VI/ Relation entre les s.e propres de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$

Proposition

Les matrice $V = {}^t\tilde{X} D_p \tilde{X}$ et $\tilde{X}\,{}^t\tilde{X} D_p$ ont les mêmes vps

Preuve.

Soit λ une vp de V associée au $\vec{vp}$ u

On a $Vu = \lambda u$

$${}^t\tilde{X} D_p \tilde{X} u = \lambda u$$

$$\tilde{X}\,{}^t\tilde{X} D_p \tilde{X} u = \tilde{X} \lambda u$$

$$(\tilde{X}\,{}^t\tilde{X} D_p)(\tilde{X} u) = \lambda (\tilde{X} u)$$ λ vp de $\tilde{X}\,{}^t\tilde{X} D_p$ associée au $\vec{vp}$ $\tilde{X}u$

De même on montre qu'une vp de $\tilde{X}\,{}^t\tilde{X} D_p$ est aussi vp de V.

Proposition

On note par u $\vec{vp}$ de V associé à la vp λ et par s le $\vec{vp}$ de $\tilde{X}\,{}^t\tilde{X} D_p$ associé à la même vp λ. On a

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^t\tilde{X} D_p s & (1) \\ s = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\tilde{X} u & (2) \end{cases}$$

Preuve.

Pour montrer (1), on montre que $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^t\tilde{X} D_p s\right)$ est un $\vec{vp}$ de V et $\left\|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^t\tilde{X} D_p s\right\|_{D_p} = 1$

$$V.\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^t\tilde{X} D_p s\right) = ({}^t\tilde{X} D_p \tilde{X})\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^t\tilde{X} D_p s\right)$$
$$= {}^t\tilde{X} D_p \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\tilde{X}\,{}^t\tilde{X} D_p s\right)$$
$$= {}^t\tilde{X} D_p \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \lambda s\right) = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^t\tilde{X} D_p s\right) \quad \text{CQFd}$$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^t\tilde{X} D_p s\right\|^2_{D_p} = {}^t\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^t\tilde{X} D_p s\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,{}^t\tilde{X} D_p s\right) = \frac{1}{\lambda}\,{}^t s D_p (\tilde{X}\,{}^t\tilde{X} D_p s)$$
$$= \frac{1}{\cancel{\lambda}}\,{}^t s D_p \cancel{\lambda} s = {}^t s D_p s = \|s\|^2_{D_p} = 1.$$

(2) se démontre de la même façon.

VI/ Représentation simultanée des individus et variables sur les axes factoriels

VI.1/ Cas où on se place sur $(\mathbb{R}^p, I_p)$

a/ Représentation des individus sur les axes factoriels Δu

chaque individu ${}^t\tilde{X}_i$ est projeté sur Δu en w_i

avec $w_i = \tilde{X}_i u$

$$\boxed{w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \tilde{X} u}$$

b/ Représentation des variables sur les axes factoriels Δu

chaque variable $\tilde{X}^j$ est projetée sur Δs en v^j avec

$$v^j = {}^t\tilde{X} D_p s = {}^t\tilde{X} D_p \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tilde{X} u\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left({}^t\tilde{X} D_p \tilde{X} u\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\lambda u) = \sqrt{\lambda}\, u$$

$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \end{pmatrix}$ alors $\boxed{v^j = \sqrt{\lambda}\, u_{j^{ème}\ compo}}$

VI.2/ Cas où on se place sur $(\mathbb{R}^n, D_p)$

a/ Représentation des individus sur les axes factoriels Δs

chaque individu est projeté sur Δu en $w_i = \tilde{X}_i u$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \tilde{X} u = \tilde{X}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} {}^t\tilde{X} D_p s\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\tilde{X}\, {}^t\tilde{X} D_p s\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\lambda s)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} w = \sqrt{\lambda}\, s \\ w_i = \sqrt{\lambda}\, s_{i^{e}\ compo} \end{array}}$$

b/ Représentation des variables sur les axes factoriels Δs.

chaque variable $\tilde{X}^j$ est projetée sur Δs en $\boxed{v^j = {}^t\tilde{X}^j D_p s}$

$$\boxed{v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v^p \end{pmatrix} = {}^t\tilde{X} D_p s}$$

VII/ Aide à l'interprétation

VII.1) Inertie : Inertie expliquée par un axe factoriel Δu_l ou Δs_l est : $I_l = \dfrac{\lambda_l}{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k}$ (En utilise généralement $I_l \times 100$ %)

Cette quantité mesure la qualité globale de représentation sur l'axe c'est en fait le pourcentage d'information recueilli sur l'axe

VI. 2 / Contributions

a) Contribution des individus.

Déf 1 : Contribution absolue

On appelle contribution absolue d'un individu pour la construction de l'axe factoriel Δu (ou Δu) la quantité :

$$Ca(i) = p_i \frac{|w_i|^2}{\lambda}$$

Cette quantité mesure la part du $i^{ème}$ individu pour construire l'axe.

Proposition

$$\sum_{i=1}^{n} Ca(i) = 1$$

Preuve

$$\sum_{i=1}^{n} Ca(i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{|w_i|^2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} p_i w_i^2 = \frac{1}{\lambda} w^t D_p w$$

$$= \frac{1}{\lambda} Var(w) = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda = 1$$

. La contribution absolue du $i^{ème}$ individu pour la construction du s.e. principal $(\Delta u_1, \dots, \Delta u_\ell)$ $\ell = 1, \dots, q$ est :

$$Ca^{1,\dots,\ell}(i) = Ca^{(1)}(i) + \dots + Ca^{(\ell)}(i) = p_i \frac{|w_i^{(1)}|^2}{\lambda_1} + \dots + p_i \frac{|w_i^{(\ell)}|^2}{\lambda_\ell}$$

. La contribution absolue de deux individus i_1 et i_2 pour la construction de l'axe Δu est :

$$Ca(i_1, i_2) = Ca(i_1) + Ca(i_2)$$

Rq : $0 \leq Ca(i) \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$

Déf 2 : Contribution relative.

La contribution relative d'un individus pour la construction de l'axe factoriel Δu est donnée par :

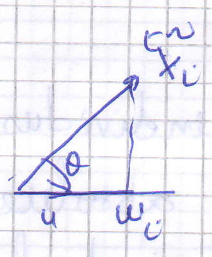
$$Cr(i) = \frac{|w_i|^2}{\|X_i\|^2_{I_p}}$$

Cette quantité mesure la qualité de représentation du $i^{ème}$ individu pour construire l'axe Δu (ou Δs)

Rq $\forall i = 1, \dots, n$

$0 \leq C_r(i) \leq 1$

$C_r(i) = \cos^2 \theta$



La contribution relative du $i^{\text{ème}}$ individu pour la construction de deux axes Δu_l et $\Delta u_{l'}$ est

$$C_r^{l,l'}(i) = C_r^{l}(i) + C_r^{l'}(i) = \frac{|w_i^{(l)}|^2}{\|\tilde{x}_i\|^2_{I_p}} + \frac{\|w_i^{(l')}\|^2}{\|\tilde{x}_i\|^2_{I_p}}$$

La contribution relative de deux individus i_1 et i_2 pour construire l'axe Δu est

$$C_r^{i_1, i_2}(i_1, i_2) = C_r(i_1) + C_r(i_2)$$

b/ Contribution des variables.

Déf 1 : Contribution absolue

La contribution absolue d'une variable j pour la construction de l'axe est

$$C_a(j) = \frac{|v_j|^2}{\lambda}$$

La contribution absolue de la $j^{\text{ème}}$ variable pour la construction de deux axe Δu_l et $\Delta u_{l'}$ est :

$$C_a^{(l,l')}(j) = C_a^{(l)}(j) + C_a^{(l')}(j)$$

La contribution absolue de deux variables j_1 et j_2 pour la construction de l'axe est

$$C_a(j_1, j_2) = C_a(j_1) + C_a(j_2)$$

Proposition

$$\sum_{j=1}^{p} C_a(j) = 1$$

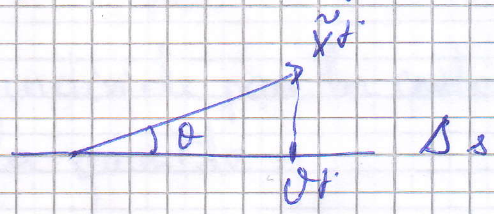
Preuve voir cas des individus

Cette quantité mesure la part de participation de la variable à la construction.

Déf 2 : Contribution relative.

La contribution relative de la $j^{ème}$ variable pour construire l'axe Δu est :

$$C_r(j) = \frac{(v_j)^2}{\|{}^t\tilde{X}^j\|^2_{D_p}} = \cos^2\theta$$



La contribution relative de la $j^{ème}$ variable pour la construction de deux axes Δu_ℓ et $\Delta u_{\ell'}$ est

$$C_r^{(\ell,\ell')}(j) = C_r^{(\ell)}(j) + C_r^{(\ell')}(j)$$

La contribution relative de deux variables j_1 et j_2 pour la construction de l'axe Δu

$$C_r(j_1, j_2) = C_r(j_1) + C_r(j_2)$$

Rq : La contribution relative mesure la qualité de représentation sur les axes principaux.

$\forall j = \overline{1,p} \qquad 0 \leq C_r(j) \leq 1$