

Trouver  $\sup E$ ,  $\inf E$ ,  $\max E$  et  $\min E$ , avec  $E = \{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\}$

Solution:

$$\text{on a } (-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{si } n = 2k+1 \text{ (n impair)} \\ 1, & \text{si } n = 2k \text{ (n pair)} \end{cases}$$

Dans la présence de  $(-1)^n$  dans un ensemble, on ne peut pas directement remplacer la série valeur que prend  $n$  et faire la limite en  $\infty$  pour avoir l'intervalle. Alors, on doit considérer le cas de  $n$  pair et  $n$  impair.

$$(-1)^n + \frac{1}{n^2} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{(2k)^2}, & n \text{ pair} \\ -1 + \frac{1}{n^2} = -1 + \frac{1}{(2k+1)^2}, & n \text{ impair.} \end{cases}$$

\*  $n$  pair:

$$\text{Soit } E_1 = \left\{ 1 + \frac{1}{n^2}, n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$\text{On pose } f(x) = 1 + \frac{1}{(2x)^2}, x \in \mathbb{N}^*$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x^3} < 0$$

D'après le tableau de variations

$$\boxed{\sup E_1 = \frac{5}{4}} \quad \boxed{\inf E_1 = 1}$$



\*  $n$  impair:

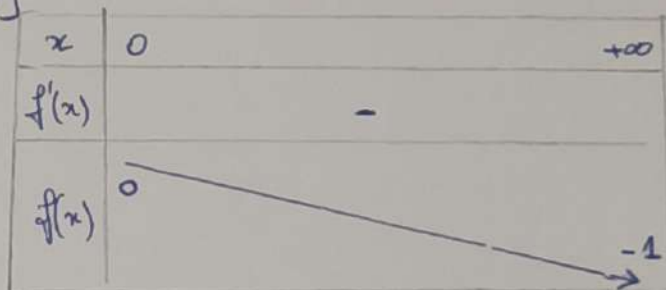
$$\text{Soit } E_2 = \left\{ -1 + \frac{1}{n^2}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\text{on pose } f(x) = -1 + \frac{1}{(2x+1)^2}, x \in \mathbb{N}$$

$$f'(x) = \frac{-4}{(2x+1)^3} < 0$$

Donc

$$\boxed{\sup E_2 = 0} \quad \boxed{\inf E_2 = -1}$$



$$\sup E = \sup (E_1 \cup E_2) = \max(\sup E_1, \sup E_2) = \max\left(\frac{5}{4}, 0\right) = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$\inf E = \inf (E_1 \cup E_2) = \min(\inf E_1, \inf E_2) = \min(1, -1) = \boxed{-1}$$

Ensemble des majorants est  $\left[\frac{5}{4}, +\infty[ \right. \left. \left( \left[\sup E, +\infty[ \right) \right)$

Ensemble des minorants est  $\left]-\infty, -1\right] \left( \left]-\infty, \inf E\right] \right)$

$\max E = \frac{5}{4}$  car  $\sup E = \frac{5}{4} = f(x) \Rightarrow x = 1$  (puisque 1 est fini donc  $\max \exists$ )

$\min E$  n'existe pas car  $\inf E = -1 = f(x) \Rightarrow x = +\infty$  (puisque on trouve  $\infty$  donc  $\min \nexists$ )