

Corrigé de la série de T.D. N°3

Exercice 1. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application ; $A, B \subset E$ et $C, D \subset F$. Montrons que

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

On suppose que $A \subset B$ et on montre que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\implies \exists x \in A : y = f(x) \\ &\implies \exists x \in B : y = f(x) \text{ car } A \subset B \\ &\implies y \in f(B). \end{aligned}$$

D'où $f(A) \subset f(B)$.

2. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Soit $x \in f^{-1}(C \cap D)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff f(x) \in (C \cap D) \\ &\iff f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \\ &\iff x \in [f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)]. \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 2. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x^2 + x - 2. \end{aligned}$$

a. La définition de $f^{-1}(\{4\})$ est :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{4\}) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{4\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 = 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 6 = 0\}. \end{aligned}$$

On calcule $f^{-1}(\{4\})$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{4\}) &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 6 = 0\} (\Delta = 25) \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x = -3 \text{ ou } x = 2\} \\ &= \{-3, 2\}. \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(\{4\}) = \{-3, 2\}$.

b. La bijectivité de f :

f est bijective $\iff f$ est injective et f est surjective

i) f est injective ?

Méthode 1 :

$f(-3) = f(2) = 4$ mais $-3 \neq 2$. Donc

$\exists x_1 = -3 \in \mathbb{R}, \exists x_2 = 2 \in \mathbb{R} / f(x_1) = f(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$.

Par suite, f n'est pas injective.

Méthode 2 :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} / f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2?$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies x_1^2 + x_1 - 2 = x_2^2 + x_2 - 2 \\ &\implies x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 = 0 \\ &\implies (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 0 \\ &\implies (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2) + 1] = 0 \\ &\implies \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 = -1 - x_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc f n'est pas injective.

ii) f est surjective ?

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ? x \in \mathbb{R} / y = f(x).$$

On a

$$y = f(x) \implies y = x^2 + x - 2 \tag{1}$$

$$\implies x^2 + x - (2 + y) = 0, \quad (\Delta = 9 + 4y). \tag{2}$$

Si $\Delta < 0 : y \in \left] -\infty, -\frac{9}{4} \right[$, l'équation (1) n'admet pas de solutions. Donc f n'est pas surjective sur \mathbb{R} .

Finalement, f n'est pas bijective sur \mathbb{R} .

c. La définition de $f([-1, 1])$:

$$f([-1, 1]) = \{f(x) / x \in [-1, 1]\}.$$

On calcule $f([-1, 1])$:

on a $f(x) = x^2 + x - 2$ et $f'(x) = 2x + 1$.

$$f'(x) = 0 \implies x = -\frac{1}{2}.$$

Si $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$, la fonction f est décroissante. Alors

$$f([-1, -\frac{1}{2}]) = [f(-\frac{1}{2}), f(-1)] = [-\frac{9}{4}, -2]$$

Si $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, la fonction f est croissante. Alors

$$f([-\frac{1}{2}, 1]) = [f(-\frac{1}{2}), f(1)] = [-\frac{9}{4}, 0].$$

Donc

$$f([-1, 1]) = [-\frac{9}{4}, -2] \cup [-\frac{9}{4}, 0] = [-\frac{9}{4}, 0].$$

d. La définition de $f^{-1}([-2, 4])$:

$$\begin{aligned} f^{-1}([-2, 4]) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [-2, 4]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \in [-2, 4]\} \end{aligned}$$

On calcule $f^{-1}([-2, 4])$:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 \in [-2, 4] &\iff -2 \leq x^2 + x - 2 \leq 4 \\ &\iff \begin{cases} x^2 + x - 2 \leq 4 \dots (1) \\ \text{et} \\ x^2 + x - 2 \geq -2 \dots (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &\iff x^2 + x - 2 \leq 4 \\ &\iff x^2 + x - 6 \leq 0 \\ &\iff (x - 2)(x + 3) \leq 0 \\ &\iff x \in ([-3, 2]). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &\iff x^2 + x - 2 \geq -2 \\ &\iff x^2 + x \geq 0 \\ &\iff x(x + 1) \geq 0 \\ &\iff x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}([-2, 4]) = ([-3, 2]) \cap (]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[) = [-3, -1] \cup [0, 2]$.

Exercice 3. On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{-2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x+2}. \end{aligned}$$

1. On calcule $f^{-1}(\{1\})$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{x \in \mathbb{R} - \{-2\} / f(x) \in \{1\}\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{-2\} / \frac{x+1}{x+2} = 1 \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{-2\} / x+1 = x+2\} \\ &\quad \{x \in \mathbb{R} - \{-2\} / 1 = 2\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

2. On étudie l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f .

i) l'injectivité de f .

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-2\} / f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2?$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-2\} : f(x_1) = f(x_2)$. On a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies \frac{x_1 + 1}{x_1 + 2} = \frac{x_2 + 1}{x_2 + 2} \\ &\implies (x_1 + 1)(x_2 + 2) = (x_2 + 1)(x_1 + 2) \\ &\implies 2x_1 - x_1 + 2x_2 - x_2 = 0 \\ &\implies x_1 - x_2 = 0 \\ &\implies x_1 = x_2. \end{aligned}$$

D'où f est injective.

ii) La surjectivité de f .

on a $y = 1$ n'a pas d'antécédent, alors f n'est pas surjective.

iii) La bijectivité de f .

f est injective et f n'est pas surjective donc f n'est pas bijective.

3. On donne l'ensemble J pour lequel la fonction $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow J$ soit bijective.

$$f \text{ est bijective} \iff \forall y \in J, \exists x! \in \mathbb{R} - \{-2\} / y = f(x)$$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\implies y = \frac{x + 1}{x + 2} \\ &\implies x + 1 = y(x + 2) \\ &\implies x = \frac{2y - 1}{1 - y} \end{aligned}$$

$$\exists x = \frac{2y - 1}{1 - y} \in \mathbb{R} - \{-2\} \text{ unique si } y \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

Donc

$$f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\} \text{ est bijective.}$$

4. On détermine l'application réciproque f^{-1}

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\} \\ y &\longrightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y - 1}{1 - y}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soient les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g(x) = 2 - x \end{aligned}$$

1. On calcule $f \circ g$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{f \circ g}$$

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) \end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(2 - x) = -5x + 12.$$

On calcule $g \circ f$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{g \circ f}$$

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(5x + 2) = -5x.$$

2. Bijectivité de $g \circ f$:

Méthode 1 :

i) $g \circ f$ est injective : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \implies x_1 = x_2$?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. On a

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\implies -5x_1 = -5x_2 \\ &\implies x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Donc $(g \circ f)$ est injective.

ii) $g \circ f$ est surjective :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = (g \circ f)(x)$$

Soit $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y = (g \circ f)(x) &\implies y = -5x \\ &\implies x = -\frac{1}{5}y. \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = -\frac{1}{5}y \in \mathbb{R} : y = (g \circ f)(x).$$

D'où, $g \circ f$ est surjective.

Finalement,

$g \circ f$ est surjective et injective donc elle est bijective.

Méthode 2 :

$$g \circ f \text{ est bijective} \iff \forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R} : y = (g \circ f)(x)$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. On a

$$y = (g \circ f)(x) \implies y = -5x \implies x = -\frac{1}{5}y$$

Donc, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = -\frac{1}{5}y \in \mathbb{R}$ solution unique de $y = (g \circ f)(x)$.

Finalement, $g \circ f$ est bijective.