Université A. Mira - Béjaia **2020/2021**
Faculté de Technologie **MATHS 1**
Département de Technologie: 1$^{\text{ère}}$année

Corrigé T.D. N°4 : Fonctions Réelles

Exercice 1.

Calcul des limites:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{x^2+x} = \frac{0}{0}$ (P.F.I)
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[\ln(2x+1)]'}{[x^2+x]'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2}{2x+1}}{2x+1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{(2x+1)^2} = \mathbf{2}.$ (Régle de l'Hospital)

2) $\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{5x+4}-3} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)\ (\sqrt{x+3}+2)\ (\sqrt{5x+4}+3)}{(\sqrt{5x+4}-3)\ (\sqrt{5x+4}+3)\ (\sqrt{x+3}+2)} = \frac{(x-1)\ (\sqrt{5x+4}+3)}{(5x-5)\ (\sqrt{x+3}+2)} = \frac{(\sqrt{5x+4}+3)}{5\ (\sqrt{x+3}+2)}.$
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{5x+4}-3} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{5x+4}+3)}{5\ (\sqrt{x+3}+2)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}.$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+\sin x}{x^2+1}$

Comme la fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite quand x tend vers $(+\infty)$; on utilise l'encadrement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ -1 \leq \sin x \leq 1$$
$$\iff x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$$
$$\implies \frac{x-1}{x^2+1} \leq \frac{x+\sin x}{x^2+1} \leq \frac{x+1}{x^2+1}$$

Puisque

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \ \text{ alors } \lim_{x\to -\infty} \frac{x+\sin x}{x^2+1} = \mathbf{0}.$$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right) = \infty \times 0 \ \ (P.F.I)$

On pose

$$X = -\frac{1}{x} \Rightarrow x = -\frac{1}{X}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow X \to 0^-$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{X\to 0^-} -\frac{1}{X}\left(e^X-1\right) = -\lim_{X\to 0^-} \frac{e^X-1}{X} = -\lim_{X\to 0^-} e^X = -\mathbf{1}.$$

Exercice 2.

$$f(x)=\frac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\sin x},\quad D_f=\{x\in\mathbb{R},\ \sin x\neq 0\}=\mathbb{R}-\{k\pi/\ k\in\mathbb{Z}\}$$

1 . Montrer que f est prolongeable par continuité en 0

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\sin x}=\frac{0}{0}\quad (P.F.I)$$

En appliquant le théorème de l'Hospital, on trouve

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[(e^x-1)(1-\cos x)\right]'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x(1-\cos x)+\sin x(e^x-1)}{\cos x}=\frac{0}{1}=\mathbf{0}.$

f n'est pas définie en 0 mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0.

2 . On note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en 0 et est défini par:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si}\ \ x\in\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}^*\}\\ 0 & \text{si}\ \ x=0.\end{cases}$$

3 . Montrer que l'équation $f(x)=e^x-1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

On pose $g(x)=f(x)-e^x+1$, $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$. g est continue sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ car $x\mapsto f(x)$ et $x\mapsto -e^x+1$ sont continues sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ (somme de fonctions continues).
Par ailleurs, il est facile de vérifier que

$$g(\frac{\pi}{4})\times g(\frac{3\pi}{4})<0$$

Donc d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires $\exists\ \alpha\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[\ /\ g(\alpha)=0$.
ou encore $\exists\ \alpha\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[\ /\ f(\alpha)=e^\alpha-1$.

Exercice 3.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R}^+$ et $f(0)=0$.

1 . Montrer que f est continue à droite en $x_0=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0\times\infty\quad (P.F.I)$
On pose

$$X=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{X}$$

$$x\to 0^+\Rightarrow X\to +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(1+X)}{X^2}$$
$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+X}}{2X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{2X(1+X)} = 0 = f(0), \quad \text{(Hospital)}.$$

D'où f est continue à droite en $x_0 = 0$.

2 . f est elle de classe C^1 sur $\left[0;+\infty\right[$?

• f est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ car sur $\left]0;+\infty\right[$, f est le produit et la composée de fonctions dérivables.
• En $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 0$.

Conclusion: f est dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$.

La fonction dérivée de f est:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+\frac{1}{x}} & \text{si } \ x>0 \\ 0 & \text{si } \ x=0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} & \text{si } \ x>0 \\ 0 & \text{si } \ x=0 \end{cases}$$

• Continuité de f' sur $\left[0;+\infty\right[$.

Sur $\left]0;+\infty\right[$, f' est la somme de deux fonctions continues sur $\left]0;+\infty\right[$

$$x \mapsto 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto -\frac{x}{x+1}$$

donc f' est continue sur $\left]0;+\infty\right[$.

Par ailleurs:

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x+1}\right] = 0 = f'(0)$.

Donc f' est continue à droite en $x_0 = 0$; d'où f' est continue sur $\left[0;+\infty\right[$.

Conclusion: f est de classe C^1 sur $\left[0;+\infty\right[$.

Exercice 4.

1 . En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan x > x$$

Soit $f(x) = \tan x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. On a $f(0) = 0$.

f est continue et dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 1$.

On a donc f croissante et $f(x) \geq f(0)$.

Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On a

- f est continue sur $\left[0; x\right]$.
- f est drivable sur $\left]0; x\right[$.

D'après le théorème des accroissement finis (T.A.F),

$$\exists\ c \in]0; x[\ \ /\ f(x) - f(0) = (x - 0) \times f'(c)$$

autrement dit

$$\exists\ c \in]0; x[\ \ /\ \tan x = x\left(1 + \tan^2 c\right) > x.$$

Finalement, $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \tan x > x$.

2 . Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$; en utilisant le théorème de Rolle, démontrer qu'il existe $x \in]0; 1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 - (a + b + c)t$$

On a f est continue sur $\left[0; 1\right]$, dérivable sur $\left]0; 1\right[$ et telle que $f(0) = 0 = f(1)$.

En vertu du théorème de Rolle $\exists\ x \in \left]0; 1\right[$ tel que $f'(x) = 0$

ou encore $\exists\ x \in \left]0; 1\right[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.