Université A.Mira de Bejaia
Faculté des Science Exactes
Département d'Informatique
1ère année Licence
Module : Analyse 1

Année universitaire 2020/2021

Corrigé de la série de TD N°3

Exercice N°1

1. **Démonstrations :**

a) Montrons que $\lim_{x\to 1} 8x+2=10$

Par définition : $\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \eta>0$ tel que $\forall\ x\neq x_0 : |x-x_0|<\eta \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

on a $\big|(8x+2)-10\big| = 8|x-1| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{8}$.

Donc, si on choisit $\eta=\frac{\varepsilon}{8}$, on aura

$$|x-1|<\eta \Longrightarrow \big|(8x+2)-10\big|<\varepsilon$$

Ce qui revient à dire que $\boxed{\lim_{x\to 1} 8x+2=10}$

b) Montrons que la fonction est continue au point $x_0=4$:

Il s'agit de montrer que $\lim_{x\to 4} f(x)=f(4)=13$, c'est à dire $\lim_{x\to 4} 2x+5=13$

$\lim_{x\to 4} 2x+5=13 \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \eta>0$ tel que $\forall\ x\neq x_0 : |x-4|<\eta \Longrightarrow |2x+5-13|<\varepsilon$

On a

$$|(2x+5)-13| = 2|x-4| \leq \varepsilon$$

Si on prend $\eta=\frac{\varepsilon}{2}$, on aura

$$|x-4|\leq \eta \Longrightarrow |(2x+5)-13|\leq \varepsilon,$$

Ce qui revient à dire que $\boxed{f(x) \text{ est continue en } x_0=4}$.

2. **Calcul des limites :**

a)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = \frac{0}{0} \quad F.I$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}\\ &= \frac{x+1-x^2-1}{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}\\ &= \frac{x\ (1-x)}{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}\\ &= \frac{(1-x)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1}{2}}$$

---

b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right)=\frac{0}{0}\ F.I$$

Méthode 1 :

On a :

$$\begin{aligned}\frac{x\sin x}{1-\cos x}&=\frac{x\sin x\ (1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\\&=\frac{x\sin x\ (1+\cos x)}{1^2-\cos^2 x}\\&=\frac{x\sin x\ (1+\cos x)}{\sin^2 x}\\&=\frac{x\ (1+\cos x)}{\sin x}\\&=\frac{x}{\sin x}\cdot\ (1+\cos x)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\ (1+\cos x)=2}$$

Car on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1\quad et\quad \lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$$

Méthode 2 : règle de l'hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{(x\sin x)'}{(1-\cos x)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+x\cos x)'}{(\sin x)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}\\&=\frac{1+1-0}{1}\end{aligned}$$

$$Alors\ \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right)\ =\ 2}$$

---

c)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\frac{0}{0}\ F.I$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\ \cos x} \\ &= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2\ \cos x}\end{aligned}$$

On a $1-\cos x = 2\ \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, donc on obtient

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\ sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Alors

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{sin^2 \frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}}$$

---

d)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}\right) = \frac{0}{0}\ F.I$$

Méthode 1 :
On a

$$\begin{aligned}x^2-5x+6 &= (x-3)(x-2) \\ x^2-x-2 &= (x+1)(x-2)\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x+1)} = -\frac{1}{3}}$$

Méthode 2 : règle de l'hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)'}{(x^2-x-2)'} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} = \frac{-1}{3}}$$

---

e)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 2x . \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x - \cos x}\right) = \frac{0}{0}\ F.I$$

On a

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\ \cos\frac{\pi}{4} - \cos x\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\sin x - \cos x\big)$$

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 2x . \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x - \cos x}\right) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 2x.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x-\cos x}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

---

f)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)=\frac{0}{0}\ F.I$$

Méthode 1 :
On a

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)$$

Comme, on a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 3x}=1$ $\left(\text{ qui viennent du fait que } \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\right)$
Alors

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)=\frac{2}{3}}$$

Méthode 2 : règle de l'hôpital

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(\sin 3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{3\cos 3x}=\frac{2}{3}}$$

---

g)

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{0}{0}\ F.I$$

On a $\quad\forall x\in\mathbb{R}:\quad -1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1\Longrightarrow -|x^3|\leq x^3\sin\frac{1}{x}\leq|x^3|$

Et comme $\lim\limits_{x\to 0}-|x^3|=\lim\limits_{x\to 0}|x^3|=0$
Alors d'après le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x}=0}$$

3. **Détermination des nombres a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$:**

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & si\ x<-2\\ a, & si\ x=-2\\ (2x+b)^2, & si\ x>-2\end{cases}\quad soit\ continue\ sur\ \mathbb{R}.$$

Les restrictions de f aux intervalles $]-\infty,-2[$ et $]-2,+\infty[$ sont des polynômes, donc continues sur ces intervalles.

La fonction f sera continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en (-2).

f est continue en (-2) si : $\quad\lim\limits_{\substack{<\\x\to -2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to -2}}f(x)=f(-2)$

— $f(-2)=a$
— $\lim\limits_{\substack{<\\x\to -2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to -2}}(x-1)^2=9=a$

— $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to -2}} (2x+b)^2 = (b-4)^2 = a$

Donc

$$\begin{cases} a = 9 \\ (b-4)^2 = 9 \Longrightarrow b = 7 \ ou \ b = 1 \end{cases}$$

Finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ si $\boxed{a = 9 \text{ et } b \in \{1, 7\}}$.

Exercice N°2

Montrons que les équations suivantes admettent au moins une solution réelle sur [a,b] :

1. $\tan x + \frac{x}{3} = 0, \ [a, b] = [\frac{3\pi}{4}, \pi]$,
2. $\ln x - \frac{1}{x} = 0, \ [a, b] = [1, 2]$,
3. $f(x) = x$ où $f : [a, b] \longmapsto [a, b]$ est une fonction continue.

Mous allons utiliser le **théorème des valeurs intermédiaires** (T.V.I) : si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b], et si $\big($(f(a).f(b))<0$\big)$ alors il existe un réel x_0 compris entre a et b vérifiant $f(x_0) = 0$. Dans le cas où f est une fonction strictement croissante, alors la solution est unique.

- Posons $F(x) = \tan x + \frac{x}{3}$.
  On a F est continue sur $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$, car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

  $$F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4} + \frac{\frac{3\pi}{4}}{3} = -1 + \frac{\pi}{4} < 0 \quad \text{et} \quad F(\pi) = \tan\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} > 0.$$

  On a $F\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cdot F(\pi) < 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires

  $$\boxed{\exists\ x_0 \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[\ : \ F(x_0) = 0, \ c'est\ à\ dire\ \exists\ x_0 \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[\ : \ \tan x_0 + \frac{x_0}{3} = 0}$$

  Unicité :

  $$F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{3} > 0 \ , \ \forall x \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[\Longrightarrow F \ est\ strictement\ croissante$$

  Donc la solution est unique.
- Posons $G(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.
  On a G est continue sur $[1, 2]$, car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[1, 2]$.

  $$G(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} = -1 < 0 \quad \text{et} \quad G(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = 0,19 > 0.$$

  On a $G(1) \cdot G(2) < 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires

  $$\boxed{\exists\ x_0 \in \,]1, 2[\ : \ G(x_0) = 0, \ c'est\ à\ dire\ \exists\ x_0 \in \,]1, 2[\ : \ \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0}$$

  Unicité :

  $$G'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \ , \ \forall x \in]1, 2[\Longrightarrow \ G\ est\ strictement\ croissante$$

  Donc la solution est unique.
- Posons $K(x) = f(x) - x, \ x \in [a, b]$.
  On a K est une fonction continue car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$K(a) = f(a) - a \geq 0 \quad \text{et} \quad K(b) = f(b) - b \leq 0 \;\; \text{car} \;\; a \leq f(x) \leq b, \; \forall \, x \in [a, b].$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires

$\boxed{\exists \; x_0 \in \,]a, b[\; : \; K(x_0) = 0, \; c'est \; \grave{a} \; dire \; \exists \; x_0 \in \,]a, b[\; : \; f(x_0) = x_0}.$

Exercice N°3

Si f est aussi continue au point x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$) alors f admet un prolongement par continuité noté par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si \; x \neq x_0 \\ l, & si \; x = x_0. \end{cases}$$

1. **Prolongement par continuité :**

   i) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

   <u>Continuité au point $x = 0$:</u>

   $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{2(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2} \; \left(car \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \right)$$

   Donc f est continue au point 0. Par conséquent, elle est prolongeable par continuité en 0. Son prolongement est défini par

   $$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}, & si \; x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & si \; x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Remarque : la limite $\frac{1}{2}$ peut être aussi trouvée a l'aide de la règle de l'hôpital.

   ii) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

   <u>Continuité au point $x = 0$:</u>

   On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$ Par conséquent, g n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2. **Soit la fonction définie par :**

   $$f(x) = \begin{cases} \ln(x + 1), & si \; x \geq 0 \\ \sin x, & si \; x < 0 \end{cases}$$

   On a $D_f = \mathbb{R}$.

   (a) **Étude de la continuité, la dérivabilité et la continuité éventuelle de la dérivée de la fonction f sur D_f**

   - <u>Continuité de f sur $\mathbb{R}$</u>

     - f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car les fonctions $x \mapsto \ln(x + 1)$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues respectivement sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

- Continuité de f en 0 :
On a

$$\begin{array}{lll} f(0) & = \ln(1+0) & = 0 \\ \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) & = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \ln(1+x) & = 0 \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) & = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \sin x & = 0 \end{array}$$

Et comme $\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = f(0) = 0}$, alors f est continue au point 0.

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$

- Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car les fonctions $x \mapsto \ln(x+1)$ et $x \mapsto \sin x$ sont dérivable respectivement sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
- Dérivabilité de f en 0 :
On a

$$\begin{array}{llll} f(0) & = \ln(1+0) & = 0 & \\ \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} & = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} & = 1 & (avec\ la\ regle\ del'hopital) \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} & = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\sin x}{x} & = 1 & \end{array}$$

Et comme $\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1}$, alors f est dérivable au point 0 et on a $f^{'}(0) = 1$.

Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\begin{array}{llll} f^{'} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longrightarrow & f^{'}(x) = & \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & si\ x > 0 \\ \cos x, & si\ x < 0 \\ 1, & si\ x = 0. \end{cases} \end{array}$$

- Dérivabilité de $f^{'}$ sur $\mathbb{R}$

- $f^{'}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues respectivement sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
- Continuité de $f^{'}$ en 0 :
On a

$$\begin{array}{lll} f^{'}(0) & = & = 1 \\ \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f^{'}(x) & = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{1}{x+1} & = 1 \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f^{'}(x) & = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \cos x & = 1 \end{array}$$

Et comme $\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f^{'}(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f^{'}(x) = f^{'}(0) = 1}$, alors $f^{'}$ est continue au point 0.

Finalement, $f^{'}$ est continue sur $\mathbb{R}$

(b) **f est-elle de classe C^1 sur D_f ?**

Oui f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{'}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice N°4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & si\ x \geq 1, \\ ax^3 + bx + 2, & si\ x < 1 \end{cases}$$

Déterminons a et b pour que f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:

i) Continuité de f sur $\mathbb{R}$:

- Sur $\mathbb{R} - \{1\}$: f est continue car $x^2 + x + 1$ et $ax^3 + bx + 2$ sont des fonctions polynomiales continues sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
- Continuité de f au point 1 :
  Pour que f soit continue en 1, il faut que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)$.

$$f(1) = \quad 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (ax^3 + bx + 2) = a + b + 2$$
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x^2 + x + 1) = 3$$

Donc, il faut que $a + b + 2 = 3 \Longrightarrow \boxed{\text{a+b=1}}$

ii) Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$:

- Sur $\mathbb{R} - \{1\}$: f est dérivable car $x^2 + x + 1$ et $ax^3 + bx + 2$ sont des fonctions polynomiales donc dérivables sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
- Dérivabilité de f au point 1 :
  Si $a + b \neq 1$, f ne peut pas être dérivable, donc la première condition qui doit être vérifiée est $\boxed{a + b = 1}$.

  Pour que f soit dérivable au point 1 il faut que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$.

$$f'(1) = 2(1) + 1 = 3$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2 + x + 1 - 3}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x + 2) = 3$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{ax^3 + bx + 2 - 3}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{ax^3 + bx - 1}{(x - 1)} \text{..........................}(*)$$

Comme f est continue donc $a + b = 1 \Longrightarrow a = 1 - b$

Donc, en remplaçant a par $1-b$, (*) devient :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{a\ x^3 + b\ x - 1}{(x-1)} &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(1-b)x^3 + b\ x - 1}{(x-1)} \\
&= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x^3 - b\ x^3 + b\ x - 1}{(x-1)} \\
&= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(x^3-1) - b\ x^2(x-1)}{(x-1)} \\
&= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(x^2+x-1)(x-1) - b\ x^2(x-1)}{(x-1)} \\
&= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x^2+x-1) - b\ x^2 \\
&= 3 - b
\end{aligned}$$

Pour que f soit dérivable en 1, il faut que

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3$$

Ce qui revient à dire que $3 - b = 3 \Longrightarrow b = 0$

Et puisque on a $a + b = 1$, donc $a = 1$

Conclusion : f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ si $\boxed{a = 1}$ et $\boxed{b = 0}$.

Exercice N°5

1. **Calcul de la dérivée de la fonction** $f : x \longmapsto (x^2+1)\sin x$:
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

   $$f^{'}(x) = \Big((x^2+1)\sin x\Big)^{'} = (x^2+1)\ \cos x + 2x \sin x$$

2. **Montrons de deux manières différentes que l'équation** $(x^2+1)\cos x + 2x\sin x = 0$ **admet au moins une solution dans** $[0, \pi]$
   — <u>**Première méthode : (Théorème de Rolle)**</u>

   $$\boxed{\textit{Théorème de Rolle} \begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ derivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \exists\ c \in]a,b[: f^{'}(c) = 0}$$

   - La fonction f est continue sur $[0,\pi]$ car c'est le produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0,\pi]$.
   - La fonction f est dérivable sur $]0,\pi[$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]0,\pi[$.
   - $f(0) = (0^2+1)\sin 0 = 0$ et $f(\pi) = (\pi^2+1)\sin\pi = 0$.

Donc d'après le théorème de Rolle, $\exists\ c \in]0,\pi[$: $f^{'}(c) = 0$
En d'autre terme

$$\exists c \in]0,\pi[\ :\ (c^2+1)\cos c + 2c\sin c = 0$$

D'où le résultat.

— **Deuxième méthode : (Théorème des valeurs intermédiaires)**

Soit

$$g(x) = (x^2+1)\cos x + 2x\sin x,\ x \in [0,\pi]$$

$$\boxed{T.V.I \begin{cases} g\ continue\ sur\ [a,b] \\ g\ derivable\ sur\ ]a,b[\\ g(a)\ g(b) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \exists\ c \in]a,b[\ :\ g(c) = 0}$$

- La fonction g est continue sur $[0,\pi]$ car c'est le produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0,\pi]$
- On a $g(0) = 1$ et $g(\pi) = -(\pi^2+1)$, donc $g(0)\cdot g(\pi) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\ c \in]0,\pi[$: $g(c) = f^{'}(c) = 0$
En d'autre terme

$$\exists\ c \in]0,\pi[\ :\ (c^2+1)\cos c + 2c\sin c = 0$$

D'où le résultat.

3. **Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème de Rolle, démontrons qu'il existe $x \in]0,1[$, tel que**

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c.$$

Posons

$$h(y) = ay^4 + by^3 + cy^2 - (a+b+c)y,\ y \in [0,1]$$

- La fonction h est continue sur $[0,1]$ car c'est un polynôme.
- La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ car c'est un polynôme.
- $h(0) = a\ (0)^4 + b\ (0)^3 + c\ (0)^2 - (a+b+c)\ (0) = 0$ et
  $h(1) = a\ (1)^4 + b\ (1)^3 + c\ (1)^2 - (a+b+c)\ (1) = 0.$

Donc d'après le théorème de Rolle $\exists\ x \in]0,1[$: $h^{'}(x) = 0$
En d'autre terme

$$\exists\ x \in]0,1[\ :\ 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0,$$

4. **En appliquant le théorème des accroissements finis (T.A.F) à la fonction** $f : x \longmapsto \ln x$, démontrons que

$$\forall x > 0,\ \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

$$\boxed{T.A.F \begin{cases} f\ continue\ sur\ [a,b] \\ f\ derivable\ sur]a,b[\end{cases} \Longrightarrow \exists\ c \in]a,b[\ :\ f(b)-f(a) = (b-a)f^{'}(c)}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on applique le théorème des accroissements finis (T.A.F) la fonction $g : y \mapsto \ln y$ définie sur l'intervalle $[1, x+1]$. On a alors :

- La fonction g est continue sur $[1, x+1]$.
- La fonction g est dérivable sur $]1, x+1[$.
- On a $g^{'}(y) = (\ln y)^{'} = \dfrac{1}{y}$.

Donc d'après le théorème ds accroissements finis,

$$\exists\ c\ \in]1, 1+x[\ :\ g(x+1) - g(1) = (x+1-1)\ g^{'}(x) \Longrightarrow \ln(x+1) - \ln 1 = (x+1-1)\frac{1}{c}$$

En d'autre terme

$$\exists\ c \in]1, x+1[\ :\ \ln(x+1) = \frac{x}{c}..............(1),$$

On a $c \in\ ]1, x+1[\longrightarrow 1 < c < x+1$

- $c > 1 \ \Longrightarrow\ \frac{1}{c} < 1 \ \Longrightarrow\ \frac{x}{c} < x$ car $x > 0....(2)$

  Donc de (1) et (2) on aura

  $$\ln(1+x) < x\textbf{.......(3)}$$

- $c < x+1 \ \Longrightarrow\ \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x+1} \ \Longrightarrow\ \dfrac{x}{c} < \dfrac{x}{x+1}$ car $x > 0....(4)$

  Donc de (1) et (4) on aura

  $$\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}\textbf{.......(5)}$$

  Finalement, de **(3)** et **(5)** on obtient

  $$\boxed{\forall\ x > 0,\ \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x}.$$

  Ou bien

  $$1 < c < x+1 \Longrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < 1 \Longrightarrow \frac{x}{x+1} < \frac{x}{c} < x,\ car\ x > 0$$

  Et puisque $\dfrac{x}{c} = \ln(x+1)$ (d'après (1)), alors

  $$\boxed{\frac{x}{x+1} < \ln(x+1)\ < x,\ x > 0.}$$