République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ABDERAHMANE MIRA BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique
Licence 2 à Recrutement National

MODULE :

Analyse Mathématiques 3

Année universitaire 2020-2021

TD_3- Analyse Mathématique 3

Exercice 1. *Donner l'expression des dérivées partielles des fonctions suivantes après avoir déterminé leurs domaines de définition*

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$
2. $g(x,y) = \log \dfrac{x+y}{x-y}$
3. $h(x,y) = y \sin x + \cos(x+y)$
4. $k(x,y) = xye^{x+2y}$
5. $l(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

Exercice 2. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\log\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$;*
2. *Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$ de deux manières différentes.*
3. *La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?*

Exercice 3. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$;*
2. *Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$ de deux manières différentes.*
3. *La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?*

Exercice 4. *Soit f la fonction vectorielle définie par* $f(x,y) = (xy \sin \dfrac{1}{x}, \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})$

1. *Donner le domaine de définition de f.*
2. *Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$ en donnant son prolongement $\widehat{f}$.*
3. *Etudier la différentiabilité de $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}^2$.*
4. *Soit g la fonction définie par $g(x,y) = (x+y, xy)$.*
   (a) *Donner le domaine de définition de $g \circ \widehat{f}$.*
   (b) *Montrer que $g \circ \widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
   (c) *Etudier la différentiabilité de $g \circ \widehat{f}$.*
   (d) *Calculer par deux méthodes la différentielle de $g \circ \widehat{f}$ au point $(1,0)$.*

Solution

exo 1

Donner l'expression des dérivées partielles des fonctions suivantes après avoir déterminé leurs domaines de définition

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$
   $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x,y), x = -y\}$
   Pour $(x,y) \in D_f$,
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{yx + y^2 - xy}{(x+y)^2} = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}$.
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^2 + xy - xy}{(x+y)^2} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}$.
2. $g(x,y) = \log \dfrac{x+y}{x-y}$
   $D_g = \{(x,y), x > -y\} \cap \{(x,y), x > y\}$
   Pour $(x,y) \in D_g$,
   $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-2y}{x^2 - y^2}$;
   $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2x}{y^2 - x^2}$.
3. $h(x,y) = y\sin x + \cos(x+y)$
   $D_g = \mathbb{R}^2$
   Pour $(x,y) \in D_h$,
   $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = y\cos x - \sin(x+y)$;
   $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \sin x - \sin(x+y)$.
4. $k(x,y) = xye^{x+2y}$
   $D_k = \mathbb{R}^2$
   Pour $(x,y) \in D_k$,
   $\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y) = ye^{x+2y} + xye^{x+2y}$;
   $\dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y) = xe^{x+2y} + 2xye^{x+2y}$.
5. $l(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
   $D_l = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x \neq y\}$
   Pour $(x,y) \in D_l$,
   $\dfrac{\partial l}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$;
   $\dfrac{\partial l}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$.

exo 2

Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\log\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Pour* $(x,y) \neq (0,0)$, *la fonction f est une composition de fonctions continues donc elle est continue.*
   Pour $(x,y) = (0,0)$, *et en utilisant les coordonnées polaires, on a*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} r^2 \log\frac{1}{r} = f(0,0) = 0.$$

la limite au point $(0,0)$ *coïncide avec l'image de* f *en ce même point , donc* f *est continue au point* $(0,0)$ *et par conséquent elle est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

2. *etude de la différentiabilité de* f.
   Méthode 1 :
   Pour $(x,y) \neq (0,0)$*, la fonction* f *est une composition de fonctions différentiable, donc elle est différentiable.*
   Pour $(x,y) = (0,0)$*, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \log \frac{1}{|h|} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \log \frac{1}{|h|} = 0.$$

   Ainsi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\log\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

   En utilisant les coordonnées polaires, on trouve ;

$$\lim_{r\to 0} r\log\frac{1}{r} = 0.$$

   Il en résulte que f *est différentiable au point* $(0,0)$*. Par conséquent,* f *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$.
   Méthode 2 :
   Les dérivées partielles de f *sont :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\log\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] - x\sqrt{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\log\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] - y\sqrt{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

   On peut vérifier facilement que les dérivées partielles de f *sont continues sur* $\mathbb{R}^2$*. Ceci veut dire que la fonction* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et donc elle différentiable sur* $\mathbb{R}^2$.

3. *Oui, d'après la deuxième question, la fonction* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$

exo 3 *Soit* f *la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. *Pour* $(x,y) \neq (0,0)$*, la fonction* f *est une composition de fonctions continues donc elle est continue.*
   Au point $(x,y) = (0,0)$*, et en utilisant le Théorème des Gendarmes, on a*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, -(x^2+y^2) \leq f(x,y) \leq x^2+y^2.$$

Le passage à la limite donne

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(-x^2-y^2)=0\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0.$$

Ceci implique,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$$

et donc f est continue au point $(0,0)$. D'où la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

2. *L'étude de la différentiabilité de f.*
   Méthode 1 :
   Pour $(x,y)\neq(0,0)$, la fonction f est une composition de fonctions différentiables, donc elle est différentiable.
   Pour $(x,y)=(0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{|h|}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{|h|}=0.$$

Donc

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

En utilisant le Th. des Gendarmes, on a ;

$$\lim_{r\to 0} r\sin\frac{1}{r}=0.$$

Il en résulte que f est différentiable au point $(0,0)$. Par conséquent, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
Méthode 2 :
Les dérivées partielles de f sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} 2x\sin\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]-x\cos\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \ si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} 2y\sin\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]-y\cos\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \ si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

On peut vérifier facilement que les dérivées partielles de f sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Ceci veut dire que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et donc elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

3. *Oui, d'après la deuxième question, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$*

exo 4

Soit f la fonction vectorielle définie par $f(x,y)=(xy\sin\frac{1}{x},\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})$

1. *Donner le domaine de définition de f.*
   On a $f(x,y) = (xy\sin\frac{1}{x}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, *donc* $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$.
   $D_{f_1} = \{(x,y)/x \neq 0\}$ *et* $D_{f_2} = \{(x;y)$ *tel que* $(x,y) \neq (0,0)\}$. *Ainsi* $D_f = \{(x,y), x \neq 0\}$, *c'est à dire* D_f *est tout le plan excepté l'axe des ordonnées.*
2. *Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$ en donnant son prolongement $\widehat{f}$.*
   Il s'agit de montrer que f admet une limite en tout point $(0,y_0)$ pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$.
   Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} xy\sin\frac{1}{x} = 0 \text{ (Th. des Gendarmes)}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ (Coordonnée polaires)}.$$

   Il en résulte que

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} (xy\sin\frac{1}{x}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}) = (0,0)$$

   Ainsi la fonction $\widehat{f}$ définie par

$$\widehat{f}(x,y) = \begin{cases} (xy\sin\frac{1}{x}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}) \text{ si } x \neq 0 \\ (0,0) \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

   est le prolongement de la fonction f sur tout le plan.
3. *Etudier la différentiabilité de $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}^2$.*
   Par définition, la fonction $\widehat{f} = (f_1, f_2)$ est différentiable si et seulement si les fonctions f_1 et f_2 le sont aussi.
   Pour $x \neq 0$, les fonctions f_1 , f_2 sont différentiables, car chacune des deux est une composition de fonctions différentiables.
   Etudions maintenant la différentiabilité au point $(0,y_0), y_0 \in \mathbb{R}^2$,
   Pour la fonction f_1,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(h,0) - f_1(0,y_0)}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(0,h) - f_1(0,y_0)}{h} = 0.$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_1(h,k) - f_1(0,y_0) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,y_0)h - \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,y_0)k}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk\sin\frac{1}{h}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

   En utilisant les coordonnées polaires, on trouve que cette limite est nulle, donc f_1 est différentiable au point $(0,y_0)$ pour tout y_0 ;
   Pour la fonction f_2,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_2(h,0) - f_2(0,y_0)}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_2(0,h) - f_2(0,y_0)}{h} = 0.$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_2(h,k)-f_2(0,y_0)-\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,y_0)h-\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,y_0)k}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2}.$$

En utilisant les coordonnées polaires, on trouve

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} = \lim_{r\to 0} \cos\theta\sin\theta.$$

Cette limite n'existe pas, car elle dépend de θ. Ainsi f_2 n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent $\widehat{f}$ n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

4. *Soit g la fonction définie par $g(x,y)=(x+y,xy)$.*
   (a) *Donner le domaine de définition de $g\circ\widehat{f}$. On a*

$$go\widehat{f}(x,y) = \begin{cases} (xy\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x^2y^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}) \text{ si } x\neq 0 \\ (0,0) \text{ si } x=0. \end{cases}$$

   Donc le domaine de définition de $go\widehat{f}$ est $\mathbb{R}^2$.

   (b) *Montrer que $g\circ\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Il est claire que $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On a aussi $g=(g_1,g_2)$ continue, car g_1 et g_2, qui sont des polynômes, sont continues. Ainsi $go\widehat{f}$ est une composition de deux fonctions continues, donc elle est continue.*

   (c) *Etudier la différentiabilité de $g\circ\widehat{f}$.*
   Posons $h=g\circ\widehat{f}$
   Pour tout point (x,y) avec $x\neq 0$, la fonction $go\widehat{f}$ est une composition de fonctions différentiables donc elle est différentiable.
   Pour $y_0\in\mathbb{R}$, on a vue que la fonction $f_2(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ n'est pas différentiable au point $(0,y_0)$, donc la fonction $h_1=f_1+f_2$ ne peut pas être différentiable en ce point, et donc $h=go\widehat{f}$ n'est pas différentiable en ce dernier. Par conséquent, le domaine de différentiabilité de $g\circ\widehat{f}$ est tout le plan excepté l'axe des ordonnées.

   (d) *Calculer par deux méthodes la différentielle de $g\circ\widehat{f}$ au point $(1,0)$.*
   Méthode 1 : On sait, par définition, que la différentielle de $go\widehat{f}$ en un point (x,y) est égale à la composition de celle de $\widehat{f}$ au point (x,y) par celle de g au point $(\widehat{f}(x,y)$, c'est à dire $D(go\widehat{f})_{(1,0)} = Dg(\widehat{f}_{(0,1)})oD\widehat{f}_{(1,0)}$.
   La matrice jacobienne de $\widehat{f}=(f_1,f_2)$ au point $(1,0)$ est :

$$Jac_{\widehat{f}}(1,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{x}(1,0) & \dfrac{\partial f_1}{y}(1,0) \\ \dfrac{\partial f_2}{x}(1,0) & \dfrac{\partial f_2}{y}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La matrice jacobienne de $g(x,y)=(x+y,xy)$ au point $\widehat{f}(1,0)=(0,0)$ est

$$Jac_g(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{x}(0,0) & \dfrac{\partial g_1}{y}(0,0) \\ \dfrac{\partial g_2}{x}(0,0) & \dfrac{\partial g_2}{y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, la différentielle de $go\widehat{f}$ au point $(1,0)$ est :

$$D(go\widehat{f})_{(1,0)}(x,y) = Dg(\widehat{f}_{(0,1)})o\widehat{f}_{(1,0)}(x,y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sin 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ((1+\sin 1)y, 0)$$

Méthode 2 :
La jacobienne de $go\widehat{f}$ *au point* $(1,0)$ *est*

$$Jac_{go\widehat{f}}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1+\sin 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$D(go\widehat{f})_{(1,0)}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1+\sin 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ((1+\sin 1)y, 0)$$