 1.13. Soient X et Y deux espaces topologiques, avec Y séparé et soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications continues.

(1) Montrer que l'ensemble

$$F := \{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de X.

(2) Soit $A \subset X$ une partie dense dans X.
— Montrer (en s'appuyant sur le résultat de la question précédente) que si f et g coïncident sur A alors elles coïncident sur X.

Exercice 1.14. Soient (X,τ) et (Y,τ') deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est ouverte[1] ssi on a :

$$\forall A \in \mathscr{P}(X) : \quad f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}} \, .$$

1. Une application d'un espace topologique dans un autre espace topologique est dite ouverte si l'image de tout ouvert de l'espace de départ est un ouvert dans l'espace d'arrivée.

Exercice 1.15. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soient aussi τ une topologie sur E et τ' la topologie la plus fine de F qui rend l'application $f : (E, \tau) \to (F, \tau')$ continue.

(1) Montrer que l'on a :

$$\tau' \;=\; \left\{U \in \mathscr{P}(F) : \; f^{-1}(U) \in \tau\right\}.$$

(2) En déduire que $f : (E, \tau) \to (F, \tau')$ est un homéomorphisme.

Exercice 1.16. Soient (E, τ) un espace topologique, F un ensemble et $f : F \to E$ une application. On définit :

$$\tau' \;:=\; \left\{f^{-1}(U),\; U \in \tau\right\}.$$

(1) Montrer que τ' est une topologie sur F et que $f : (F, \tau') \to (E, \tau)$ est continue.

(2) Dans cette question, on suppose que E est muni de la topologie τ et F est muni de la topologie τ'.
— Montrer qu'une application $g : E \to F$ est continue si et seulement si $f \circ g$ est continue.

Exercice 1.17. Soit (E, τ) un espace topologique et soient A et B deux parties de E telles que : $A \cup B = E$. On désigne par τ_A et τ_B les topologies induites respectivement sur A et sur B de la topologie de E.
— Montrer que l'on a :

$$\tau_A \cap \tau_B \;\subset\; \tau.$$

Exercice 1.18. On munit $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ d'une famille τ de ses parties O vérifiant l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes :

(i) $\infty \notin \tau$.
(ii) $\infty \in O$ et $\complement_{\overline{\mathbb{N}}} O$ est fini.

(1) Montrer que τ constitue une topologie sur $\overline{\mathbb{N}}$.

(2) Montrer que l'espace topologique $(\overline{\mathbb{N}}, \tau)$ est compact.

(3) Soit X un espace topologique séparé.
— Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X est convergente vers un élément x de X si et seulement si l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \overline{\mathbb{N}} & \longrightarrow & X \\ & n & \longmapsto & f(n) := \begin{cases} x_n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{si } n = \infty \end{cases} \end{array}$$

est continue.

Exercice 1.19.

(1) Montrer que dans un espace topologique compact, une suite possédant une unique valeur d'adhérence converge forcément vers cette valeur d'adhérence.

(2) Cette propriété est-elle vraie dans $\mathbb{R}$?

Exercice 1.20. Soit X un espace topologique compact.
— Montrer que tout point de X possède un système fondamental de voisinages compacts.

Exercice 1.21. Soient E un espace topologique séparé et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties compactes emboîtées et toutes non vides de E. On pose $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

(1) Montrer que K est non vide et en déduire qu'il est compact.

(2) Montrer que si Ω est un ouvert de E contenant K alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$K_n \subset \Omega \qquad (\forall n \geqslant n_0).$$

Exercice 1.22. Soit E un espace topologique.

(1) (a) Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(b) Dire (sans démonstration) comment cette propriété se généralise par récurrence.

(2) Donner un exemple d'un espace topologique E et d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E tels que :

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \neq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

(3) On suppose dans cette question que E est séparé.

(a) Montrer que si A est une partie compacte de E et $x \in \complement_E A$ alors il existe un ouvert U de E tel que $A \subset U$ et $x \notin \overline{U}$.

(b) En déduire que si E est compact alors pour tout $x \in E$ et tout ouvert O de E contenant x, il existe un fermé F de E tel que $x \in \overset{\circ}{F} \subset F \subset O$.
☞ Utiliser le résultat de la question précédente pour $A = \complement_E O$.

(4) Montrer que la propriété obtenue à la question (3)(b) reste vraie quand E est métrisable (sans être forcément compact).

Exercice 1.23. Montrer que les composantes connexes d'un espace topologique sont des parties fermées de cet espace.

Exercice 1.24. Montrer qu'il n'existe aucune application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui prend chaque valeur réelle exactement deux fois.

Exercice 1.25. Soient E un espace topologique et F_1 et F_2 deux parties fermées de E. Montrer que si $(F_1 \cup F_2)$ et $(F_1 \cap F_2)$ sont connexes alors F_1 et F_2 sont connexes.

Exercice 1.26. Soient E un espace topologique compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties fermées emboîtées de E. Montrer que si les F_n ($n \in \mathbb{N}$) sont tous connexes alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est connexe.

Exercice 1.27. Soient E un espace topologique connexe, A une partie connexe de E et B la composante connexe de $\complement_E A$. Montrer que $\complement_E B$ est connexe.

2. Espaces métriques

Exercice 2.1. Montrer qu'une boule fermée d'un espace métrique est un fermé.

Exercice 2.2. Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Pour tout $x \in E$, montrer l'équivalence suivante :

$$x \in \overline{A} \iff \forall \varepsilon > 0 : \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

Exercice 2.3. Soit $d : \mathbb{R}^{*2} \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x, y) \ := \ \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}^*).$$

(1) Montrer que d constitue une distance sur $\mathbb{R}^*$.

(2) Déterminer explicitement la boule ouverte $B(\frac{1}{2}, 3)$.

Exercice 2.4. Soit $E :=]0, +\infty[$ et soit $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$, définie par :

$$d(x, y) \ := \ |\ln x - \ln y| \qquad (\forall x, y \in E).$$

(1) Montrer que d constitue une distance sur E.

(2) Déterminer explicitement la boule ouverte $B(e^2, \frac{1}{2})$.

(3) Etudier la complétude de (E, d).

Exercice 2.5. Soit $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x, y) \ := \ |e^x - e^y| \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

(1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

(2) Etudier la complétude de l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$.

Exercice 2.6. Soit $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x, y) \ := \ |\arctan x - \arctan y| \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

(1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

(2) Etudier la complétude de l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$.

Exercice 2.7. Soit (E, d) un espace métrique. On munit E de la nouvelle distance d' définie par :

$$d' \ := \ \inf(1, d).$$

— Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes.

Exercice 2.8. Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{1 + |x|} \end{array}$$

et soit

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \longmapsto & d(x, y) := |f(x) - f(y)| \end{array}.$$

— Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est topologiquement équivalentes à la distance usuelle de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.9. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0$. On suppose que f vérifie l'inégalité[2] :

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}^+).$$

(1) Montrer que si d est une distance sur un ensemble non vide E alors $f(d)$ est aussi une distance sur E.

(2) En déduire que l'application :

$$\begin{array}{rrcl} d : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & \ln(1 + |x-y|) \end{array}$$

constitue une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.10. Pour ce qui suit, on note par d_{us} la distance usuelle de $\mathbb{R}$. Soit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par :

$$d(x,y) := \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

(1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

☞ Pour montrer l'inégalité triangulaire, vous pouvez transformer $d(x,y)$ en posant $x = \tan\alpha$ et $y = \tan\beta$ (avec $\alpha, \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

(2) Montrer que d et d_{us} sont topologiquement équivalentes mais qu'elles ne sont pas équivalentes.

(3) Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 2.11. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle qui est strictement positive et vérifie la propriété :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant |\lambda| f(x) + |1-\lambda| f(y) \qquad (\forall \lambda, x, y \in \mathbb{R}). \qquad (\star)$$

(1) Montrer que l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, définie par :

$$d(x,y) := \frac{|x-y|}{f(x)f(y)} \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}),$$

constitue une distance sur $\mathbb{R}$.

(2) Retrouver le résultat de la première question de l'exercice 2.10.

Exercice 2.12. Soit E un ensemble muni de deux distances équivalentes d_1 et d_2 et soit A une partie de E. On considère f l'application définie par :

$$\begin{array}{rrcl} f : & (E, d_1) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, d_{\text{us}}) \\ & x & \longmapsto & d_1(x,A) + d_2(x,A) \end{array}.$$

— Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 2.13. Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une application d'un espace métrique (X, d_X) dans un autre espace métrique (Y, d_Y) et soit A une partie dense dans X.
— Montrer que si $f_{|A}$ est une isométrie alors f est -elle même- une isométrie.

Exercice 2.14. Soient $E := [\frac{2}{3}, +\infty[$ et d la distance usuelle sur E (i.e, la restriction de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ à E).

(1) Montrer que (E, d) est complet.

2. On dit que f est **sous-additive.**

(2) Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x+6}{3x+2} \end{array} \cdot$$

(a) Montrer, sans calcul, que f admet un unique point fixe (sur E).

(b) Calculer ce point fixe.

Exercice 2.15. Montrer que le système de deux équations :
$$\begin{cases} \sin x + \cos y &= 3x \\ \cos x + 2\sin y &= 4y \end{cases}$$
possède une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.16. Soit (E, d) un espace métrique et soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E. On suppose que $(x_n)_n$ est de Cauchy et qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d(x_n, y_n) \leqslant \frac{1}{n}$.

— Montrer alors que $(y_n)_n$ est de Cauchy.

Exercice 2.17. Soit
$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (n, m) & \longmapsto & d(n,m) := \begin{cases} 0 & \text{si } n = m \\ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} & \text{si } n \neq m \end{cases} \end{array}.$$

(1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}^*$.

(2) Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{N}^*, d)$ est complet.

(3) Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ & n & \longmapsto & n+1 \end{array}.$$

— Montrer que f vérifie la propriété :
$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \text{ avec } n \neq m : \quad d(f(n), f(m)) < d(n,m)$$
mais qu'elle n'est pas contractante.

Exercice 2.18. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels deux à deux distincts. On pose $E := \{a_1, a_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ et on définit $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ par :
$$d(a_p, a_q) \; := \; \begin{cases} 0 & \text{si } p = q \\ 10 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} & \text{si } p \neq q \end{cases} \qquad (\forall p, q \in \mathbb{N}^*).$$

(1) Montrer que d est une distance sur E.

(2) Montrer que l'espace métrique (E, d) est complet.

Exercice 2.19. Soit (X, d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X, vérifiant la propriété suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x_{n+1}) \; \leqslant \; \frac{1}{2^n} \qquad (*)$$

(1) Montrer que $(x_n)_n$ est de Cauchy.

(2) Montrer que de toute suite de Cauchy de X, on peut extraire une sous-suite qui satisfait la propriété $(*)$.

Exercice 2.20. Soit (X, d) un espace métrique et soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de X telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

(1) Montrer l'équivalence :

$$(x_n)_n \text{ est de Cauchy} \iff (y_n)_n \text{ est de Cauchy.}$$

(2) Montrer que si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont toutes les deux convergentes alors elles ont la même limite.

Exercice 2.21. Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E.

(1) Montrer qu'on a :

$$\overline{A} = \{x \in E : \ d(x,A) = 0\}.$$

(2) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x,A) \end{aligned}$$

est lipschitzienne.

(3) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, le sous-ensemble de E défini par :

$$A_\varepsilon := \{x \in E : \ d(x,A) < \varepsilon\}$$

est un ouvert.

(4) En déduire que tout fermé de E peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 2.22. En utilisant le théorème de Baire, montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2.23.

(1) Montrer que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$.

(2) En se servant du théorème de Baire, en déduire que $\mathbb{Q}$ ne peut pas s'écrire comme intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.24. Soit (E,d) un espace métrique complet. On suppose que E est une réunion dénombrable de fermés ; c'est-à-dire que E s'écrit : $E = \cup_{n=1}^{+\infty} F_n$ (avec F_n est un fermé de E, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On pose $\Omega := \cup_{n=1}^{+\infty} \overset{\circ}{F}_n$.

— Montrer que Ω est dense dans E.

☞ Appliquer le théorème de Baire pour les fermés $F'_n := F_n \cap (E\setminus\Omega)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 2.25. Soit (E,d) un espace métrique et soient A une partie non vide de E et x un élément de E. Montrer l'équivalence suivante :

$$x \in \overset{\circ}{A} \iff d\left(x, \complement_E A\right) \neq 0.$$

Exercice 2.26. On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ de sa distance d_∞ et on considère ses deux parties A et B suivantes :

$$\begin{aligned} A &:= (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \\ B &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 1\right\}. \end{aligned}$$

(1) Montrer que A et B sont deux parties fermées et disjointes de l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

(2) Montrer qu'on a : $d_\infty(A,B) = 0$.

Exercice 2.27. Soient (E,d) un espace métrique et A et B deux parties non vides de E. On rappelle que $d(A,B) := \inf_{(a,b)\in A\times B} d(a,b) = \inf_{a\in A} d(a,B)$.

(1) Montrer que si A est compacte, alors il existe $a \in A$ tel que $d(a,B) = d(A,B)$.

(2) En déduire que si A est compacte et B est fermée, on a :

$$d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \varnothing.$$

(3) Donner un exemple où A et B sont fermées et disjointes et telles que $d(A,B) = 0$ (voir l'exercice précédent).

Exercice 2.28. Soit (E,d) un espace métrique et soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints de E.

— Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 de E tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$.

☞ Considérer l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d(x,F_1) - d(x,F_2) \end{array}$$

et constater qu'on a $f(x) < 0$ pour tout $x \in F_1$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \in F_2$.

Exercice 2.29. Soient (X,d) un espace métrique et (Y,τ) un espace topologique séparé. Soit aussi $f : X \to Y$ une application.

— Montrer que f est continue sur X si et seulement si sa restriction à tout compact de X est continue.

Exercice 2.30. Soient E un espace métrique compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui possède une unique valeur d'adhérence x.

— Montrer que $(x_n)_n$ converge vers x.

Exercice 2.31. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application lipschitzienne de rapport 1 et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[a,b]$, satisfaisant la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}.$$

— Montrer que $(x_n)_n$ converge vers un point fixe de f.

Exercice 2.32. Soient E un espace métrique et f et g deux applications de E dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$F_n := \{x \in E : \ nf(x) + g(x) \leqslant 0\}.$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-ensemble F_n de E est un fermé.

(2) On suppose pour toute la suite que :
- E est compact ;
- $\forall x \in E : f(x) \geqslant 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N} : F_n \neq \varnothing$.

  (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $F_{n+1} \subset F_n$.

  (b) Montrer que l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide.

  (c) En déduire l'existence d'un $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exercice 2.33. Soient (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant la propriété :

$$\forall x,y \in E, \text{ avec } x \neq y : \quad d\left(f(x), f(y)\right) < d(x,y).$$

(1) Montrer que f possède un unique point fixe ℓ.

(2) Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

converge vers ℓ.

(3) Montrer que la suite de fonctions $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers ℓ.

Exercice 2.34 (difficile!)**.** Soit E un espace métrique tel que toute application de E dans $\mathbb{R}$ est bornée.
— Montrer que E est compact.

Exercice 2.35. Soient (E, d_E) un espace métrique complet, (F, d_F) un espace métrique connexe et $f : E \to F$ une application continue et ouverte[3]. On suppose que f satisfait l'inégalité :

$$d_F\left(f(x), f(y)\right) \geqslant k\, d_E(x, y) \qquad (\forall x, y \in E),$$

pour une certaine constance absolue et strictement positive k.

(1) Montrer que f est injective.

(2) (a) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E telle que la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans F alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E.

(b) En déduire que $f(E)$ est une partie fermée de F.

(c) En déduire que f est surjective puis que f est un homéomorphisme.

(d) Conclure que E est connexe.

Exercice 2.36. Soit (E, d) un espace métrique compact. On suppose que l'on a pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$:

$$\overline{B(a, r)} = \overline{B}(a, r).$$

— Montrer que toute boule ouverte de E est connexe.

Exercice 2.37. Soit (E, d) un espace métrique connexe, de distance bornée.

(1) Montrer que toute sphère de E est non vide.

(2) En déduire que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ est non connexe.

3. Une application d'un espace topologique dans un autre est dite **ouverte** si elle transforme tout ouvert (de l'espace topologique de départ) en un ouvert (de l'espace topologique d'arrivée).

3. Espaces vectoriels normés

Pour tout ce qui suit $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps commutatifs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'abréviation **e.v.n** signifie « espace vectoriel normé ».

Exercice 3.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.
— Montrer qu'on a pour tous $x, y \in E \setminus \{0_E\}$:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant 2 \frac{\|x-y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 3.2. Pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, on définit :

$$N_1(P) := \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ e^{-|x|} |P(x)| \right\}.$$

(1) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$.

(2) Montrer qu'il existe une constante strictement positive c telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[x] : \quad N_1(P) \leqslant c\, N_2(P).$$

(3) Montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 3.3. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \|f\|_1 := \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt \\ \|f\|_\infty := \displaystyle\sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \end{array} \right. \qquad (\forall f \in E). \tag{1}$$

(1) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

(2) Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas de Banach.
☞ Utiliser la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ de E, définie par :

$$\begin{array}{rccl} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ at + b & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } t \in]\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases} \end{array} \qquad (\forall n \geqslant 2)$$

(où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis de sorte que f_n soit continue sur $[0,1]$ (i.e., $f_n \in E$)).

Exercice 3.4. Soient $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi(f) : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(f)(x) := \frac{1}{2}\left[1 + \int_0^1 x e^{xt} f(t)\, dt \right] \end{array} \qquad (\forall f \in E).$$

— Montrer que φ possède un unique point fixe dans E.

Exercice 3.5. Montrer que l'unique application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation intégrale :

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin\left(x^2 + t^2\right) f(t)\, dt \qquad (\forall x \in [0,1])$$

est l'application identiquement nulle.

Exercice 3.6. Soit E un $\mathbb{K}$-**e.v.n** de Banach.
— Montrer que E est ou bien de dimension finie ou bien de dimension infinie non dénombrable.
☞ Utiliser le théorème de Baire.

Exercice 3.7. Soit $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et soit $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ l'application qui associe à tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ le maximum des valeurs absolues de ses coefficients.

(1) Montrer brièvement que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(2) Montrer de deux façons différentes que le $\mathbb{R}$-**e.v.n** $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas de Banach (pour la première façon, vous utilisez la définition même d'un espace de Banach et pour la seconde, vous utilisez le résultat de l'exercice 3.6).

Exercice 3.8. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels. On note aussi par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire d'ordre n (i.e. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \det M \neq 0\}$) et par $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n (i.e. $O_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : M^tM = I_n\}$).

(1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3.9. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés.
— En supposant que F est de Banach, montrer que $\mathscr{L}_c(E,F)$ est également de Banach.

Exercice 3.10. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to R$ une application. On définit :

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) := \varphi(\|x\|) \end{array}.$$

Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est uniformément continue} \iff \varphi \text{ est uniformément continue.}$$

(Bien entendu, ici $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$ sont munis de leurs distances usuelles).

Exercice 3.11. On munit $E := \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. la norme de la convergence uniforme). Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := \int_0^1 f(t)\,dt \end{array}$$

est linéaire et continue.

Exercice 3.12. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et f une forme linéaire non identiquement nulle sur E. Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est continue sur } E \iff \mathrm{Ker}\, f \text{ est un fermé de } E.$$

Exercice 3.13. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et f un endomorphisme de E. On définit

$$A_f := \{x \in E : \|f(x)\| = 1\}.$$

— Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est continue} \iff A_f \text{ est fermé.}$$

Exercice 3.14. On munit $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. la norme de la convergence uniforme). Soit $\varphi : E \to E$, définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi(f): & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(f)(x) := x(1-x)f(x) \end{array} \qquad (\forall f \in E).$$

— Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}_c(E,E)$ et calculer $|||\varphi|||$.

Exercice 3.15. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et f une forme linéaire sur E. Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est bornée} \iff f \text{ est identiquement nulle.}$$

Exercice 3.16. On munit $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de sa norme $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. la norme de la convergence uniforme). Soit φ la forme linéaire sur E, définie par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) := \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt \end{array}.$$

— Etudier la continuité de φ.

Exercice 3.17. Soient $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\|\cdot\|_\infty$ la norme de $\mathbb{R}[X]$ définie par : $\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ $(\forall P \in \mathbb{R}[X])$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} N: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & P & \longmapsto & N(P) := \max_{k\in\mathbb{N}} |P^{(k)}(0)| \end{array}.$$

(1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(2) Montrer que N est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \alpha \cdot N$) mais que N n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

(3) (a) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & (\mathbb{R}[X],N) & \longrightarrow & (\mathbb{R},|\cdot|) \\ & P & \longmapsto & \varphi(P) := \int_0^1 P(t)\,dt \end{array}$$

est linéaire et continue.

(b) Déterminer la valeur exacte de $|||\varphi|||$.

☞ La formule de Taylor est d'une grande utilité pour toutes les questions de cet exercice.

Exercice 3.18. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue, vérifiant la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in E: \quad \|x\| > M \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

— Montrer que f et bornée et atteint ses bornes.

B. Farhi
E-Mail : bakir.farhi@gmail.com
Site web : http://farhi.bakir.free.fr/