# 1 Définitions et propriétés

**Définition 1.1.** Soit $X \subset \mathbb{R}$, on appelle fonction réelle d'une variable réelle définie sur l'ensemble $X$, toute application $f$ de $X$ dans $\mathbb{R}$, qui à chaque point $x \in X$ fait correspondre un seul élément $y \in \mathbb{R}$, on note :

$$f: \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x). \end{array}$$

$X$ est l'ensemble de définition de $f$.

**Graphe d'une fonction (courbe représentative) :**

Le graphe d'une fonction $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble $\Gamma(f)$ défini comme suit : $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) / x \in X\}$, $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$.

**Opérations sur les fonctions :**

Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$, alors on définit :

· La somme : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in X$.

· Le produit : $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, $\forall x \in X$.

· Le rapport : $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in X$ et $g(x) \neq 0$.

**Fonction paire et impaire** : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $I$ un intervalle symétrique par rapport à zéro (ie, $\forall x \in I, -x \in I$), alors :

· $f$ est dite paire $\Leftrightarrow \forall x \in I;\ f(-x) = f(x)$.

· $f$ est dite impaire $\Leftrightarrow \forall x \in I;\ f(-x) = -f(x)$.

**Exemple 1.1.** *Cosinus est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, en effet : $cos(-x) = cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Sinus est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$, en effet : $sin(-x) = -sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

**Fonctions périodiques :** $f$ est dite périodique sur son domaine de définition $X \Leftrightarrow \exists P > 0 / \forall x \in X : f(x+P) = f(x)$, avec $x + P \in X$. La plus petite valeur positive de $P$ est appelée : période de $f$.

**Exemple 1.2.** *Les fonctions sinus et cosinus sont $2\pi$-périodiques. La fonction tangente est $\pi$-périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, et $P = 2\pi$ est la période de la fonction cosinus définie sur $\mathbb{R}$.*

**Fonctions bornées :** Rappelons d'abord les notions de fonctions majorées et de fonctions minorées :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $f(I)$ est alors l'ensemble de toutes les valeurs de $f$, alors :

· La fonction $f$ est dite majorée sur $I \iff f(I)$ est majoré, c'est à dire $\exists M \in \mathbb{R}$ : $f(x) \leq M, \forall x \in I$.

· La fonction $f$ est dite minorée sur $I \iff f(I)$ est minoré, c'est à dire $\exists m \in \mathbb{R}$ : $f(x) \geq m, \forall x \in I$.

· La fonction $f$ est dite bornée sur $I \iff f(I)$ est majoré et minoré à la fois, c'est à dire $\exists\ m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in I$. Il convient alors de retenir la caractérisation suivante :

$$f \text{ est bornée} \iff \exists A > 0, \forall x \in I : |f(x)| \leq A.$$

**Exemple 1.3.** *$sin(x)$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.*
*En effet $\forall x \in \mathbb{R}$ : $-1 \leq sin(x) \leq 1$ autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R} : |sin(x)| \leq 1$.*

## 1.1 Fonctions monotones :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $f$ est dite monotone si elle est croissante ou décroissante et on a les définitions suivantes :
· $f$ est croissante si : $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
· $f$ est strictement croissante si : $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
·$f$ est décroissante si : $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
·$f$ est strictement décroissante si : $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

**Limite d'une fonction :**

Définissons d'abord la notion d'un voisinage d'un point

**Définition 1.2.** : Une partie $V(x_0) \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $x_0$ si elle contient un ouvert $]a, b[$ contenant $x_0$.

**Définition 1.3.** On dit qu'une fonction $f$, définie sur $V(x_0)$ sauf peut être au point $x_0$, admet une limite $l$ au point $x_0$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0; \quad \forall x \in V(x_0),\ x \neq x_0; (|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

on dit alors que $f$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $x_0$, et on écrit

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$$

Remarquons que $\eta$ est une constante positive qui dépend en général de $\epsilon$ et de $x_0$.

**Exemple 1.4.** *Montrons que* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (3x - 1) = -1$

On veut avoir $|f(x) - l| = |3x - 1 - (-1)| = |3x| < \epsilon$, ceci est possible dès qu'on a $|x - x_0| = |x - 0| < \frac{\epsilon}{3}$, ici $\eta = \frac{\epsilon}{3}$.
Donc $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta = \frac{\epsilon}{3}, \forall x \neq 0, \quad |x - 0| < \frac{\epsilon}{3} \Longrightarrow |3x - 1 - (-1)| < \epsilon$.

**Remarque 1.1.** $f$ n'admet pas de limite au point $x_0 \Longleftrightarrow \forall l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0; \forall \eta > 0; \exists x$ tel que $0 < |x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - l| \geq \epsilon$.

*Attention* : Si $f$ admet une limite $l$ au point $x_0$, alors cette limite est unique.

**Exemple 1.5.** *Calculons la limite suivante :* $\lim\limits_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$.

Lorsque $x \to 0$, $\sin(\frac{1}{x})$ oscille entre $-1$ et $1$; donc $\lim\limits_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas car elle n'est pas unique.

**Limite à droite, limite à gauche :**

· Pour $x$ tend vers $x_0$ par " les grandes valeurs" , nous définissons la limite de $f$ à droite de $x_0$ par

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = l_d \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \forall x, \quad x_0 < x < x_0 + \eta \Longrightarrow |f(x) - l_d| < \epsilon.$$

·Pour $x$ tend vers $x_0$ par "les petites valeurs", nous définissons la limite de $f$ à gauche de $x_0$ par

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = l_g \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \forall x, \quad x_0 - \eta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - l_g| < \epsilon.$$

**Théorème 1.4.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x)$, $(l = l_g = l_d)$ .

**Exemple 1.6.** *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} |x|$ . *On sait que* $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si : x \geq 0 \\ -x & si : x < 0. \end{cases}$

Calculons la limite à droite de 0 : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} x = 0 = l_d$

à gauche de 0 : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}(-x) = 0 = l_g$,

$$\text{puisque } l_d = l_g = 0 \text{ alors } \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

**Exemple 1.7.** *Soit la fonction* $g$ *définie comme suit :* $g(x) = \begin{matrix} x+1 & si : x \geq 0 \\ x-1 & si : x < 0. \end{matrix}$ *. Etudions sa limite au point* 0. *Nous avons* $l_d = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}(x+1) = 1$ *et* $l_g = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}(x-1) = -1$, *puisque* $l_d \neq l_g$ *alors* $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ *n'existe pas.*

**Limites infinies :** soit $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0 : 0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) > A.$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0 : 0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) < -A.$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 : x > B \Longrightarrow f(x) > A.$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 : x > B \Longrightarrow f(x) < -A.$

# 2 Fonctions continues

## 2.1 Continuité en un point

**Définition 2.1.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $f$ est continue en $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad [|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon]$$

**Continuité à gauche, continuité à droite**

$\cdot f$ , définie en $x_0$ et à droite de $x_0$, est continue à droite de $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{\substack{> \\ x\longrightarrow x_0}} f(x) = f(x_0)$ :

$\cdot f$ , définie en $x_0$ et à gauche de $x_0$,est continue à gauche de $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{\substack{< \\ x\longrightarrow x_0}} f(x) = f(x_0)$

**Remarque 2.1.** Si $\lim\limits_{\substack{> \\ x\longrightarrow x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\longrightarrow x_0}} f(x) = f(x_0)$, c'est la continuité de $f$ au point $x_0$, tout simplement!

**Exemple 2.1.** *Soit à étudier la continuité de* $g$ *au point* 0, *avec :*

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & si : x \geq 0 \\ 1+x & si : x < 0. \end{cases}$$

A gauche de 0 : $l_g = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} (1+x) = 1$
A droite de 0 : $l_d = \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} (1-x) = 1$, et $g(0) = g(1-0) = 1;$
il vient que $l_g = l_d = g(0)$, ce qui assure la continuité de $g$ au point $x_0 = 0$.

**Remarque 2.2.** $f$ est dite discontinue en $x_0$ dans l'un des cas suivants :

$\cdot f$ n'est pas définie en $x_0$ ;
$\cdot \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ existe mais différente de $f(x_0)$ ;
$\cdot \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

**Exemple 2.2.** *Soit à étudier la continuité au point* $x_0 = 0$, *de*

$$f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) & pour\ x \neq 0 \\ 0 & pour\ x = 0. \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ *n'existe pas car elle n'est pas unique ( lorsque* $x \to 0$, $sin(\dfrac{1}{x})$ *oscille entre -1 et 1), de ce fait* $f$ *est discontinue au point* 0.

## 2.2 Continuité sur un intervalle :

**Définition 2.2.** Une fonction définie sur un intervalle $I$ est dite continue sur ce même intervalle si elle est continue en tout point $x_0 \in I$. L'ensemble des fonctions continues sur $I$ est alors noté $C(I)$.

## 2.3 Opérations sur les fonctions continues :

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur le même intervalle $I$, et continues au point $x_0 \in I$, alors :
$\cdot$ Pour $(\alpha \in \mathbb{R})$, la fonction $\alpha f$ est continue au point $x_0$.
$\cdot$ $(f+g)$ est continue en $x_0$, la fonction produit $(fg)$ est aussi continue en $x_0$.
$\cdot$ Si $g(x_0) \neq 0$ , alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en $x_0$.
$\cdot$La fonction $| f |$ est continue en $x_0$.

**Continuité de la fonction composée :**Soient $f$, $g$ deux fonctions telles que $f : I \longrightarrow J$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $I, J \subset \mathbb{R}$.
Si $f$ est continue en $x_0 \in I$ et $g$ est continue en $y_0 = f(x_0) \in J$ . Alors la fonction composée $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$.

## 2.4 Prolongement par continuité :

**Définition 2.3.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur $I$ sauf en $x_0 \in I$. Supposons que $f$ admette une limite $(finie)$, $l$ au point $x_0$, alors la fonction $\tilde{f}$ définie comme suit : ,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in I - \{x_0\} \\ l & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

est continue en $x_0$, et $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de $f$ au point $x_0$.

**Exemple 2.3.** *Soit* $h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *pour* $x \in \mathbb{R}^*$, *notons bien que* $h$ *n'est pas définie au point* $x = 0$, *il est possible de donner un sens à* $h$ *au point* $0$ *à travers son prolongement par continuité, il suffit pour cela que* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} h(x)$ *existe.*
*En effet*

$$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

*Ainsi*

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si : x \neq 0 \\ 0 & si : x = 0. \end{cases}$$

$\widetilde{h}$ *est le prolongement par continuité de* $h$ *au point* $0$.

**Théorème des valeurs intermédiaires** (appelé aussi :théorème de la fonction qui change de signe)

**Théorème 2.4.** *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que :*

$\cdot f$ est continue sur $[a, b]$.
$\cdot f(a).f(b) < 0$
Alors $\exists c \in \,]a, b[$ tel que : $f(c) = 0$.
Si de plus $f$ est strictement monotone sur $[a, b]$, alors $c$ est unique.

**Exemple 2.4.** *Montrons que l'équation* $x^3 + x^2 - x - 5 = 0$, *admet au moins une solution dans* $[-1, 2]$. *Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires* $(T.V.I)$,*à la fonction* $f(x) = x^3 + x^2 - x - 5$, *sur* $[-1, 2]$. $f$ *est polynomiale, elle est donc continue sur* $\mathbb{R}$, *particulièrement sur* $[-1, 2]$. *Nous vérifions aisément que* $f(-1)f(2) < 0$. *Le* $(T.V.I)$ *assure :* $\exists c \in \,]-1, 2[\ /\ f(c) = 0$.

# 3 Fonctions dérivables

**Définition 3.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}.f$ est dérivable en $x_0$ si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et finie.}$$

Cette limite est appelée "dérivée de $f$ au point $x_0$", notée $f'(x_0)$.

## 3.1 Dérivée à gauche, dérivée à droite

$\cdot f$ est dérivable à droite, au point $x_0$ si :

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et finie, alors } \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_d'(x_0) \text{ (dérivée à droite)}$$

$\cdot f$ est dérivable à gauche, au point $x_0$ si

$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et finie, alors } \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_g'(x_0) \text{ (dérivée à gauche)}$$

**Attention** : $f$ est dérivable en $x_0 \Longleftrightarrow f_d'(x_0) = f_g'(x_0) = f'(x_0)$.

**Exemple 3.1.** *Reprenons l'exemple de $f(x) = |x|$, définie sur $\mathbb{R}$. Etudions sa dérivabilité au point $x_0 = 0$. Rappelons que*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

*Le calcul de limites donne : $f_d'(0) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \frac{x-0}{x-0} = 1$, et $f_g'(0) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \frac{-x-0}{x-0} = -1$, comme $f_d'(0) \neq f_g'(0)$ alors $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable au point $0$.*

**Définition 3.2.** Une fonction $f$ définie sur $I$ est dite dérivable sur $I$, si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$. L'application

$$\begin{aligned} f : \ & I \longrightarrow \ \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \ f'(x) \end{aligned}$$

est appelée la fonction dérivée de $f$.

Dérivabilité et continuité :

$f$ est dérivable en $x_0 \Longrightarrow f$ est continue en $x_0$.(La réciproque n'est pas forcément vraie).

## 3.2 Opérations sur les fonctions dérivables :

**Proposition 3.3.** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $(\alpha f), \alpha \in \mathbb{R}$, $f+g$ et $f.g$, sont dérivables en $x_0$. Le rapport $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en $x_0$ si $g(x_0) \neq 0$. De plus :*

*1)* $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

*2)* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

*3)* $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$.

*3)* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$.

## 3.3 Dérivée d'une fonction composée

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ , $f$ dérivable en $x_0 \in I$, et $g$ dérivable en $f(x_0)$. Alors $gof : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0$ et on a $(gof)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$.

## 3.4 Dérivée d'ordre supérieur

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur $I$, alors $f'$ est dite dérivée d'ordre 1 de $f$. Si $f'$ est dérivable sur $I$, alors la dérivée seconde de $f$ notée $f''$ ou $f^{(2)}$ est définie par $f^{(2)} = (f')'$. Ainsi de proche en proche, on définit la dérivée d'ordre $n$ de $f$ par

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \forall n \geq 1, \quad f^{(0)} = f$$

## 3.5 Fonction de classe $C^n$

**Définition 3.4.** On dit qu'une fonction $f$, définie sur $I$ est de classe $C^1(I)$, si elle est dérivable sur $I$ et $f^{'}$ est continue sur $I$. $f$ est dite de classe $C^n(I)$ ou $n$ fois continuement dérivable sur $I$, si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et $f^{(n)}$ est continue sur ce même intervalle.

**Définition 3.5.** On note $C^\infty(I)$ : l'ensemble des fonctions $n$ fois continuement dérivables sur $I, \forall n \in \mathbb{N}$.

**Exemple 3.2.** *Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \to \cos(x)$ sont $C^\infty(\mathbb{R})$, toutes leurs dérivées successives existent et sont continues sur $\mathbb{R}$.*

## 3.6 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

**Théorème 3.6.** ***(Théorème de Rolle)*** *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

$\cdot f$ est continue sur $[a,b]$.
$\cdot f$ est dérivable sur $]a,b[$
$\cdot f(a) = f(b)$. Alors

$$\exists c \in ]a,b[ \text{ tel que } f^{'}(c) = 0$$

**Théorème 3.7.** ***(Théorème des accroissements finis)*** *Soit $f$ $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction vérifiant :*

$\cdot f$ est continue sur $[a,b]$.
$\cdot f$ est dérivable sur $]a,b[$ ; alors

$$\exists c \in ]a,b[ \text{ tel que } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^{'}(c)$$

**Exercice 3.8.** *(continuité/dérivabilité) : Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin(\frac{1}{x}) & pour\ x \neq 0. \\ 0 & pour\ x = 0. \end{cases}$$

*1) Etudiez la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$.*
*2) La fonction dérivée $f^{'}$,si elle existe, est elle continue sur $\mathbb{R}$?*

**Corrigé**

$\cdot$Sur $\mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = x^2 sin(\frac{1}{x})$ est le produit de deux fonctions bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc sur $\mathbb{R} - \{0\}$, $f^{'}(x) = \left(x^2 sin(\frac{1}{x})\right)^{'} = 2x sin(\frac{1}{x}) + x^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)cos(\frac{1}{x})$.
$\cdot$Dérivabilité au point 0 : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x sin(\frac{1}{x}) = 0$,

Par le théorème de l'encadrement des limites, nous avons d'une part : pour $x > 0$ : $-x \leq x sin(\frac{1}{x}) \leq x$; d'autre part pour $x < 0$

$x \leq x sin(\frac{1}{x}) \leq -x$ . Comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(-x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x sin(\frac{1}{x}) = 0$. Ce qui assure la dérivabilité de $f$ en 0. Finalement $f$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, et sa dérivée est donnée par :

$$f^{'}(x) = \begin{cases} 2x sin(\frac{1}{x}) - cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

2) $f^{'}(x)$ est elle continue sur $\mathbb{R}$?
·Sur $\mathbb{R}-\{0\}$, $f^{'}(x)=2xsin(\frac{1}{x})-cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est la somme de fonctions bien définies et continues sur $\mathbb{R}-\{0\}$.
·Au point 0 : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f^{'}(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0} 2xsin(\frac{1}{x})-cos\left(\frac{1}{x}\right)=0-\lim\limits_{x\longrightarrow 0} cos(\frac{1}{x})$; lorsque $x\to 0$ cette limite n'existe pas car elle n'est pas unique.
Finalement $f^{'}$ n'est pas continue en $x=0$. Pour conclure : $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$.

**Règle de l'Hôpital pour le calcul de limites :** Si $h$ et $g$ sont deux fonctions dérivables dans un voisinage de $a$ et si $\dfrac{h^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ admet une limite $l$ au point $a$, alors $\dfrac{h(x)-h(a)}{g(x)-g(a)}$ admet aussi $l$ comme limite au point $a$.

**Exemple 3.3.** *Soit à calculer* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{cos(x)-1}{sin(x)}$;
*Nous avons* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{cos(x)-1}{sin(x)}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ *F.I., utilisons la règle de l'hôpital : avec* $h(x)=cos(x)$, $g(x)=sin(x)$.
*Donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{cos(x)-1}{sin(x)}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{cos(x)-cos(0)}{sin(x)-sin(0)}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\dfrac{cos(x)}{sin(x)}\right)^{'}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{-sin(x)}{cos(x)}=0.$