Université A.Mira de Bejaia
Faculté des Science Exactes
Département d'Informatique
1ère année Licence
Module : Analyse 1

Année universitaire 2020/2021

Corrigé de la série de TD N°2

Exercice N°1

On doit montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n-1}{2n+1} = 2$
En appliquant la définition de la convergence suivante :

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : \Big|U_n - l\Big| < \varepsilon \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

On obtient :

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : \left|\dfrac{4n-1}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon$, (le problème est de trouver la valeur du rang n_0).

$$\left|\frac{4n-1-4n-2}{2n+1}\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{-3}{2n+1}\right| < \varepsilon \Longrightarrow \frac{3}{2n+1} < \varepsilon$$

$$3 < 2n\varepsilon + \varepsilon \Longrightarrow \frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon} < n \Longrightarrow n > \frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon} \Longrightarrow \exists\ n_0\ tel\ que\ n_0 = E\left(\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}\right) + 1$$

D'où $\forall\ n > n_0, |U_n - 2| < \varepsilon \Longleftrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2}$.

Exercice N°2

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\quad V_n = \frac{U_0 + U_1 + \ldots + U_n}{n+1}$$

1. **Montrons que si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.**

   $\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0\ tel\ que\ n > n_0$ alors $|U_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned}
|V_n - l| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U_k - l\right| \\
&= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U_k - \frac{n+1}{n+1}\ l\right| \\
&= \left|\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} U_k - \sum_{k=0}^{n} l\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (U_k - l)\right| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \Big|U_k - l\Big|\ (inégalite\ triangulaire)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|U_k-l\right| &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|U_k-l| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}|U_k-l| \\ &< \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|U_k-l| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n_0}|U_k-l| \textit{ est une expression qui ne dépend pas de } n \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|U_k-l| = 0$$

Alors

$$\exists\, n_1 \geq n_0 \textit{ tel que pour } n > n_1,\ \left|\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}\left|U_k-l\right|\right)-0\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors $\left|V_n-l\right| = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\left|U_k-l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \left|V_n-l\right| < \varepsilon$.

On a montré que $\forall\varepsilon>0, \exists\, n_1\in\mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n\in\mathbb{N}, n>n_1, \left|V_n-l\right|<\varepsilon$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l}$.

La réciproque est-elle vraie ?
La réciproque est : si (U_n) diverge alors (V_n) aussi diverge.

Pour $U_n = (-1)^n, n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}U_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \begin{cases}0, & \textit{si } n \textit{ impair}\\ 1, & \textit{sinon}\end{cases}$$

Donc $V_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k$
(U_n) est divergente car

$$\lim_{n\to\infty}U_n = \begin{cases}-1, & \textit{si } n \textit{ est impair}\\ 1, & \textit{si } n \textit{ est pair}\end{cases}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty}V_n = \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}*0 = 0, & \textit{si } n=2k+1\ (n \textit{ impair})\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}*1 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0, & \textit{si } n=2k\ (n \textit{ pair})\end{cases}$$

Donc $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ce qui veut dire que (V_n) est convergente.
On a montrer que même si (U_n) diverge, (V_n) converge, alors $\boxed{\text{La réciproque est fausse}}$.

2. **Montrons que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée**

Par définition : (U_n) *est bornée* $\Longrightarrow \exists\, M$ *tel que* $|U_n| \leq M$

$$
\begin{aligned}
On\ a:\ |V_n| &= \frac{1}{n+1}\Big|\sum_{k=0}^{n} U_k\Big| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |U_k| \ (\textit{inégalité triangulaire}) \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} M \\
&\leq \frac{1}{n+1}(n+1)M \\
&\leq M
\end{aligned}
$$

Puisque $|V_n| \leq M \Longrightarrow (V_n)$ est majorée $\big($elle est minorée aussi car $|V_n| \leq M \Longleftrightarrow -M \leq V_n \leq M\big)$, donc $\boxed{\textit{la suite } (V_n) \textit{ est bornée}}$.

La réciproque est-elle vraie ?
La réciproque est : si (U_n) n'est pas bornée alors (V_n) aussi n'est pas bornée.

Soit (U_n) définie par :

$$U_n = (-1)^n\ E\Big(\frac{n}{2}\Big) = \begin{cases} p & , \ si\ n = 2p \\ -p & , si\ n = 2p+1 \end{cases} \qquad p \in \mathbb{N}$$

Avec $E\Big(\dfrac{n}{2}\Big)$ est la fonction parie entière de $\dfrac{n}{2}$:

$$E\Big(\frac{n}{2}\Big) = \begin{cases} E\Big(\dfrac{2p}{2}\Big) = E(p) = p, & si\ n = 2p \\ \\ E\Big(\dfrac{2p+1}{2}\Big) = E\Big(p + \dfrac{1}{2}\Big) = p, & si\ n = 2p+1 \end{cases} \qquad p \in \mathbb{N}$$

$(U_{2p}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ donc (U_n) n'est pas bornée.

— Si n est impair : $V_n = 0 \times E(\frac{n}{2}) = 0$ car le nombre de fois que -1 se répète est le même que le nombre de fois que 1 se répète $\Big($exemple : pour n=5 on aura 1-1+1-1+1-1=0$\Big)$.

— Si n est pair : le nombre de fois que le 1 se répète est plus grand d'une unité que celui de -1 $\Big($exemple pour n=4 : 1-1+1-1+1=1, le 1 se répète 3 fois et le -1 se répète 2 fois$\Big)$, alors $(-1)^n E(\dfrac{n}{2}) = 1 \times E(\dfrac{n}{2}) = \dfrac{n}{2}$

Donc $\quad V_n = \dfrac{1}{n+1}\ U_n = \dfrac{n}{2(n+1)} \Longrightarrow V_n \leq \dfrac{n+1}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2}$
Donc (V_n) est bornée.

On a montré que (U_n) n'est pas bornée mais (V_n) est bornée, donc $\boxed{\text{La réciproque est fausse}}$.

3. **Montrer que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante**

Si (U_n) est croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
V_{n+1} - V_n =& \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} U_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U_k \\
=& \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left[(n+1)\sum_{k=0}^{n+1} U_k - (n+2)\sum_{k=0}^{n} U_k\right] \\
=& \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left[(n+1)\left(\sum_{k=0}^{n} U_k + U_{n+1}\right) - (n+2)\sum_{k=0}^{n} U_k\right] \\
=& \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left[(n+1)U_{n+1} + (n+1)\sum_{k=0}^{n} U_k - (n+2)\sum_{k=0}^{n} U_k\right] \\
=& \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left[(n+1)U_{n+1} - \big(n+1-n-2\big)\sum_{k=0}^{n} U_k\right] \\
=& \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left[(n+1)U_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} U_k\right] \\
=& \frac{1}{(n+2)(n+1)}\left[\sum_{k=0}^{n} U_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} U_k\right] \\
=& \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\Big(U_{n+1} - U_k\Big) \\
V_{n+1} - V_n \geq 0 & \ \Big(\textit{car } n \in \mathbb{N} \textit{ et } (U_n) \textit{ est une suite croissante}\Big)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(V_n) \textit{ est une suite croissante}}$.

Exercice N°3

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. **Montrons que :** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq U_n \leq 3$**.**
   On utilise le raisonnement par récurrence :
   - Pour $n = 0$, on a $0 \leq U_0 = 0 \leq 3$, alors la proposition est vraie pour n=0.
   - Supposons que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n \leq 3$, et montrons que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_{n+1} \leq 3$.

     On a $0 \leq U_n \leq 3 \implies 0 \leq 2U_n \leq 6 \implies 3 \leq 2U_n + 3 \leq 9 \implies \sqrt{3} \leq \sqrt{2U_n+3} \leq 3$

     $\implies 0 \leq \sqrt{3} \leq U_{n+1} \leq 3$

   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n \leq 3}$.
2. **Montrons que** $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est monotone.**

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n+3} - U_n = \frac{\big(\sqrt{2U_n+3} - U_n\big)\big(\sqrt{2U_n+3} + U_n\big)}{\sqrt{2U_n+3} + U_n} = \frac{2U_n + 3 - U_n^2}{\sqrt{2U_n+3} + U_n}$$

   Le signe de $U_{n+1} - U_n$:

✳ Dénominateur :$\sqrt{2U_n+3}+U_n \geq 0$ pour $0 \leq U_n \leq 3$.

✳ Numérateur : $2U_n+3-U_n^2 \geq 0$ pour $0 \leq U_n \leq 3$ (en utilisant Δ et le tableau de variation).

Donc $U_{n+1}-U_n \geq 0$, alors $\boxed{(U_n) \text{ est croissante}}$.

3. **En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.**

✳ Convergence de (U_n) :

Comme (U_n) est croissante et majorée par 3 ($U_n \leq 3$) alors $\boxed{(U_n)\ est\ convergente}$.

✳ Limite de (U_n) :
On pose l la limite de (U_n), càd $\lim\limits_{n\to\infty}(U_n)=l$.

$$Cette\ limite\ l\ vérifie : \begin{cases} 0 \leq l \leq 3 \\ l=\sqrt{2l+3} \Longrightarrow l^2-2l-3=0 \Longrightarrow \boxed{l_1=-1}\ et\ \boxed{l_2=3} \end{cases}$$

On a $l_1=-1 \notin [0,3]$, par contre $l_2=3 \in [0,3]$

Alors $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} U_n=3}$.

Exercice N°4

Étude de la nature des suites en utilisant le critère de Cauchy :

1. $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

Par définition d'un suite de Cauchy
$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall\ p \in \mathbb{N}, \forall\ q \in \mathbb{N},\ p,q>n_0 \Longrightarrow |U_p-U_q|<\varepsilon$
Ou bien
$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ ?n_0\ tel\ que \forall\ p,q>n_0$ on doit avoir $|U_{p+q}-U_p|<\varepsilon$.

$$\begin{aligned} \left|U_{p+q}-U_p\right| &= \left|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p}+...+\frac{1}{p+q}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p}\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{p+1}+...+\frac{1}{p+q}\right| \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p+1<p+q \\ p+2<p+q \\ \vdots \quad < \quad \vdots \\ p+q \leq p+q \end{cases} \Longrightarrow \left.\begin{cases} \frac{1}{p+1}>\frac{1}{p+q} \\ \frac{1}{p+2}>\frac{1}{p+q} \\ \vdots \quad > \quad \vdots \\ \frac{1}{p+q} \geq \frac{1}{p+q} \end{cases}\right\} q\ fois \Longrightarrow \left(\frac{1}{p+1}+...+\frac{1}{p+q}\right) \geq \underbrace{\frac{1}{p+q}+...+\frac{1}{p+q}}_{=\frac{q}{p+q}}$$

$$\begin{aligned} |U_{p+q}-U_p| = \left|\frac{1}{p+1}+...+\frac{1}{p+q}\right| &\geq \left|\frac{q}{p+q}\right| \\ &\geq \frac{q}{p+q}\ (car\ p\ et\ q\ \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

pour $q=p$ on aura $|U_{p+q}-U_p|=|U_{2p}-U_p| \geq \frac{1}{2}$
Donc, $\forall\ n_0 \in \mathbb{N}, \exists\ \varepsilon=\frac{1}{2},\ et\ \forall p>n_0\ tel\ que\ |U_{2p}-U_p| \geq \varepsilon$

D'où la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, alors $\boxed{(U_n)\ est\ divergente}$.

2. $V_n = cos\ \frac{1}{n}$

   Par définition d'un suite de Cauchy
   $\forall\varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall\ p \in \mathbb{N}, \forall\ q \in \mathbb{N},\ \ p > n_0,\ \ q > n_0\ tel\ que:\ \ |V_p - V_q| < \varepsilon$

$$|V_{p+q} - V_p| = \left|\cos\frac{1}{p+q} - \cos\frac{1}{p}\right|$$

   On a

$$\cos a - \cos b = -2\ \sin\frac{a+b}{2}\ \sin\frac{a-b}{2}$$

   Alors

$$\begin{aligned}|V_{p+q} - V_p| = \left|\cos\frac{1}{p+q} - \cos\frac{1}{p}\right| &= \left|-2\ \sin\ \frac{\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p}}{2}\ \sin\ \frac{\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p}}{2}\right| \\ &= 2\left|\ \sin\ \frac{\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p}}{2}\right|\left|\sin\ \frac{\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p}}{2}\right| \text{..........}(*)\end{aligned}$$

   On sait aussi que $|\sin x| \leq 1$ et $|\sin x| \leq |x|$, donc

$$\begin{aligned}|\sin x| \leq 1 \quad &\Longrightarrow \left|\sin\ \frac{\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p}}{2}\right| \leq 1 \\ |\sin x| \leq |x| \quad &\Longrightarrow \left|\sin\ \frac{\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p}}{2}\right| \leq \left|\frac{\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p}}{2}\right|\end{aligned}$$

   Donc $(*)$ devient

$$|V_{p+q} - V_p| \leq 2 \times 1 \times \left|\frac{\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p}}{2}\right|$$

   Or

$$2\left|\frac{\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p}}{2}\right| = \left|\frac{p-p-q}{p(p+q)}\right| = \left|\frac{-q}{p(p+q)}\right| = \frac{q}{p(p+q)} \leq \frac{1}{p}$$

   Donc

$$\left|V_{p+q} - V_p\right| \leq \frac{1}{p}$$

   On a $\frac{1}{p}$ converge vers 0 quand n_0 tend vers l'infini, et puisque p $>$ n_0 alors p aussi tend vers l'infini $\Longrightarrow$ $\left|\frac{1}{p} - 0\right| = \left|\frac{1}{p}\right| = \frac{1}{p} < \varepsilon$

Donc $\left|V_{p+q}-V_p\right|<\varepsilon \implies$ la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy
Alors $\boxed{(V_n)\ \textit{est convergente}}$

3. $W_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2+ln\ 2}+...+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n+ln\ n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2^k+ln\ k}$

   Par définition d'un suite de Cauchy
   $\forall\varepsilon>0,\exists\ n_0\in\mathbb{N},\forall\ p,q\in\mathbb{N},p>n_0,q>n_0\ :\ |W_{p+q}-W_p|<\varepsilon$

$$\begin{aligned}|W_{p+q}-W_p| &=\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2+ln\ 2}+..\frac{(-1)^{p+1}}{2^p+ln\ p}+...+\frac{(-1)^{p+q+1}}{2^{p+q}+ln\ (p+q)}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2+ln\ 2}+...+\frac{(-1)^{p+1}}{2^p+ln\ p}\right)\right|\\ &=\left|\frac{(-1)^{p+2}}{2^{p+1}+ln\ (p+1)}+...+\frac{(-1)^{p+q+1}}{2^{p+q}+ln\ (p+q)}\right|\\ &=\left|\sum_{k=1}^{q}\frac{(-1)^{p+k+1}}{2^{p+k}+ln\ (p+k)}\right|\\ &\leq\sum_{k=1}^{q}\left|\frac{(-1)^{p+k+1}}{2^{p+k}+ln\ (p+k)}\right|\ \ (\textit{inégalité triangulaire})\end{aligned}$$

   Or
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{q}\left|\frac{(-1)^{p+k+1}}{2^{p+k}+ln\ (p+k)}\right| &=\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^{p+k}+ln\ (p+k)},\ \ car\ |-1|=|1|=1\\ &\leq\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^{p+k}}\end{aligned}$$

   Et
$$\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^{p+k}}=\frac{1}{2^p}\underbrace{\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k}}_{S.G\ de\ raison\ \frac{1}{2}}=\frac{1}{2^p}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^q}{1-\frac{1}{2}}\right)\right]=\frac{1}{2^p}\left[\frac{1}{2}\left(2\cdot\left(1-\frac{1}{2^q}\right)\right)\right]=\frac{1}{2^p}\left(1-\frac{1}{2^q}\right)\leq\frac{1}{2^p}$$

   Alors
$$|W_{p+q}-W_p|=\leq\frac{1}{2^p}$$

   On a $\dfrac{1}{2^p}$ converge vers 0 quand $n_0\mapsto\infty\implies\left|\dfrac{1}{2^p}-0\right|<\varepsilon$

   Donc $\left|W_{p+q}-W_p\right|<\varepsilon\implies$ la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

   Alors $\boxed{(W_n)\ \textit{est convergente}}$

4. $X_n=\dfrac{sin\ a}{1^k}+\dfrac{sin\ 2a}{2^k}+.......+\dfrac{sin\ na}{n^k}=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{sin\ ja}{j^k},$ où $\forall\ n\geq1,\ a\in\mathbb{R}^*,k\geq2$
   Par définition d'un suite de Cauchy
   $\forall\varepsilon>0,\exists\ n_0\in\mathbb{N},\forall\ p,q\in\mathbb{N},p>n_0,q>n_0\ :\ |X_{p+q}-X_p|<\varepsilon$

$$\begin{aligned}
|X_{p+q}-X_p| &= \left|\left(\frac{sin\ a}{1^k}+\frac{sin\ 2a}{2^k}+...+\frac{sin\ pa}{p^k}+...+\frac{sin\ (p+q)a}{(p+q)^k}\right)-\left(\frac{sin\ a}{1^k}+\frac{sin\ 2a}{2^k}+...+\frac{sin\ pa}{p^k}\right)\right| \\
&= \left|\frac{sin\ (p+1)a}{(p+1)^k}+...+\frac{sin\ (p+q)a}{(p+q)^k}\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{q}\frac{sin\ (p+j)a}{(p+j)^k}\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{q}\left|\frac{sin\ (p+j)a}{(p+j)^k}\right| \ (\textit{inégalité triangulaire})\textbf{......}(*)
\end{aligned}$$

On a

$$-1\leq\ sin\ \big((p+j)a\big)\ \leq 1 \Longrightarrow \frac{-1}{(p+j)^k}\leq\frac{sin\ \big((p+j)a\big)}{(p+j)^k}\leq\frac{1}{(p+j)^k}\Longrightarrow\left|\frac{sin\ \big((p+j)a\big)}{(p+j)^k}\right|\leq\frac{1}{(p+j)^k}$$

Donc $(*)$ devient

$$\begin{aligned}
|X_{p+q}-X_p| &\leq \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{(p+j)^k} \\
&\leq \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{p^k} \\
&\leq \frac{q}{p^k}
\end{aligned}$$

Pour $q=p$, $\frac{q}{p^k}=\frac{p}{p^k}=\frac{1}{p^{k-1}}$

Pour $k\geq 2$, la suite $\frac{1}{p^{k-1}}$ converge vers 0 $\Longrightarrow\left|\frac{1}{p^{k-1}}-0\right|<\varepsilon$

Donc $\big|X_{p+q}-X_p\big|<\varepsilon \Longrightarrow$ la suite (X_n) est de Cauchy.

Alors $\boxed{(X_n)\ \textit{est convergente}}$

Exercice N°5

Soit la suite

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$$

1. **Montrons que** $\forall n\in\mathbb{N}^*$**, on a :** $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$**.**

   Démonstration par récurrence :

   ✳ Pour n=1 : $\frac{1}{1!}\leq\frac{1}{2^{1-1}}\Longrightarrow 1=1$, la proposition est vraie.

   ✳ On suppose que $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ et on montre que $\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^n}$:

   $$On\ a\ \frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}\Longrightarrow\frac{1}{n!(n+1)}\leq\frac{1}{2^{n-1}(n+1)}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* : n+1 \geq 2 \Longrightarrow \dfrac{1}{(n+1)} \leq \dfrac{1}{2}$,

donc $\dfrac{1}{(n+1)n!} = \dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{(n+1)} \dfrac{1}{2^{n-1}} \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^{n-1}}$, donc $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{2^n}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

2. **La nature de la suite U_n :**

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n =& \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) \\ =& \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc (U_n) est une suite croissante.
D'après la question précédente, nous avons :

$$\left.\begin{array}{l} 1 \ \leq 1 \\ \dfrac{1}{1!} \leq 1 \\ \dfrac{1}{2!} \leq \dfrac{1}{2^{2-1}} \\ \vdots \ \leq \ \vdots \\ \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} \end{array}\right\} \Longrightarrow U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \overbrace{\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}^{\textit{suite géométrique de raion } \frac{1}{2}}$$

On a la suite géométrique $S_{n-1} = \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-(\frac{1}{2})}\right) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} < 1.$

Alors

$$U_n \leq 1 + 1 + S_{n-1} \Longrightarrow U_n \leq 1 + 1 + 1 = 3$$

Puisque (U_n) est majorée par 3 et elle est croissante, donc $\boxed{\text{elle est convergente}}$.

3. **En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq 3$:**

On a d'après la question précédente

$$U_n \leq 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Si on pose

$$V_n = 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 3$$

On a $0 \leq U_n \leq V_n \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} V_n$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} U_n \leq 3}$.