Exercices corrigés d'économie industrielle

Philippe Février et Laurent Linnemer

Septembre 2003

Introduction

L'ÉCONOMIE INDUSTRIELLE occupe une place toujours croissante dans la culture économique. Le cadre analytique qu'elle propose joue un rôle central dans de nombreuses applications. En particulier les concepts développés en économie industrielle apportent une ossature solide aux questions de droit de la concurrence et de régulation des marchés. En témoignent les ouvrages publiés chaque année sur ces thèmes ainsi que leur utilisation lors de la médiatisation d'affaires *antitrust* comme le cas Microsoft ou la tentative de rachat d'Orangina par Coca-Cola. Il est probable que cette place n'ira pas diminuant dans le futur. Si aujourd'hui les administrations, les autorités de réglementation et régulation, les cabinets d'avocats font déjà appel aux compétences des économistes industriels pour les aider à prendre des décisions, demain plus nombreuses encore seront les entreprises qui auront recours à des experts de cette discipline.

Depuis les années 1970, les avancées de l'économie industrielle s'appuient sur les fondations rigoureuses posées par la théorie des jeux. De manière assez générale, la théorie des jeux permet d'analyser l'interdépendance des décisions des agents[1]. La théorie des jeux est devenue l'outil incontournable qui permet de présenter le cheminement des idées à l'aide d'un modèle : des hypothèses aux conclusions. Il nous a donc semblé nécessaire de proposer des exercices d'économie industrielle et de théorie des jeux, l'une étant indisociablement liée à l'autre. Il aurait été tentant d'ajouter une partie économétrique qui en permettant la confrontation de la théorie économique aux données, constitue elle aussi un outil de plus en plus indispensable à l'économiste industriel. Toutefois, des limitations de place ainsi que des considérations pratiques nous ont fait écarter l'idée d'ajouter des exercices d'économétrie.

Nos expériences d'enseignement, à l'ENSAE tout d'abord, à l'Université de Lille 2 et à celle de Paris 5 ensuite, nous ont fait voir le besoin d'un livre d'exercices sur ces thèmes centraux que sont la théorie des jeux et l'économie industrielle. Le travail personnel occupe, en effet, une position clef dans l'apprentissage d'une discipline et l'exercice nous semble constituer la manière naturelle d'ancrer des connaissances fraîchement acquises.

Le plan d'un cours d'économie industrielle contient de nombreux chapitres. Nous avons essayé de ne négliger aucun aspect du corpus central de l'économie

[1] En effet, l'utilité d'un individu, d'une entreprise ou d'un gouvernement ne dépend pas uniquement de ses seules décisions mais aussi de celles des autres. Par exemple, si une entreprise lance un nouveau produit, son profit va dépendre de variables qu'elle contrôle comme la publicité, la qualité, le design, le prix mais aussi de variables qu'elle ne contrôle pas, ou pas directement telles que les caractéristiques des produits concurrents, l'énergie déployée par les distributeurs, les goûts, les modes de vie des consommateurs.

industrielle tout en laissant à la théorie des jeux la place qui lui revient. Deux chapitres y sont consacrés : Le chapitre 1 traite de l'équilibre de Nash et de l'équilibre de Nash sous-jeux parfait dans les jeux à information parfaite et imparfaite (jeux simultanés par exemple). Le chapitre 8 aborde les jeux en information incomplète, connus aussi sous la dénomination de jeux bayésiens. Une bonne compréhension du chapitre 1 est nécessaire pour l'ensemble des autres chapitres. Le chapitre 8, en revanche, n'est un entraînement nécessaire[2] que pour attaquer le chapitre 9. Des éléments de théorie des jeux (jeux répétés) se trouvent aussi dans le chapitre 6 qui étudie la collusion tacite. Les grands thèmes de l'économie industrielle sont abordés dans les autres chapitres qui peuvent se lire indépendamment les uns des autres (mais de préférence après avoir fait quelques exercices du chapitre 1 car il y a presque toujours un équilibre de Nash à déterminer). Le chapitre 2 parcourt différents thèmes liés à la présence d'un unique vendeur sur un marché. Le monopole est évidemment au cœur des problématiques de concurrence imparfaite. L'extension naturelle de la notion de monopole à celle d'oligopole passe par l'analyse de l'oligopole à la Cournot. Cette étude est proposée dans le chapitre 3. Au delà de l'analyse de la concurrence à la Cournot, le chapitre 3 consacre une place importante à l'analyse des équilibres sous-jeux parfaits d'un jeu à deux étapes et donc à la notion d'engagement en économie industrielle. Les oligopoles où la concurrence est directement en prix occupent les exercices du chapitre 4 et l'essentiel de ceux du chapitre 5 où la question de la différenciation horizontale est abordée sous l'angle des modèles de localisation. Les deux chapitres suivants abordent deux sujets centraux pour le droit de la concurrence. Le thème de la collusion est analysé à travers les exercices du chapitre 6. Celui de la concentration des firmes est étudié dans le chapitre 7. Enfin, le chapitre 9 étudie une série de grandes applications de la notion d'équilibre bayésien parfait en économie industrielle à travers des jeux de signaux. Ce chapitre est plus difficile que les autres. Certains grands thèmes de l'économie industrielle n'apparaissent pas dans les titres de nos chapitres. Ils n'en sont pas pour autant oubliés. Par exemple, nous n'avons pas de chapitre intitulé «Barrières à l'entrée» qui est un thème central mais de nombreux exercices sur cette question se trouvent dans le chapitre 3 sur la concurrence à la Cournot, dans le chapitre 4 sur la concurrence en prix, dans le chapitre 5 sur les modèles de localisation et enfin dans le chapitre 9 à travers des modèles de jeux de signaux.

À propos de l'organisation choisie pour les énoncés et les corrections, nous avons préféré une structure énoncé/correction, énoncé/correction, ... plutôt que celle parfois proposée d'énoncé/énoncé, puis correction/correction. En effet, d'une part il ne nous paraît pas nécessaire de «cacher» la correction, d'autre part en cherchant ainsi à cacher les corrections il arrive souvent qu'en lisant la correction d'un exercice les yeux s'attardent involontairement sur des éléments de la correction de l'exercice suivant qui perd alors une partie de son intérêt pédagogique. Nous laissons aux étudiants le soin de ne pas voir trop tôt les solutions. La structure énoncé / correction a l'avantage d'éviter de feuilleter sans cesse le livre pour passer d'un énoncé à sa correction ou l'inverse.

Certains exercices sont plus durs que d'autres. Afin de guider le lecteur dans ces choix, les exercices sont hiérarchisés par difficulté croissante. Les applications

[2]Bien entendu, l'étude du chapitre 8 est utile en elle-même, les applications de ce concept ne se restreignant en aucune manière à celles du chapitre 9.

directes des concepts vus en cours sont indiqués par une étoile (*) après le titre de l'exercice. Les exercices plus difficiles sont indiqués par deux étoiles (**), ils nécessitent plus de temps et demandent une manipulation non triviale des concepts du cours. Les exercices très difficiles sont signalés par trois étoiles (***) et quelques exercices sont exceptionnellement ardus et méritent quatre étoiles (****). *A priori*, pour les exercices (*) les corrections détaillent les calculs même lorsqu'ils sont élémentaires. En revanche, pour les exercices (**et plus) l'accent et plus mis dans la correction sur le raisonnement, les calculs simples sont omis.

Avant de laisser la parole aux exercices, un mot sur quelques livres qui peuvent aider un étudiant abordant un cours d'économie industrielle. Tout d'abord, il ne faut pas perdre de vue que l'économie industrielle est une branche de la microéconomie. Un livre ancien mais très utile est celui d'Edmond Malinvaud : *Leçons de théorie microéconomique*, 1971, Dunod. Il présente de manière très pédagogique la microéconomie du consommateur, de l'entreprise ainsi que l'équilibre général. Plus récents et abordant aussi des questions d'économie industrielle sont les livres de Hal Varian *Analyse Microéconomique*, 1990, De Bœck, d'Andreu Mas-Colell, Michael Whinston et Jerry Green *Microeconomic Theory*, 1995, Oxford University Press et de David Kreps *A course in Microeconomic theory*, 1990, Harvester Wheatsheaf. Un ouvrage synthétique sur la concurrence imparfaite est celui de Bernard Salanié *Microéconomie : les défaillances du marché*, 1998, Economica. Du même auteur nous recommandons (sur un thème connexe à celui de notre livre) *Théorie des contrats*, 1994, Economica. L'ouvrage collectif *Concurrence et réglementation*, ed. Anne Perrot, 1996, Economica présente différents thèmes de l'économie industrielle. Enfin, la bible de l'économie industrielle est sans conteste l'ouvrage de Jean Tirole que nous conseillons à la fois en anglais et en français : *The Theory of Industrial Organization*, 1988, MIT Press et *Économie industrielle* (2 tomes), 1993, Economica. *Nous prenons ce livre comme livre de cours de référence, et nous indiquons au lecteur les pages qu'il doit lire de la manière suivante :* ***Tirole****, page p1 à p2.*

Nous remercions tout particulièrement Marie-Laure Allain, Christian Gourieroux, Bruno Jullien, Anne Perrot, Bernard Salanié, Saïd Souam, Michael Visser et Shmuel Zamir pour leurs commentaires et leurs encouragements. Nous sommes aussi redevables à David Bardey, Claire Chambolle, Maia David, Marie-Élise Dumans, Jorge Ferrando, Sylvaine Poret, Raphaële Préget, Harris Selod et Nathalie Sonnac pour leurs relectures attentives. Bien entendu, nous sommes seuls responsables d'éventuelles erreurs. Nous remercions aussi la bibliothèque de l'ENSAE et en particulier Josette Hardy et Guy Viollin. Ce livre a été réalisé grâce au logiciel LaTeX et nous remercions Philippe Donnay pour nous avoir permis d'en utiliser toutes les extensions.

Chapitre 1

Équilibre de Nash

Depuis le milieu des années 1970, les grandes questions de l'économie industrielle ont été abordées à l'aide de la théorie des jeux non-coopératifs. La notion d'équilibre de Nash[1] est donc devenue une pièce maîtresse de l'économie industrielle. À part certains problèmes touchant au monopole, les questions d'économie industrielle se traitent de la manière suivante : construction à partir des éléments économiques les plus important d'un modèle sous la forme d'un jeu, puis recherche des équilibres de Nash de ce jeu. Résoudre une question d'économie industrielle revient donc souvent à trouver les équilibres de Nash du jeu correspondant puis à les interpréter en termes économiques. Il est donc essentiel de bien maîtriser les notions de jeu et d'équilibre de Nash.

Rappels de cours

Toute situation d'interactions stratégiques (c'est-à-dire où les actions des uns influencent les gains ou les pertes des autres) peut être représentée sous la forme d'un jeu. Il est usuel de distinguer deux sortes de représentation d'un jeu : la forme normale ou alors la forme extensive. Nous exposons successivement les grands traits de chacune dans ce rappel de cours.

Un jeu sous forme normale décrit les interactions stratégiques à l'aide de "trois éléments" : l'ensemble des joueurs, l'ensemble des stratégies de chaque joueur, la fonction d'utilité[2] de chaque joueur.

L'ensemble des joueurs est noté $I = \{1, 2, ..., n\}$ où n est le nombre de joueurs (qui est ici fini mais qui pourrait être infini dans certaines applications). Un joueur quelconque est repéré par un indice $i \in I$.

Une stratégie pure pour le joueur i se note s_i. Il s'agit d'une action ou d'une liste d'actions que peut entreprendre ce joueur[3]. *L'ensemble des stratégies pures*

[1]À propos de la place du travail de Nash dans la théorie des jeux, voir l'article de Roger B. Myerson : "Nash Equilibrium and the History of Economic Theory", *Journal of Economic Literature*, Vol. XXXVII (September 1999) pp. 1067Ű1082.

[2]On dit aussi parfois fonction de paiement mais il s'agit bien d'une fonction d'utilité Von Neumann-Morgenstern.

[3]Par exemple "pile" est une stratégie dans le jeu pile ou face. Ou encore (pile, pile) dans le cas où deux jeux de pile ou face sont joués simultanément par le même joueur.

du joueur i est noté S_i. *A priori* S_i est un ensemble fini pour tout i c'est-à-dire une liste finie d'alternatives[4]. L'ensemble qui contient toutes les stratégies pures de tous les joueurs est noté S, $S = \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} S_i = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$. Un élément de S se note s, s est une liste de stratégies (une stratégie pour chaque joueur), $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$.

Les fonctions d'utilité : à chaque vecteur de stratégies $s \in S$ correspond une issue du jeu et donc des utilités pour chacun des joueurs. La fonction d'utilité du joueur i est notée $u_i(.)$. Elle dépend (*a priori*) du vecteur des stratégies de tous les joueurs, c'est-à-dire de son choix mais aussi des choix de tous les autres. La fonction u_i va donc de l'ensemble des stratégies S dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Cette utilité peut être positive ou négative (il s'agit simplement d'une question de normalisation). Si le vecteur de stratégies s est joué, l'utilité obtenue par le joueur i est $u_i(s) = u_i(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$. Il est souvent utile d'écrire s sous la forme (s_i, s_{-i}) où $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ (en adaptant de manière évidente pour $i = 1$ et $i = n$). Le vecteur de stratégies s_{-i} correspond au vecteur des stratégies des joueurs autres que i, il appartient à $S_{-i} = \underset{j \neq i}{\times} S_j$.

Un jeu sous forme normale se déroule de la manière suivante : chaque joueur connaît la description du jeu donnée ci-dessus, il choisit (sans pouvoir observer le choix des autres) une stratégie dans son ensemble de stratégies, cela détermine une issue du jeu (c'est-à-dire pour chaque joueur un choix de stratégie) qui conduit à un paiement pour chaque joueur. Un jeu sous forme normale se déroule comme un jeu simultané, mais la forme normale permet de modéliser des jeux séquentiels. Avant de donner la définition de l'équilibre de Nash, voyons les notions de stratégie strictement et faiblement dominée.

La stratégie s_i du joueur i est dite *strictement dominée*, s'il existe une autre stratégie s'_i disponible pour le joueur i telle que quelles que soient les stratégies des autres joueurs, s'_i assure au joueur i une utilité strictement plus grande que s_i. Formellement, $s_i \in S_i$ est strictement dominée, s'il existe $s'_i \in S_i$ telle que pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$, $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s'_i, s_{-i})$.

La stratégie s_i du joueur i est dite *faiblement dominée*, s'il existe une autre stratégie s'_i disponible pour le joueur i telle que quelles que soient les stratégies des autres joueurs, s'_i assure au joueur i une utilité au moins aussi grande que s_i et qu'il existe au moins une combinaison des stratégies des autres telle que l'utilité avec s'_i soit strictement plus grande. Formellement, $s_i \in S_i$ est faiblement dominée, s'il existe $s'_i \in S_i$ telle que pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$, $u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s'_i, s_{-i})$ et qu'il existe $\widetilde{s}_{-i} \in S_{-i}$ telle que $u_i(s_i, \widetilde{s}_{-i}) < u_i(s'_i, \widetilde{s}_{-i})$.

Un vecteur de stratégies pures forme un **équilibre de Nash en stratégies pures** si et seulement si **chaque joueur joue une meilleure réponse aux stratégies des autres.** Formellement, $s^* \in S$ forme un équilibre de Nash si et seulement si pour tout i, $1 \leq i \leq n$, pour tout $s_i \in S_i$, $u_i\left(s_i, s^*_{-i}\right) \leq u_i\left(s^*_i, s^*_{-i}\right)$. Autrement dit un vecteur de stratégies pures est un équilibre de Nash si pour chaque joueur il n'existe pas de *déviation unilatérale profitable.* À l'équilibre de Nash un joueur n'a rien à gagner à jouer une autre stratégie que sa stratégie d'équilibre tant que tous les autres joueurs jouent leurs stratégies d'équilibre.

[4]Dans de nombreuses applications en économie industrielle l'ensemble des stratégies pures d'un joueur est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ (choix de prix ou choix de quantité).

Soit $mr_i^*(.)$ la correspondance de meilleure réponse de i à un vecteur de stratégies $s_{-i} : mr_i^*(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$. **Un équilibre de Nash se trouve à l'intersection des correspondances de meilleures réponses.** Formellement, s^* est un équilibre de Nash, si et seulement si, pour tout i, $s_i^* = mr_i^*\left(s_{-i}^*\right)$.

Soit S_i l'ensemble, supposé fini, des stratégies pures du joueur i. Notons k_i le nombre de stratégies pures dans S_i. Une stratégie mixte, σ_i est une fonction qui à chaque stratégie pure $s_i \in S_i$ assigne une probabilité notée $\sigma_i(s_i)$. C'est-à-dire, pour tout $s_i \in S_i$, $\sigma_i(s_i) \in [0,1]$ avec $\sum_{k=1}^{k_i} \sigma_i(s_k) = 1$. L'ensemble des stratégies mixtes du joueur i se note Σ_i.

$$\Sigma_i = \left\{ \sigma_i : S_i \to [0,1], \text{ telle que } \forall s_k \in S_i,\ 0 \leq \sigma_i(s_k) \leq 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{k_i} \sigma_i(s_k) = 1 \right\}.$$

Remarquons que les stratégies pures sont des cas particuliers de stratégies mixtes. En effet, la stratégie pure $s_i \in S_i$ n'est rien d'autre que la stratégie "mixte" où $\sigma_i(s_i) = 1$ et où les autres probabilités sont à zéro par nécessité. Par abus de notation, nous noterons s_i cet élément de Σ_i. Une stratégie mixte consiste à choisir d'une manière aléatoire une stratégie pure. *Le choix aléatoire de chaque joueur est statistiquement indépendant des choix aléatoires des autres joueurs.* Soit σ un vecteur contenant une stratégie mixte pour chaque joueur : $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$ et soit $\Sigma = \times_{i=1}^{n} \Sigma_i$ l'ensemble de toutes les stratégies mixtes.

En présence de stratégies mixtes, les joueurs maximisent leur **espérance d'utilité**. L'espérance d'utilité du joueur i se note $U_i(.)$, il s'agit d'une fonction de Σ dans $\mathbb{R}$ et elle s'écrit :

$$U_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s).$$

En effet, la probabilité qu'une stratégie s donnée soit jouée, une fois les stratégies mixtes des joueurs fixées, est $\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j)$.

Soit G un jeu sous forme normale, $G = \left(I,\ S = \times_{i=1}^{n} S_i,\ (u_i)_{i=1 \text{ à } n} \right)$. Un vecteur de stratégies $\sigma^* \in \Sigma$ forme un équilibre de Nash de G, si et seulement si, pour tout joueur i, et pour toute stratégie pure $s_i \in S_i$,

$$U_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right) \geq U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right).$$

Théorème de Nash : *Tout jeu fini G possède au moins un équilibre de Nash.*

Exemple d'un jeu sous forme normale : Afin d'illustrer qu'un tel jeu convient pour décrire des interactions stratégiques séquentielles, imaginons la situation suivante. Soit deux joueurs, A et B. Le joueur A choisit entre trois stratégies a, b ou c. Le joueur B observe le choix de A et décide de jouer d ou e.

L'ensemble des stratégies du joueur A est : $S_A = \{a, b, c\}$. En revanche l'ensemble des stratégies du joueur B n'est pas simplement $\{d, e\}$. En effet, le joueur B observe le choix de A. Une stratégie pour B n'est pas de dire s'il joue d ou e mais s'il joue d ou e après a, b et c. Il est intéressant de noter que le joueur B n'attend pas d'observer le choix de A pour déterminer sa stratégie. Il la détermine à l'avance sachant qu'il peut la faire dépendre de ce que jouera A. Cela signifie que l'ensemble des stratégies pures de B est composé de 8 éléments ($2^3 = 8$). Soit $S_B = \{ddd, dde, ded, dee, edd, ede, eed, eee\}$. Bien entendu, nous aurions pu nommer les stratégies de B $b_1, \ldots, b_8$ ou de n'importe qu'elle autre manière. Toutefois, la notation xyz indique plus clairement le choix de B après chacune des actions de A. En particulier, la stratégie ded signifie que B joue d après a ou c et e après b.

Enfin, s'il est supposé que les paiements sont les suivants : $u_A(a,d) = 7$, $u_A(a,e) = 2$, $u_A(b,d) = 0$, $u_A(b,e) = 7$, $u_A(c,d) = 1$, $u_A(c,e) = 2$, $u_B(a,d) = 4$, $u_B(a,e) = 2$, $u_B(b,d) = 1$, $u_B(b,e) = 1$, $u_B(c,d) = 5$, $u_B(c,e) = 6$, alors il est possible de représenter ce jeu sous la forme d'une matrice comme dans la table 1.1.

		Joueur B							
		ddd	dde	ded	dee	edd	ede	eed	eee
	a	$(7,4)$	$(7,4)$	$(7,4)$	$(7,4)$	$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$
Joueur A	b	$(0,1)$	$(0,1)$	$(7,1)$	$(7,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(7,1)$	$(7,1)$
	c	$(1,5)$	$(2,6)$	$(1,5)$	$(2,6)$	$(1,5)$	$(2,6)$	$(1,5)$	$(2,6)$

TAB. 1.1 – Jeu entre A et B sous forme normale

Il est alors facile de vérifier que les équilibres de Nash en stratégies pures sont donc : (a, ddd), (a, dde), (a, ded), (a, dee) (c'est-à-dire les équilibres où le joueur A joue a et où le joueur B joue d après a et n'importe quoi après b ou c) puis (b, ded), (b, dee), (b, eed), (b, eee) (c'est-à-dire les équilibres où le joueur A joue b et où le joueur B joue e après b et n'importe quoi après a ou c) mais aussi (c, ede) un équilibre plus surprenant où le joueur A joue c et le joueur B joue e après a, d après b et e après c. Soit un total de 9 équilibres de Nash en stratégies pures.

UN JEU SOUS FORME EXTENSIVE décrit les interactions stratégiques à l'aide d'un arbre. Comme pour la forme normale la liste I des joueurs est essentielle. La grande différence est que le jeu n'est pas construit de telle sorte à ce que tous les joueurs choisissent leur stratégie simultanément. Grâce à des labels, l'arbre du jeu indique l'ordre dans lequel les joueurs jouent et les choix à leur disposition à chaque fois qu'ils jouent. Du fait du caractère séquentiel, le problème de l'information est crucial : quelle est l'information (sur les actions passées) disponible pour un joueur ?

La description d'un jeu sous forme extensive comprend sept éléments (certains pouvant être vide). Un ensemble I de joueurs, un arbre de jeu T (possédant certaines propriétés que nous allons détailler), une affectation des nœuds non terminaux entre les joueurs, des ensembles d'information reliant certains nœuds entre eux, pour chaque nœud terminal un vecteur de paiements et pour chaque nœud où la nature joue une distribution de probabilité sur les actions à sa disposition.

L'ensemble des joueurs est noté $I = \{1, 2, ..., n\}$ où n est le nombre de joueurs. Un joueur quelconque est repéré par un indice $i \in I$.

L'arbre de jeu noté T est défini à partir des concepts suivants. Soit O un ensemble de nœuds (n'importe quelle collection de points) et soit $\prec$ un ordre partiel sur O, $o_k \prec o_l$ signifie que le nœud o_k précède le nœud o_l. La relation $\prec$ est supposée asymétrique (si $o \prec o'$ est vraie, alors $o' \prec o$ est fausse), transitive (si $o \prec o'$ et $o' \prec o''$, alors $o \prec o''$) et telle que si un nœud a deux prédécesseurs, alors ils sont ordonnés ($o \prec o'$ et $o'' \prec o'$ et si $o \neq o''$, alors soit $o \prec o''$ soit $o'' \prec o$). On note $P(o)$ l'ensemble des prédécesseurs de o : $P(o) = \{o' \in O : o' \prec o\}$. On note $S(o)$ l'ensemble des successeurs de o : $S(o) = \{o' \in O : o \prec o'\}$. On note r l'unique (par hypothèse) nœud qui n'a pas de prédécesseurs (racine ou nœud initial). On appelle F l'ensemble des nœuds qui n'ont pas de successeurs (nœuds finaux ou terminaux). On appelle X l'ensemble des nœuds qui ne sont pas terminaux ($X = O \setminus F$). Pour chaque $o \in O \setminus \{r\}$ on note $p(o)$ l'unique prédécesseur immédiat de o (c'est-à-dire $p(o)$ tel que $p(o) \prec o$ et quel que soit o' tel que $o' \prec o$, alors soit $o' = p(o)$ soit $o' \prec p(o)$). Pour tout $x \in X$ on note $s(x)$ l'ensemble de ses successeurs immédiat ($s(x) = \{o \in O : p(o) = x\}$).

L'affectation des nœuds non terminaux de T aux joueurs s'effectue à l'aide d'une fonction $\varphi(.)$ qui à chaque élément x de X associe un élément de $\{N\} \cup I$. C'est-à-dire que chaque nœud non terminal est affecté soit à l'un des I joueurs soit à un joueur additionnel appelé la nature et noté N qui sert à modéliser les coups aléatoires.

Pour chaque nœud non terminal il y a un nombre fini d'actions possibles qui permettent de passer de ce nœud à l'un de ses successeurs immédiats. Soit $x \in X$, on note $A(x)$ l'ensemble de ces actions (une liste de noms, un nom pour chaque action). Il existe une bijection entre $A(x)$ et $s(x)$, c'est-à-dire que chaque action permet d'atteindre un et seul successeur immédiat et que chaque successeur immédiat peut être atteint à l'aide d'une et une seule action.

Les ensembles d'information des joueurs forment une partition, notée E, de l'ensemble X des nœuds non terminaux telle que si deux éléments x et x' appartiennent à un même ensemble d'information, alors $x \notin P(x')$, $x' \notin P(x)$, $\varphi(x) = \varphi(x')$, et $A(x) = A(x')$. Si deux nœuds sont dans le même ensemble d'information, alors ni l'un ni l'autre n'est un prédécesseur de l'autre, le même joueur est affecté à ces deux nœuds et enfin les mêmes actions sont disponibles à ces deux nœuds. Les ensembles d'information permettent de modéliser l'idée qu'un joueur peut devoir choisir une action dans l'ignorance d'un ou de plusieurs coups qui ont été joué avant lui par d'autres joueurs (y compris la Nature). Soit E_i l'ensemble des ensembles d'information du joueur i, $E_i = \{e \in E / \forall x \in e, \varphi(x) = i\}$. Soit e_i un élément de E_i, par un léger abus de notation, on note $\varphi(e_i)$ l'identité du joueur qui choisit une action et $A(e_i)$ l'ensemble des actions disponibles à cet ensemble d'information.

Pour chaque nœud terminal $f \in F$, un vecteur de paiements $(u_1(f), \ldots, u_i(f), \ldots, u_n(f))$ spécifiant pour chaque joueur son utilité lorsque le jeu s'arrête à ce nœud.

Pour chaque nœud où la Nature joue, c'est-à-dire pour tout $x \in X$ tel que $\varphi(x) = N$, une distribution de probabilité sur les éléments de $A(x)$.

Il s'agit maintenant de définir une stratégie pour un joueur. **Dans un jeu sous forme extensive, une stratégie pour un joueur consiste en le choix d'une action pour chacun de ses ensembles d'information.** Formellement : soit A_i l'ensemble des actions du joueur i, $A_i = \{A(e_i) / e_i \in E_i\}$. Une stratégie pure est une fonction s_i qui a tout élément e_i de E_i associe une action $s_i(e_i)$ dans $A(e_i)$. L'ensemble S_i des stratégies pures du joueur i s'écrit : $S_i = \underset{e_i \in E_i}{\times} A(e_i)$. Une stratégie $s_i \in S_i$ est simplement une liste d'actions, une action par ensemble d'information. Le nombre de stratégies pures du joueur i noté $\#S_i$ est donc $\#S_i = \prod_{e_i \in E_i} \#A(e_i)$. Remarquons que ces stratégies pures peuvent s'interpréter comme des stratégies pures du jeu sous forme extensive, ou alors comme des stratégies pures d'un jeu sous forme normale construit à partir du jeu sous forme extensive.

Soit $S = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}}$ l'ensemble des stratégies pures de tous les joueurs. Étant donné s un élément de S, et les distributions de probabilité sur les coups joués par la Nature, il est possible de calculer la probabilité avec laquelle chaque nœud terminal est atteint et donc l'espérance d'utilité de chaque joueur. Une stratégie mixte pour le joueur i se définit comme le choix aléatoire d'un élément de S_i. Cette approche n'est toutefois pas très intuitive dans le cadre d'un jeu sous forme extensive. Plutôt que de choisir de manière aléatoire des plans d'actions (une action pour chaque ensemble d'information où il doit jouer), on peut imaginer qu'un joueur choisisse de manière aléatoire à chaque ensemble d'information parmi les actions disponibles. Faire ainsi s'appelle jouer une *stratégie comportementale*. À chaque ensemble d'information e_i du joueur i on peut associer $\Delta(A(e_i))$ l'ensemble des distributions de probabilité sur $A(e_i)$. Une stratégie comportementale b_i du joueur i est un élément de $\underset{e_i \in E_i}{\times} \Delta(A(e_i))$. Dans un jeu sous forme extensive tel que nous l'avons décrit (c'est-à-dire avec mémoire parfaite : chaque joueur se souvient de tout ce qu'il a fait et de tout ce qu'il a observé) les stratégies comportementales sont équivalentes aux stratégies mixtes.

Exemple d'un jeu sous forme extensive : Reprenons l'exemple donné pour illustrer la forme normale. Soit deux joueurs, A et B. Le joueur A choisit entre trois stratégies a, b ou c. Le joueur B observe le choix de A et décide de jouer d ou e. Les paiements sont les suivants : $u_A(a,d) = 7$, $u_A(a,e) = 2$, $u_A(b,d) = 0$, $u_A(b,e) = 7$, $u_A(c,d) = 1$, $u_A(c,e) = 2$, $u_B(a,d) = 4$, $u_B(a,e) = 2$, $u_B(b,d) = 1$, $u_B(b,e) = 1$, $u_B(c,d) = 5$, $u_B(c,e) = 6$. La figure 1.1 présente l'arbre de ce jeu.

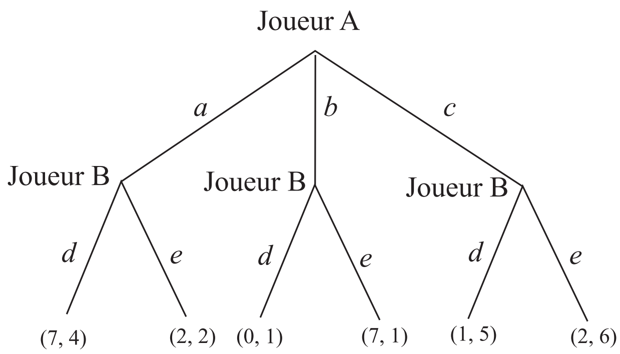


FIG. 1.1 – Jeu entre A et B sous forme extensive

De la racine de l'arbre partent trois branches notées a, b et c. La racine porte le label "Joueur A" indiquant que c'est à lui de choisir à ce nœud. Au bout de chacune de ces trois branches, se trouve un nœud portant le label "Joueur B" puisqu'il doit y prendre une décision. De chacun de ces trois nœuds partent deux branches notées d et e au bout desquelles se trouvent les paiements des deux joueurs. Le premier chiffre de chaque parenthèse correspond au paiement du joueur A, et le second à celui du joueur B.

Sous jeux et équilibre sous-jeux parfait : une question importante est celle de la sélection d'un équilibre de Nash particulier lorsqu'un jeu en possède plusieurs. Une première manière de réduire le nombre des équilibres est d'utiliser la notion d'équilibre de Nash sous-jeux parfait introduite par Selten (1965)[5].

À partir d'un jeu G décrit sous forme extensive par un arbre T, on définit un sous-jeu SG de G à partir de tout arbre ST "issu" de T. Pour cela, il suffit de prendre un nœud de T qui soit son propre ensemble d'information ainsi que tout ses successeurs à condition de ne couper aucun ensemble d'information. Formellement, si x est nœud de ST et si x' appartient dans T au même ensemble d'information que x, alors x' doit aussi appartenir à ST. Tout jeu possède lui même comme sous-jeu.

Soit β un vecteur de stratégies comportementales formant un équilibre de Nash du jeu décrit par l'arbre T. Il s'agit d'un équilibre sous-jeux parfait si la restriction de β à tout sous-jeu de T est un équilibre de Nash de ce sous-jeu.

Exemple : sous-jeux d'un jeu sous forme extensive. Soit le jeu décrit par l'arbre de la figure 1.2.

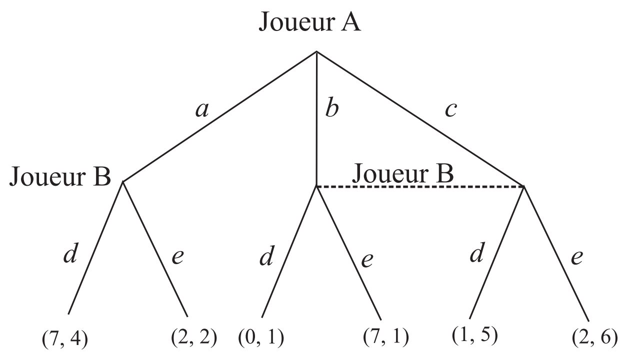


Fig. 1.2 – Jeu et sous-jeux

Ce jeu ne possède que deux sous-jeux : lui-même et le sous-jeu débutant après le choix a par le joueur A. En revanche il est impossible de couper l'ensemble d'information où le joueur B sait que A a joué b ou c.

[5]"Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit", *Zeitschrift für die gesante Staatswissenschaft*, 12, pages 301-324.

Les exercices de ce chapitre illustrent les concepts de base de la théorie des jeux non-coopératifs. Théorie sur laquelle s'appuie l'économie industrielle.

Les exercices de ce chapitre explorent les notions d'équilibre de Nash et d'équilibre de Nash sous-jeux parfait. Plus précisément, les exercices 1.1 et 1.2 proposent à partir d'une description littéraire de construire la forme extensive et la forme normale d'un (ou plusieurs) jeu(x) et d'en trouver les équilibres de Nash. De manière plus ludique les exercices **??**, **??** et **??** s'intéressent à des jeux de société. Les exercices 1.3, 1.6, 1.10 et 1.2 présentent des jeux à deux joueurs assez classiques. Le thème complexe de la connaissance commune est effleuré avec les exercices 1.4 et 1.5. Un grand groupe d'exercices traite de l'importante question de l'équilibre sous-jeux parfait (et de l'élimination itérative des stratégies strictement dominées) : 1.3, 1.7, 1.8, 1.9, 1.11, **??** (avec un côté ludique), 1.13 (en partant de la forme extensive d'un jeu), 1.14 et 1.15. L'exercice 1.12 permet de dériver des fonctions de meilleures réponses dans un contexte continu. Enfin, l'exercice 1.16 retrouve la démonstration de l'existence de l'équilibre de Nash par Nash.

1.1 Travail ou repos ? *

Objectif de l'exercice : À partir d'une description littéraire, représenter un jeu sous forme extensive et sous forme normale, en déterminer les équilibres de Nash. L'accent est aussi mis sur l'ordre dans lequel les décisions sont prises.

Deux étudiants (A et B) doivent "coopérer" afin d'obtenir une bonne note. Chacun possède deux options : "travailler" (T) ou se "reposer" (R). Le travail est coûteux mais il l'est plus pour B que pour A. Le travail est récompensé mais il existe une externalité : si l'un travaille et l'autre se repose, ce dernier bénéficie du travail du premier (par exemple : rédaction d'un mémoire commun, possibilité de copier, ...). Toutefois, des deux étudiants, B apprécie plus une bonne note que A (par exemple : A a déjà eu des bonnes notes, alors que B a eu de mauvaises notes). Si les deux travaillent la note est meilleure : A obtient une utilité de 6 et B une utilité de 8. Si A est le seul à travailler, la note est intermédiaire et les utilités sont : 4 pour A et 12 pour B (note moyenne mais il bénéficie de loisirs). Si B est le seul à travailler, la note est à nouveau moyenne et les utilités sont : 7 pour A (qui se repose) et 6 pour B. Enfin, si personne ne travaille, ils obtiennent tous les deux une utilité nulle.

1. *Construire l'arbre du jeu lorsque A prend le premier la décision (irréversible) de travailler ou de se reposer, tandis que B observe le choix de A avant d'adopter une stratégie. Le résoudre à l'aide de la* récurrence arrière. *Représenter ce jeu sous forme normale et déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures.*
2. *Construire l'arbre du jeu lorsque B prend le premier la décision (irréversible) de travailler ou de se reposer, tandis que A observe le choix de B avant d'adopter une politique. Le résoudre à l'aide de la* récurrence arrière. *Représenter ce jeu sous forme normale et déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures.*
3. *Construire l'arbre du jeu lorsque A et B prennent simultanément la décision (irréversible) de travailler ou de se reposer. Représenter ce jeu sous forme normale et en déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures.*

Correction

1. La figure 1.3 représente l'arbre du jeu lorsque A prend le premier la décision (irréversible) de travailler ou de se reposer, tandis que B observe le choix de A avant d'adopter une politique. La résolution par *récurrence arrière* se déroule de la manière suivante : si A a choisi de travailler, alors B a le choix entre travailler lui aussi et gagner 8 ou se reposer et gagner 12. Il préfère donc se reposer si A travaille. En revanche si A se repose la comparaison de 0 avec 6 conduit B a préférer travailler. Lorsque A détermine son choix, il anticipe ce comportement de B, il doit donc choisir entre travailler (suivi du repos de B) qui rapporte 6 ou se reposer (suivi du travail de B) ce qui lui fait

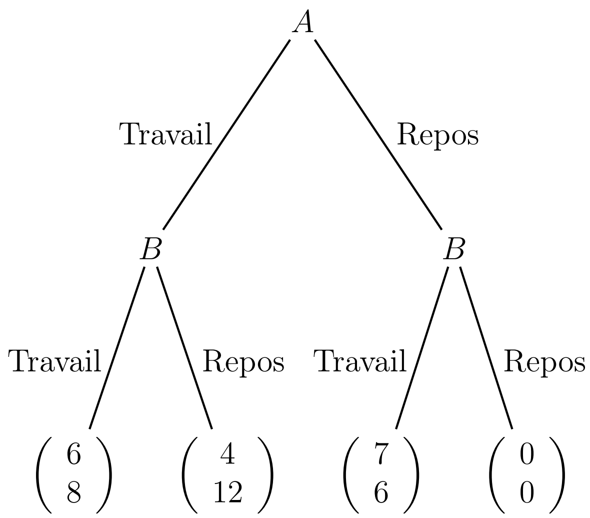


Fig. 1.3 – Arbre du jeu où A choisit en premier

gagner 7. Il choisit donc de se reposer. La *récurrence arrière* conduit donc à l'équilibre de Nash : A se repose, B travaille si A se repose et B se repose si A travaille. Il s'agit d'un équilibre de Nash sous-jeux parfait.

Pour écrire le jeu sous forme normale, il faut déterminer les stratégies de chaque joueur. Le joueur A ne joue qu'à un seul ensemble d'information (le nœud initial) et doit choisir entre travailler ou se reposer. Il possède donc deux stratégies, $S_A = \{\text{T, R}\}$. Le joueur B, en revanche, doit prendre une décision à deux ensembles d'information : le nœud après le choix Travail de A et celui après Repos. À chacun de ces nœuds, il dispose de deux actions. Il possède donc au total $2 = 4$ stratégies, $S_B = \{\text{TT, TR, RT, RR}\}$. La stratégie TT pour B signifie que B travaille si A travaille (premier T) et aussi si A se repose (deuxième T).

Le jeu sous forme normale se présente, finalement, comme dans la table 1.2.

		B			
		TT	TR	RT	RR
A	T	$(6, 8)$	$(6, 8)$	$(4, 12)$	$(4, 12)$
	R	$(7, 6)$	$(0, 0)$	$(7, 6)$	$(0, 0)$

Tab. 1.2 – Forme normale du jeu où A choisit en premier

L'étude de cette forme normale montre que le jeu où A choisit en premier possède trois équilibres de Nash en stratégies pures : (R, RT) (l'équilibre de Nash obtenu par *récurrence arrière*), (R, TT) (qui aboutit aux mêmes paiements que l'équilibre précédent mais qui n'est pas sous-jeu parfait) et (T, RR) équilibre où (bien qu'il joue en premier) A travaille car il anticipe que B va se reposer dans tous les cas. Évidemment, ce dernier équilibre n'est pas sous-jeux parfait.

2. La figure 1.4 représente l'arbre du jeu lorsque B prend en premier la décision (irréversible) de travailler ou de se reposer, tandis que A adopte une politique après avoir observé le choix de B. Dans les paiements le premier nombre représente l'utilité de A et le second l'utilité de B. La résolution par *récurrence*

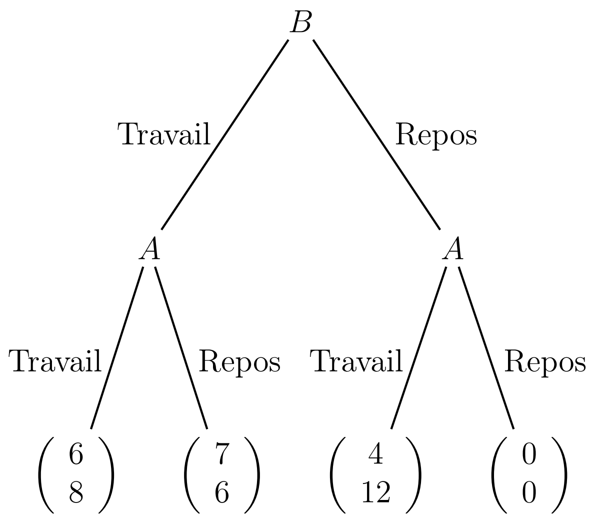


FIG. 1.4 – Arbre du jeu où A choisit en premier

arrière se déroule de la manière suivante : si B a choisi de travailler, alors A a le choix entre travailler et gagner 6 ou se reposer et gagner 7. Il préfère donc se reposer si B travaille. En revanche si B se repose la comparaison de 0 avec 4 conduit A à préférer travailler. Lorsque B détermine son choix, il anticipe ce comportement de A, il doit donc choisir entre travailler (suivi du repos de A) qui rapporte 6 ou se reposer (suivi du travail de A) ce qui lui fait gagner 12. Il choisit donc de se reposer. La *récurrence arrière* conduit donc à l'équilibre de Nash : B se repose, A travaille si B se repose et A se repose si B travaille. Il s'agit d'un équilibre de Nash sous-jeux parfait.
Sous forme normale le jeu se présente comme dans la table 1.3. La stratégie TT pour A signifie que A travaille si B travaille (premier T) et aussi si B se repose (deuxième T). L'étude de la forme normale montre que le jeu où

		B	
		T	R
A	TT	$(6,8)$	$(4,12)$
	TR	$(6,8)$	$(0,0)$
	RT	$(7,6)$	$(4,12)$
	RR	$(7,6)$	$(0,0)$

TAB. 1.3 – Forme normale du jeu où B choisit en premier

B choisit en premier possède trois équilibres de Nash en stratégies pures : (RT,R) (l'équilibre de Nash obtenu par *récurrence arrière*), (TT,R) (qui aboutit aux mêmes paiements que l'équilibre précédent mais qui n'est pas sous-jeu parfait) et (RR,T) équilibre où bien qu'il joue en premier B travaille car il anticipe que A va se reposer dans tous les cas. Évidemment, ce dernier équilibre n'est pas sous-jeu parfait.

3. Lorsque A et B doivent choisir simultanément le jeu se représente à l'aide de l'arbre de la figure 1.5. La double ligne de pointillés qui relie les deux B signifie qu'ils appartiennent à un même ensemble d'information : B ignore où il se trouve lorsqu'il prend sa décision. La *récurrence arrière* ne permet pas

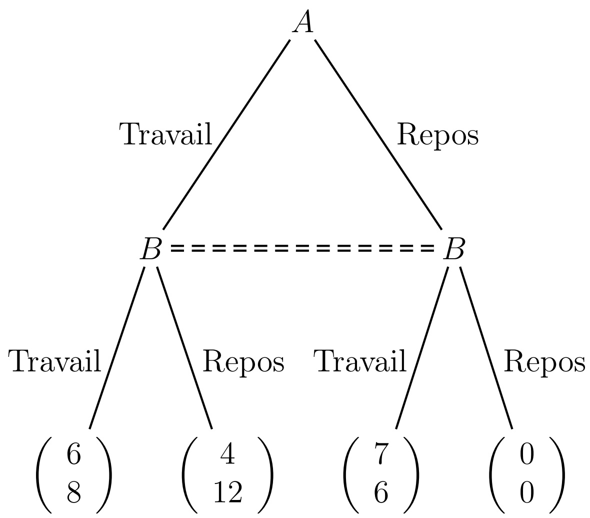


FIG. 1.5 – Arbre du jeu où A et B choisissent simultanément

de trouver d'équilibre de Nash dans ce jeu. Pour déterminer les équilibres de Nash de ce jeu simultané, il est préférable d'étudier la forme normale qui se décrit à l'aide de la table 1.4. Il est important de noter que le joueur B n'a ici que deux stratégies. En effet, il n'est appelé à prendre une décision qu'à un seul ensemble d'information (contrairement au jeu de la question 1) où il n'a que deux actions possibles.

		B	
		T	R
A	T	$(6,8)$	$(4,12)$
	R	$(7,6)$	$(0,0)$

TAB. 1.4 – Forme normale du jeu où A et B choisissent simultanément

Il est immédiat que ce jeu possède deux équilibres de Nash en stratégies pures : (R,T) (A se repose et B travaille) ou (T,R) (A travaille et B se repose). Un problème de coordination surgit puisque les deux étudiants ne préfèrent pas le même équilibre (dans les jeux séquentiels, il n'existe qu'un seul équilibre de Nash sous-jeux parfait, donc ce problème de coordination n'apparaît pas).

1.2 Résolution d'un jeu 2 X 2*

Objectif de l'exercice : S'entraîner à calculer tous les équilibres de Nash d'un jeu (stratégies pures, mixtes) avec deux joueurs et deux stratégies par joueur. Tracer les correspondances de meilleures réponses.

1. *Calculer tous les équilibres de Nash en stratégies pures et mixtes du jeu "bataille des sexes" dont la forme normale est donnée dans la table 1.5. Tracer les correspondances de meilleures réponses de chaque joueur. Le nom du jeu vient du fait qu'il est associé à l'histoire suivante : un couple (composé d'une femme et d'un homme) doit se coordonner sur le choix d'un spectacle. La femme préfère voir un spectacle de football (F) tandis que l'homme préfère aller à l'opéra (O). Toutefois ils préfèrent tous les deux être ensembles plutôt que seuls.*

		J2	
		F	O
J1	O	$(0,0)$	$(4,1)$
	F	$(1,4)$	$(0,0)$

Tab. 1.5 – Bataille des sexes

2. *Déterminer les équilibres de Nash du jeu de la table 1.6.*

		J2	
		G	D
J1	H	$(4,4)$	$(0,0)$
	B	$(4,1)$	$(4,0)$

Tab. 1.6 – Issue évidente ?

3. *Déterminer les équilibres de Nash du jeu de la table 1.7 et tracer les correspondances de meilleures réponses de chaque joueur.*

		J2	
		A	NA
J1	E	$(0,1)$	$(2,2)$
	NE	$(1,4)$	$(1,4)$

Tab. 1.7 – Jeu d'entrée

4. *Déterminer les équilibres de Nash du jeu de la table 1.8.*
5. *Déterminer les équilibres de Nash du jeu de la table 1.9 et tracer les correspondances de meilleures réponses de chaque joueur.*

		J2 G	J2 D
J1	H	$(1,-1)$	$(3,0)$
J1	B	$(4,2)$	$(0,-1)$

Tab. 1.8 – Jeu à résoudre

		J2 G	J2 D
J1	H	$(1,4)$	$(0,2)$
J1	B	$(1,2)$	$(0,4)$

Tab. 1.9 – Jeu avec une drôle de fonction de meilleure réponse

Correction

1. Ce jeu possède deux équilibres de Nash en stratégies pures : (O,O) et (F,F) ainsi qu'un équilibre en stratégies mixtes : $\left(\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)\right)$. Dans cet équilibre, la stratégie de J1 (resp. J2) consiste à jouer l'action O (resp. F) avec une probabilité 4/5 et l'action F (resp. O) avec une probabilité 1/5.

   Pour montrer cela, calculons la correspondance de meilleures réponses de J1 à une stratégie $(\beta,\ 1-\beta)$ de J2 c'est-à-dire une stratégie où J2 joue F avec une probabilité β et O avec une probabilité $1-\beta$. Si J1 joue l'action O, son utilité s'écrit (en espérance) :

   $$0\beta + 4\,(1-\beta)$$

   Si, au contraire, J1 joue F, son utilité s'écrit (en espérance) :

   $$1\beta + 0\,(1-\beta)$$

   En notant α la probabilité avec laquelle J1 joue l'action O, J1 doit maximiser sur $\alpha \in [0,1]$ son espérance d'utilité totale, à savoir

   $$\alpha\,(0\beta + 4\,(1-\beta)) + (1-\alpha)\,(1\beta + 0\,(1-\beta)) = \alpha\,(4-5\beta) + \beta$$

   ce qui conduit à :

   $$\alpha^*(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta < 4/5 \\ \in [0,1] & \text{si } \beta = 4/5 \\ 0 & \text{si } \beta > 4/5 \end{cases}$$

   En effet, si $\beta = 4/5$, alors J1 est indifférent entre O et F et n'importe quelle valeur de α maximise l'utilité de J1.

   De manière symétrique, l'espérance d'utilité de J2 s'écrit :

   $$\beta\,(0\alpha + 4\,(1-\alpha)) + (1-\beta)\,(1\alpha + 0\,(1-\alpha)) = \beta\,(4-5\alpha) + \alpha$$

   dont la maximisation (sur β) conduit à :

   $$\beta^*(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < 4/5 \\ \in [0,1] & \text{si } \alpha = 4/5 \\ 0 & \text{si } \alpha > 4/5 \end{cases}$$

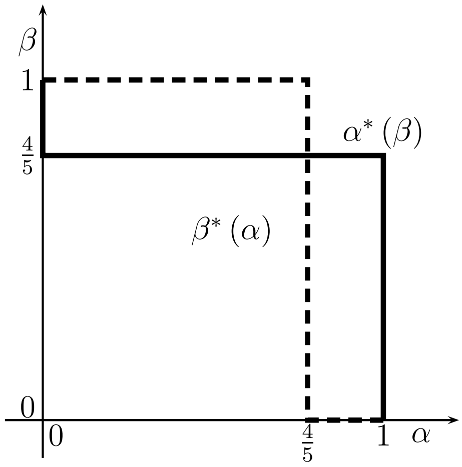


FIG. 1.6 – Correspondances de meilleures réponses du jeu bataille des sexes

La figure 1.6 montre ces correspondances de meilleures réponses ainsi que leurs intersections c'est-à-dire les équilibres de Nash.

2. Dans le jeu de la table 1.6, la stratégie D de J2 est strictement dominée par la stratégie G. Elle peut donc être éliminée pour l'étude des équilibres de Nash. Une fois cette élimination faite, J1 est indifférent entre H et B. Ce jeu possède donc deux équilibres de Nash en stratégies pures : (H,G) et (B,G), plus un continuum d'équilibres de Nash en stratégies mixtes du type : $((\alpha, 1-\alpha), (1,0))$, c'est-à-dire où J1 choisit une combinaison aléatoire de H et B tandis que J2 joue G qui est sa stratégie strictement dominante.
3. Le jeu de la table 1.7 possède comme équilibre de Nash : (E,NA), (NE,A) ainsi que des équilibres de la forme $((0,1), (\beta, 1-\beta))$ où $\beta \geq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire où J1 joue NE et J2 joue A avec la probabilité β et NA avec la probabilité complémentaire. Les correspondances de meilleures réponses sont représentées sur la figure 1.7.

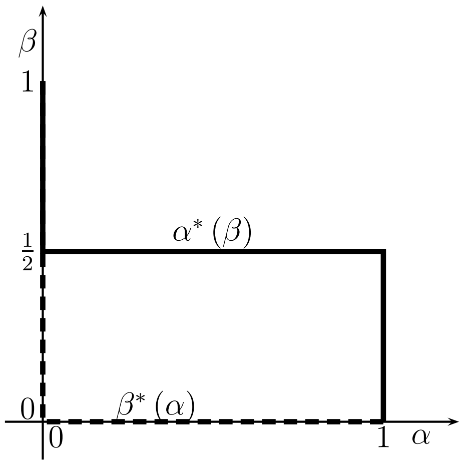


FIG. 1.7 – Correspondances de meilleures réponses du jeu 1.7

4. Le jeu de la table 1.8 possède trois équilibres de Nash. Tout d'abord deux équilibres en stratégies pures faciles à identifier : (H,D) et (B,G) puis un

équilibre en stratégies mixtes du type $((\alpha, 1-\alpha), (\beta, 1-\beta))$. Pour trouver les valeurs de α et de β, il est possible de raisonner comme dans la question 1 (utiliser les correspondances de meilleures réponses). Une autre manière de faire consiste à remarquer si un joueur utilise une stratégie (strictement) mixte, c'est qu'il est indifférent entre les actions sur lesquelles il mixte. Cette méthode (très générale) a l'avantage de permettre un calcul plus rapide des équilibres de Nash en stratégies mixtes (que la méthode des correspondances de meilleures réponses) mais elle ne permet pas de trouver les équilibres de Nash en stratégies pures.

Si J2 joue de manière aléatoire G ou D c'est qu'il est indifférent entre les deux et que donc l'espérance d'utilité s'il joue G est égale à l'espérance d'utilité s'il joue D. D'où

$$-\alpha + 2(1-\alpha) = -(1-\alpha)$$

soit

$$\alpha = \frac{3}{4}$$

De la même manière, J1 est indifférent entre H et B si et seulement si

$$\beta + 3(1-\beta) = 4\beta$$

soit

$$\beta = \frac{1}{2}$$

D'où l'équilibre de Nash en stratégies (strictement) mixtes $\left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

5. Dans le jeu de la table 1.9, J1 est indifférent entre jouer H ou B. Soit β la probabilité avec laquelle J2 joue G et $1-\beta$ celle avec laquelle il joue D, quel que soit $0 \leq \beta \leq 1$, $\alpha^*(\beta) \in [0,1]$. Le graphe de la correspondance de meilleures réponses de J1 correspond donc à tout le carré $[0,1] \times [0,1]$ dans le plan (α, β).

   La correspondance de meilleures réponses de J2 s'obtient en maximisant sur β à α fixé l'espérance d'utilité de J2 qui s'écrit :

$$\beta(4\alpha + 2(1-\alpha)) + (1-\beta)(2\alpha + 4(1-\alpha)),$$

   ce qui conduit à :

$$\beta^*(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < \frac{1}{2} \\ \in [0,1] & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Les correspondances de meilleures réponses sont représentées sur la figure 1.8. Soit $\alpha \in [0,1]$, un équilibre de Nash du jeu 1.9 est de la forme $((\alpha, 1-\alpha), (\beta^*(\alpha),\ 1-\beta^*(\alpha)))$.

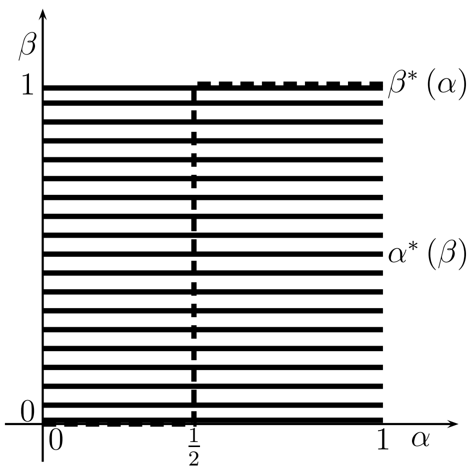


FIG. 1.8 – Correspondances de meilleures réponses du jeu 1.9

1.3 Jeu de l'ultimatum**

Objectif de l'exercice : Décrire sous forme extensive puis normale une interaction stratégique s'apparentant à un marchandage. Faire la distinction entre l'équilibre de Nash et l'équilibre de Nash sous-jeux parfait. Problème de la sélection d'un équilibre.

Un animateur donne 100 € à deux joueurs qui doivent s'entendre sur son partage. La règle est la suivante : le joueur 1 fait une proposition du type n pour lui et $100 - n$ pour l'autre avec $1 \leq n \leq 99$, puis le joueur 2 observe la proposition et l'accepte ou la refuse. S'il accepte, le partage a lieu comme entendu. S'il refuse personne ne gagne rien.

1. *Représenter le jeu sous forme extensive.*
2. *Représenter le jeu sous forme normale.*
3. *Montrer que toute proposition du joueur 1 peut faire partie d'un équilibre de Nash de ce jeu. Déterminer ensuite les équilibres de Nash sous-jeux parfaits.*

Correction

1. Le jeu commence par une proposition du joueur 1 c'est donc lui qui joue au nœud initial (racine de l'arbre). De cette racine partent 99 branches. En effet, le joueur 1 peut faire 99 propositions. Notons 99, 98, ..., 1 la proposition du joueur en premier lorsqu'il propose respectivement 99 pour lui et 1 pour le joueur 2, 98 pour lui et 2 pour l'autre ... Ceci définit 99 ensembles d'information (réduit à un nœud) puisque le joueur 2 observe la proposition du joueur 1. À chacun de ces ensembles d'information, le joueur 2 a le choix entre deux actions : accepter ou refuser. La figure 1.9 répond donc à la question. À chaque nœud termninal figurent les paiements des joueurs (le premier nombre correspond au paiement du joueur 1, le second à celui du joueur 2).

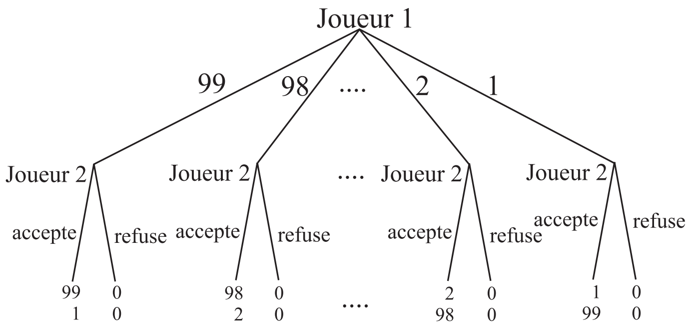


Fig. 1.9 – Forme extensive du jeu de l'ultimatum

2. Pour représenter le jeu sous forme normale il faut énumérer précisément les stratégies de chaque joueur. Le joueur 1 tout d'abord dispose de 99 stratégies : $S_1 = \{1, 2, \ldots, 98, 99\}$ où la stratégie n signifie qu'il propose un partage du

type n pour lui $100 - n$ pour l'autre. Une stratégie pour le joueur 2 est une liste de décisions d'accepter (a) ou de refuser (r) toute proposition possible du joueur 1. C'est-à-dire qu'une stratégie pour le joueur 2 est une liste de 99 éléments, chaque élément pouvant être égal à a ou à r. L'ensemble des stratégies du joueur 2 contient donc $2^{99} \simeq 6 \times 10^{29}$ stratégies de la forme $(aararr \ldots arr)$. Il est relativement difficile de représenter la matrice des paiements de ce jeu puisque sa taille est 99×2^{99}. Le tableau 1.10 en donne un aperçu.

		Joueur 2				
		$aa - aa$	$aa - ar$	$\ldots$	$rr - ra$	$rr - rr$
	1	$(1, 99)$	$(1, 99)$	$\ldots$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
	2	$(2, 98)$	$(2, 98)$	$\ldots$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Joueur 1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	98	$(98, 2)$	$(98, 2)$	$\ldots$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
	99	$(99, 1)$	$(0, 0)$	$\ldots$	$(99, 1)$	$(0, 0)$

TAB. 1.10 – Jeu de l'ultimatum sous forme normale

3. Ce jeu possède beaucoup d'équilibres de Nash. En fait toute proposition du joueur 1 peut être une proposition d'équilibre. Par exemple soit n, $1 \leq n \leq 99$ une proposition. Soit $s_2^* (n)$ la stratégie du joueur 2 qui consiste à refuser toute offre différente de n et à accepter n. Il est immédiat que le couple $(n, s_2^* (n))$ forme un équilibre de Nash de ce jeu puisqu'étant donné la stratégie de l'autre aucun joueur n'a de déviation profitable. Le concept d'équilibre de Nash ne fournit donc pas d'information pertinente sur l'issue du jeu.

   En revanche, ce jeu possède un unique équilibre de Nash sous-jeux parfaits. En effet, quelle que soit la proposition du joueur 1, le joueur 2 a une utilité strictement plus grande en acceptant qu'en refusant. Donc quel que soit le sous-jeu où se trouve le joueur 2, accepter est une stratégie strictement dominante. Le joueur 1 comprenant cela il propose le partage qui le favorise le plus : 99 pour lui et 1 pour le joueur 2.

   La situation est donc un peu paradoxale : si le concept d'équilibre de Nash est retenu pour prévoir l'issue de ce jeu, alors la leçon est que tout est possible. Si le concept retenu est l'équilibre de Nash sous-jeux parfaits, alors seule l'issue où le joueur 1 est le plus égoïste émerge. Cette dernière prédiction, bien que plus précise, n'est pas non plus satisfaisante car en pratique une telle proposition risque fort d'être refusée. Ce jeu a donc suscité une abondante littérature avec (en particulier) un grand nombre d'expériences afin de déterminer quels sont les équilibres sur lesquels se coordonnent des individus. Voir en particulier l'article de Shmuel Zamir "Rationality and Emotions in Ultimatum Bargaining", dans les *Annales d'Économie et de Statistiques*, 2001, Janvier/Mars, numéro 61, pages 1-31. Voir aussi l'article "Ultimatums, Dictators and Manners" de Colin F. Camerer et Richard H. Thaler dans le *Journal of Economic Perspectives* (numéro 9(2), Spring 1995, pages 209-19) ou encore l'article "Does Culture Matter in Economic Behavior ? Ultimatum Game Bargaining among the Machiguenga of the Peruvian Amazon" de Joseph Henrich dans l'*American Economic Review* (numéro 90(4), September 2000, pages 973-79) ainsi que les références données dans chacun de ces articles.

1.4 La couleur du chapeau***

Objectif de l'exercice : Souligner l'importance du concept de connaissance commune à travers une illustration légèrement paradoxale.

Trois enfants sont dans une pièce, l'animateur pose sur la tête de chacun d'eux un chapeau rouge. Les enfants ne peuvent pas voir la couleur de leur propre chapeau mais ils voient celle des deux autres. De plus, ils savent que la couleur est soit rouge soit blanc. L'animateur demande au premier enfant la couleur de son chapeau, puis au second puis au troisième. Personne ne peut répondre. L'animateur annonce alors qu'au moins un chapeau est rouge.

1. *L'animateur redemande au premier enfant s'il devine la couleur de son chapeau. Que doit-il répondre ?*
2. *L'animateur demande ensuite au second enfant qui a entendu la réponse du premier. Que doit-il répondre ?*
3. *L'animateur pose enfin cette question au troisième enfant qui a entendu les réponses des deux premiers. Que doit-il répondre ?*

Correction

1. Avant l'annonce de l'animateur chaque enfant fait face à la situation suivante : (? R R) c'est-à-dire qu'il ignore la couleur de son chapeau et voit deux chapeaux rouges. Il sait donc que le vrai état de la nature est soit (B R R) soit (R R R). L'affirmation de l'animateur semble donc ne rien apprendre aux enfants. En fait, avant l'affirmation tous savent qu'il y a au moins un chapeau rouge mais cela n'est pas connaissance commune. Après l'annonce, en revanche, cette information est connaissance commune et cela fait une énorme différence.

   Néanmoins le premier enfant est obligé d'avouer son ignorance. En effet, c'est seulement s'il voyait deux chapeaux blancs que l'affirmation de l'animateur lui aurait permis de découvrir qu'il avait un chapeau rouge.
2. La situation du second n'est pas identique à celle du premier, il sait maintenant (et cela est d'ailleurs connaissance commune) que le premier ne voit pas deux chapeaux blancs. Malheureusement cela ne lui sert à rien car il le savait déjà. Toutefois cela aurait pu lui servir s'il voyait un chapeau blanc sur la tête du troisième et un chapeau rouge (ou blanc) sur celle du premier. Puisque dans ce cas, sachant que le premier ne voyait pas deux blancs il en aurait déduit qu'il avait un rouge.
3. La fin de la réponse précédente montre que le troisième enfant en déduit qu'il a un chapeau rouge. En effet, s'il avait un chapeau blanc, nous venons de voir que le deuxième enfant aurait répondu qu'il avait un chapeau rouge. Or il ne l'a pas fait.

La figure 1.10 illustre le raisonnement du troisième enfant. Après la réponse du premier enfant, l'ensemble Bb est éliminé, après celle du second, l'ensemble B est éliminé. Il en résulte que le troisième sait qu'il est en H. Pour

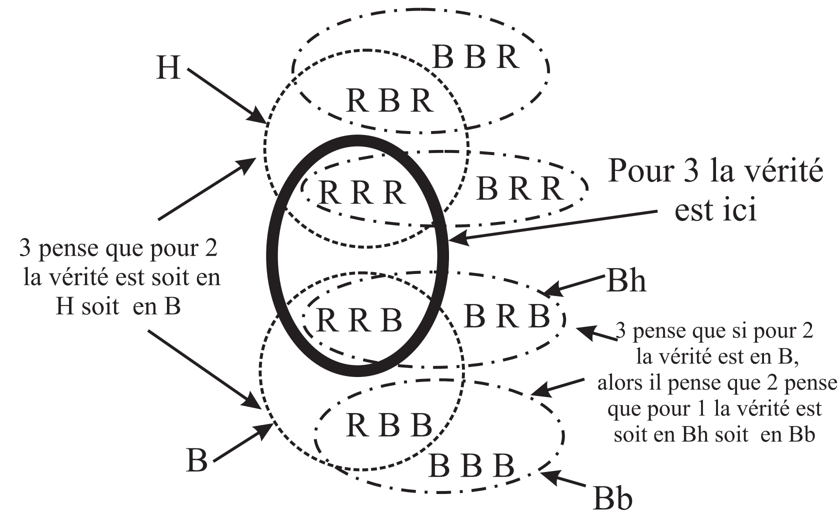


Fig. 1.10 – Pensées et pensées sur les pensées

plus d'exemples et d'explications sur la notion de connaissance commune voir, par exemple, l'article "Common Knowledge" de John Geanakoplos dans le *Journal of Economic Perspectives* (numéro 6(4), Fall 1992, pages 53-82).

1.5 Échanger ou ne pas échanger, là est la question***

Objectif de l'exercice : Comme pour l'exercice 1.4 étudier le rôle de l'information et souligner l'importance du concept de connaissance commune.

« Un riche laboureur, sentant sa fin prochaine, fit venir ses enfants, leur parla sans témoins[6]*. » Le père dit à ses deux fils qu'il a placé* 10^n € *dans une première enveloppe et* 10^{n+1} € *dans une seconde, avec n choisi de manière équiprobable entre 1 et 6. Le père donne de manière aléatoire une enveloppe à chacun de ses fils qui sont neutres vis-à-vis du risque. Le premier fils trouve* 10 000 € *tandis que le second trouve* 1 000 €*. Le père demande maintenant de manière privée à chacun des fils s'il veut échanger son enveloppe contre celle de son frère (il est connaissance commune qu'il suffit qu'un frère souhaite échanger pour que l'échange soit effectué).*

1. *Expliquer pourquoi chaque fils accepte. Le père dit alors à chaque fils que son frère accepte l'échange et demande s'il est toujours prêt à échanger. Expliquer pourquoi chaque frère dit encore oui. Le père transmet l'information à nouveau et pose pour la troisième fois la même question. Encore deux oui ! Expliquer pourtant pourquoi l'un des fils arrête de vouloir échanger au quatrième tour.*
2. *En revanche expliquez pourquoi chaque fils refuse d'échanger si l'échange ne peut avoir lieu si l'autre fils refuse.*

Correction

1. Remarquons que chacun des frères dispose d'une enveloppe contenant 10^n, $2 \leq n \leq 6$. S'il échange, il obtient avec une chance sur deux 10^{n+1} et avec une chance sur deux 10^{n-1}. S'il n'échange pas il garde 10^n. Son espérance de gain en échangeant est donc : $\frac{1}{2}10^{n+1} + \frac{1}{2}10^{n-1}$ qui est strictement supérieur à 10^n. En effet : $\frac{1}{2}10^{n+1} + \frac{1}{2}10^{n-1} = \frac{1}{2}10^{n-1}(100+1)$ soit $10^n\frac{101}{10}$. De plus si un fils observe 10 dans son enveloppe il veut clairement échanger. En revanche un individu qui tire 10^7 ne veut pas échanger, et c'est donc le seul dans cette situation. Cela explique pourquoi les frères trouvent l'échange profitable de prime abord.

   Lorsque le père les a informés que leur frère était aussi d'accord pour l'échange ils savent que celui-ci n'a pas une enveloppe contenant 10^7. Dans cette situation, un raisonnement similaire au précédent prouve que seul un individu avec 10^6 ne veut pas échanger à la deuxième étape. Comme ils ne sont pas dans cette situation, ils acceptent l'échange pour la seconde fois.

   Le fait que les deux acceptent deux fois rend connaissance commune qu'aucune enveloppe ne contient 10^6. Comme cela n'affecte toujours pas leur espé-

[6] Jean de La Fontaine, Le Laboureur et ses enfants, Livre cinquième, Fable 9.

rance de gain, ils acceptent l'échange à la troisième demande (seul quelqu'un avec 10^5 dans son enveloppe refuserait).

Cette troisième étape révèle donc maintenant qu'aucune enveloppe ne contient 10^5 ce qui décourage à la quatrième étape le propriétaire de l'enveloppe contenant 10^4 à échanger.

2. Si l'échange ne peut avoir lieu qu'en cas d'accord mutuel, alors chacun est satisfait de son sort. Pourquoi ? Celui qui a tiré 10^7 refuserait l'échange. Il en résulte qu'un individu possédant 10^6 n'a rien à gagner à proposer l'échange car si l'autre est d'accord c'est qu'il a 10^5. Il refuse donc aussi et ainsi de suite jusqu'à celui qui a 100. Seul celui qui découvre 10 est prêt à échanger mais il sait que l'autre n'acceptera pas.

1.6 Dilemme des prisonniers ?**

Objectif de l'exercice : Analyser une famille de jeux décrits sous forme normale. Relation entre équilibre de Nash et domination au sens de Pareto.

Considérons le jeu G_k décrit sous forme normale dans le tableau 1.11.

		J2 G	J2 D
J1	H	$\left(\frac{1+k}{2}, \frac{1+k}{2}\right)$	$(0,1)$
J1	B	$(1,0)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Tab. 1.11 – Forme normale du jeu G_k

1. *Déterminer les équilibres de Nash de ce jeu en fonction de k, $k \in \mathbb{R}$. Étudier également les issues Pareto dominantes.*
2. *Lorsque $0 < k < 1$, quelle est l'issue du jeu si chaque joueur est infiniment altruiste (c'est-à-dire qu'il maximise l'utilité de l'autre joueur) ? Que dire si les deux joueurs sont infiniment altruistes lorsque $-1 < k < 0$?*

Correction

1. Tout d'abord, remarquons que quelle que soit la valeur de k, le vecteur de stratégies (B, D) est un équilibre de Nash de ce jeu. En effet, si J1 (resp. J2) dévie de B vers H (resp. de D vers G), il gagne 0 au lieu de $\frac{1}{2} > 0$.

   Le seul autre vecteur candidat à être un équilibre de Nash en stratégies pures est (H, G). Pour que cela soit, effectivement, le cas, il faut que ni J1 ni J2 n'ait de déviation unilatérale profitable. C'est-à-dire que $\frac{1+k}{2} \geq 1$ soit $k \geq 1$.

   Il en résulte que si $k < 1$, alors ce jeu possède un unique équilibre de Nash : (B, D). Tandis que si $k \geq 1$, ce jeu a deux équilibres de Nash en stratégies pures : (B, D) et (H, G), plus un équilibre de Nash en stratégies mixtes : $\left(\left(\frac{1}{k}, \frac{k-1}{k}\right), \left(\frac{1}{k}, \frac{k-1}{k}\right)\right)$.

   Les correspondances de meilleures réponses ($\alpha^*(\beta)$ et $\beta^*(\alpha)$) sont représentées sur les figures 1.11 et 1.12.

   Remarquons que pour $0 < k < 1$, ce jeu est un "dilemme des prisonniers"[7].

---

[7] Le nom "dilemme des prisonniers" vient de l'histoire suivante : deux voleurs viennent d'être arrêtés. La police les interroge séparément. Elle ne dispose pas de suffisamment de preuves pour les impliquer mais si l'un des voleurs témoigne contre l'autre il bénéficie d'une clémence mais il fait condamner son complice. Imaginons que les stratégies H et G signifient "ne pas témoigner". La meilleure situation pour les prisonniers est celle où personne ne témoigne contre personne. Paradoxalement, il ne s'agit pas d'un équilibre de Nash. En effet, profitant de la cupidité des voleurs, la police incite l'un à dénoncer l'autre en lui octroyant une récompense en plus de la liberté. Il en résulte que les deux témoignent l'un contre l'autre (équilibre de Nash (B,D)) et ils finissent tous les deux en prison.

En effet, l'issue (H, G) domine au sens de Pareto[8] l'issue (B, D) mais il ne s'agit pas d'un équilibre de Nash.

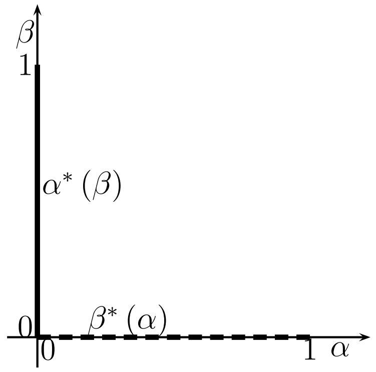


FIG. 1.11 – Correspondances de meilleures réponses pour $k < 1$

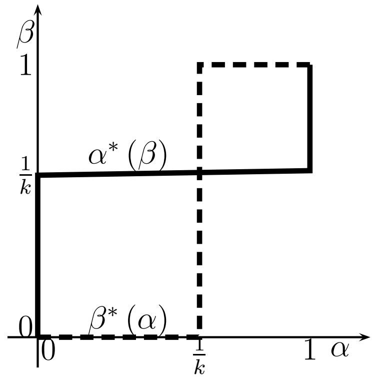


FIG. 1.12 – Correspondances de meilleures réponses pour $k \geq 1$

2. Si les joueurs sont infiniment altruistes, alors dès que $k > -1$, la stratégie H domine strictement la stratégie B du point de vue (altruiste) du joueur 1 et de même G domine strictement D. Il en découle que l'issue du jeu est dans ce cas (H, G). Cela est bénéfique pour les deux joueurs lorsque $0 < k < 1$ et cela permet d'éviter le dilemme des prisonniers.

   Ce résultat pourrait laisser croire, qu'il serait préférable (du point de vue des deux joueurs) que les deux joueurs soient (infiniment) altruistes plutôt qu'égoïstes (chercher à ne maximiser que sa propre fonction d'utilité). Toutefois cela est faux. En effet, une générosité aveugle pénalise les joueurs lorsque $-1 < k < 0$. Dans ce cas, ils joueraient (H,G) gagnant chacun $\frac{1+k}{2}$, alors que deux joueurs égoïstes gagneraient plus en jouant l'équilibre de Nash (B,D) qui rapporte à chacun $\frac{1}{2}$.

[8] Soit G un jeu sous forme normale, $G = \left(I, S = \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} S_i, (u_i)_{i=1 \text{ à } n}\right)$, on dit que l'issue (le vecteur de stratégies) $s \in S$ domine $s' \in S$ au sens de Pareto d'une part si pour tout j, $1 \leq j \leq n$, $u_j(s) \geq u_j(s')$ et d'autre part s'il existe i, $1 \leq i \leq n$ tel que $u_i(s) \geq u_i(s')$.

1.7 Stratégies strictement dominées**

Objectif de l'exercice : Utiliser l'élimination des stratégies strictement dominées pour déterminer (éventuellement) un équilibre de Nash.

1. *Étudier le jeu G_1 dont la forme normale est décrite dans la table 1.12 : existe-t-il des stratégies strictement dominées ? Déterminer ses équilibres de Nash en stratégies pures.*

		J2			
		A2	B2	C2	D2
J1	A1	$(10, 1)$	$(1, -2)$	$(2, -1)$	$(0, 0)$
	B1	$(-1, 0)$	$(9, 7)$	$(8, 8)$	$(0, 1)$
	C1	$(1, 2)$	$(4, 1)$	$(3, 0)$	$(0, 2)$
	D1	$(0, 0)$	$(8, 8)$	$(9, 9)$	$(1, 10)$

Tab. 1.12 – Jeu G_1 sous forme normale

2. *Même question pour le jeu G_2 décrit sous forme normale par la table 1.13.*

		J2		
		G	M	D
J1	A	$(1, 2)$	$(1, 1)$	$(5, 0)$
	B	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(2, 2)$
	C	$(2, 3)$	$(0, 2)$	$(4, 2)$

Tab. 1.13 – Forme normale du jeu G_2

3. *Dans une élection présidentielle à deux tours comme celle qui est organisée en France, voter pour son candidat préféré est une stratégie strictement dominante : au premier tour ? au second ? aux deux ? (Question informelle).*

Correction

1. Les joueur 1 et 2 n'ont aucune stratégie strictement dominée (pour vérifier cela il faut comparer une à une les stratégies de chaque joueur). L'élimination des stratégies strictement dominées ne conduit donc à aucun résultat. En revanche ce jeu possède deux équilibres de Nash en stratégies pures : (A1, A2) d'une part et (D1, D2) d'autre part.
2. Aucune stratégie de $S_1 = \{A, B, C\}$ n'est strictement dominée. Pour le joueur 2 en revanche la stratégie M est strictement dominée par la stratégie G, son ensemble de stratégies peut donc être réduit à $S_2 = \{G, D\}$. Tout d'abord cela semble insuffisant pour prédire l'issue de ce jeu. Pourtant nous faisons face à un “nouveau” jeu tel que représenté dans la table 1.14. Pour le

		J2	
		G	D
	A	$(1,2)$	$(5,0)$
J1	B	$(0,1)$	$(2,2)$
	C	$(2,3)$	$(4,2)$

Tab. 1.14 – Jeu 1.13 après 1 tour d'éliminations

joueur 1 la situation a été modifiée et maintenant, il apparaît que la stratégie B est strictement dominée par C. Cette élimination nous conduit au "nouveau" jeu de la table 1.15. Finalement, dans le jeu 1.15 la stratégie G domine

		J2	
		G	D
J1	A	$(1,2)$	$(5,0)$
	C	$(2,3)$	$(4,2)$

Tab. 1.15 – Jeu 1.13 après 2 tours d'éliminations

strictement la stratégie D du point de vue du joueur 2 et après ce troisième tour d'éliminations, la stratégie A devient strictement dominée par la stratégie C pour le joueur 1. Il en résulte que l'issue de ce jeu est (C, G). Puisque le processus d'élimination des stratégies strictement dominées converge vers un couple de stratégies unique, il s'agit de l'unique équilibre de Nash de ce jeu.

3. Au second tour il ne reste que deux candidats. Voter pour son candidat préféré est donc une stratégie strictement dominante. Autrement dit au second tour il est dans son intérêt de voter de manière sincère.

   En revanche, la situation est plus compliquée au premier tour où il peut être avantageux de ne pas voter de manière sincère. Cela tient au fait qu'il y a, en général, au premier tour plus que deux candidats. L'exemple suivant illustre ce point.

   Soient trois choix possibles : A, B et C et 8 électeurs divisés en trois types. Trois électeurs avec les préférences : $A \succ_1 B \succ_1 C$, deux électeurs avec $B \succ_2 A \succ_2 C$, et enfin trois électeurs du type $C \succ_3 B \succ_3 A$.

   Si tous les électeurs votent de manière sincère au premier tour A et C arrivent en tête et s'affrontent donc au second tour. Au cours de ce second tour, A l'emporte avec 5 voix contre 3.

   En revanche, si les électeurs du troisième type votent au premier tour pour B le second tour met en compétition A avec B auquel cas B l'emporte. Or, les électeurs du troisième type préfèrent B à A, ils n'ont donc pas intérêt à voter sincèrement au premier tour.

   De manière plus formelle, déterminons l'équilibre de Nash sous-jeux parfaits de ce jeu électoral. Il a déjà été établi qu'au second tour A perdait contre B mais l'emportait contre C et il est facile de voir que B l'emporte contre C.

Il en résulte que voter pour C au premier tour est une stratégie strictement dominée puisque C n'a aucune chance au second tour. Le premier tour se résume donc à choisir entre A et B. Il existe donc deux équilibres de Nash sous-jeux parfaits (symétriques au sens ou tous les électeurs d'un même type votent de la même manière, sans cette hypothèse il est possible de construire d'autres équilibres mais qui aboutissent au même résultat final) : tous les électeurs votent pour B au premier tour, ou les trois électeurs de type 1 votent A et les 5 autres votent B.

1.8 Limiter ses possibilités**

Objectif de l'exercice : Une restriction de l'ensemble des choix possibles ne saurait améliorer la situation d'un décideur isolé (en l'absence d'interactions stratégiques)[9]. Ce raisonnement ne fonctionne pas toujours dans le cadre d'un jeu où les choix d'un joueur interagissent avec ceux des autres. En présence d'interactions, s'engager à ne pas jouer une certaine stratégie quoi qu'il arrive peut conduire les autres joueurs à choisir des alternatives qui sont davantage favorables.

Jeu initial

		J2	
		G	D
J1	A	$(51, 50)$	$(101, 0)$
	B	$(50, 50)$	$(100, 100)$

Jeu où J1 a une pénalité

		J2	
		G	D
J1	A	$(0, 50)$	$(50, 0)$
	B	$(50, 50)$	$(100, 100)$

Tab. 1.16 – Jeu où une pénalisation améliore l'issue

1. *Trouver les équilibres de Nash du jeu initial de la table 1.16 et du jeu où J1 a une pénalité.*
2. *Trouver les équilibres de Nash du jeu initial de la table 1.16 modifié de telle sorte que le joueur 1 joue en premier et le joueur 2 en second après avoir observé le choix du joueur 1.*

Correction

1. Dans le jeu initial, la stratégie B est strictement dominée par la stratégie A. Une fois cette stratégie éliminée, la stratégie G domine strictement D et donc l'issue prévisible est (A, G) et il semble que les deux joueurs n'aient pu atteindre la situation plus favorable (B, D). La raison en est que si J1 anticipait que J2 joue D, il préférerait choisir A qui lui fait gagner 101 plutôt que 100. Pourtant J1 aimerait convaincre le J2 qu'il n'est pas cupide à ce point et qu'il ne serait pas prêt à gagner 1 si cela fait perdre 100 à l'autre. Non pas qu'il soit altruiste, mais parce que cette cupidité rationnelle conduit le J2 à sélectionner A et que cela réduit son gain. Dans le jeu où 1 s'impose une pénalité s'il joue A, cette difficulté a été résolue. Maintenant, la stratégie B domine strictement A et une fois cette dernière éliminée, D domine strictement G et l'issue prévisible devient (B,D). Cette pénalité permet à J1 de restreindre, en quelque sorte, l'ensemble de ses choix la stratégie A devenant

[9]En effet, si le choix A maximise l'utilité d'une personne lorsqu'elle a un ensemble S d'alternatives, il n'existe pas de choix donnant une utilité plus grande lorsque l'ensemble passe à $S' \subset S$. Au mieux, A appartient encore à S', ou il existe un choix équivalent à A dans S' et au pire le meilleur choix dans S' conduit à une utilité inférieure. En aucun cas l'utilité ne peut augmenter.

strictement dominée. Cet exemple illustre que dans un contexte stratégique il peut être profitable de se lier les mains.

2. Ici une solution alternative à la pénalisation, consisterait à faire jouer J1 en premier dans le jeu initial. Ce nouveau jeu est décrit par l'arbre de la figure 1.13 sous sa forme extensive et par la table 1.17 sous sa forme normale. La forme normale montre que ce nouveau jeu possède deux équilibres de Nash : (A, GG) comme dans le jeu simultané et (B, GD) comme dans le jeu avec pénalité. Toutefois l'étude de la forme extensive permet de dégager un unique équilibre de Nash sous-jeux parfaits : J1 sélectionne B, J2 l'observe et joue D. Jouer en premier s'interprète ici comme une manière crédible de se lier les mains.

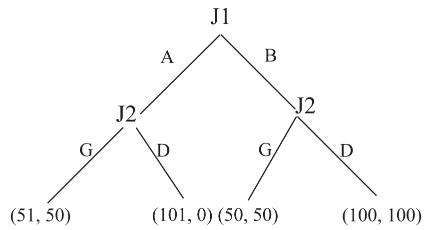


FIG. 1.13 – Forme extensive du jeu où J1 joue en premier

		J2			
		GG	GD	DG	DD
J1	A	$(51, 50)$	$(51, 50)$	$(101, 0)$	$(101, 0)$
	B	$(50, 50)$	$(100, 100)$	$(50, 50)$	$(100, 100)$

TAB. 1.17 – Forme normale du jeu où J1 joue en premier

1.9 Enchère au second prix**

Objectif de l'exercice : Étudier une enchère au second prix (ou une enchère anglaise) à l'aide de l'élimination des stratégies dominées. D'abord en information asymétrique puis en information symétrique.

Un objet (indivisible) est vendu aux enchères. Il existe n acheteurs potentiels. L'utilité de l'agent i s'il gagne l'enchère est $v_i - p$, où $v_i \geq 0$ est la valeur que l'agent i attribue à l'objet et p le prix payé. Chaque agent est libre de soumettre une enchère s_i positive ou nulle : $s_i \in S_i = [0, +\infty[$. Le gagnant est celui dont l'enchère est la plus grande mais il ne paye que le prix de la seconde plus grande enchère[10]. Formellement, si l'enchère s_i est la plus grande, $s_i = \max_k s_k$, alors le prix est $p = \max_{j \neq i} s_j$. Si deux personnes (ou plus) proposent la même enchère, le gagnant est tiré au sort parmi elles et il doit payer le montant de son enchère.

1. *Comment enchérir lorsque l'on connaît son évaluation mais qu'on ignore les évaluations des autres joueurs ?*
2. *Soit maintenant $n = 2$, le joueur 1 attribue à l'objet une valeur de 100 et le joueur 2 une valeur de 10. Déterminer les équilibres de Nash de ce jeu où les deux joueurs connaissent l'évaluation de l'autre.*

Correction

1. Enchérir v_i est une stratégie (faiblement) dominante pour i. En effet, pour tout vecteur $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ et tout $s_i \in S_i$, l'enchère v_i fait au moins aussi bien. Il suffit de passer en revue tous les cas possibles pour s'en persuader. L'intuition est extrêmement simple : si i enchérit moins que v_i il diminue ses chances de gagner sans changer le prix auquel il paye l'objet dans le cas où il emporte l'enchère ! S'il joue au dessus de v_i il augmente ses chances de gagner mais lorsqu'il gagne avec $x > v_i$ alors qu'il ne gagne pas avec v_i il perd de l'argent ! Puisque cela signifie que la seconde enchère dépasse v_i.

   Plus formellement : soit $s_{-i}^{\max}$ l'enchère la plus élevée soumise par les joueurs autres que i et supposons que i enchérisse v_i. Si $v_i > s_{-i}^{\max}$, alors i gagne, paye $s_{-i}^{\max}$ et son utilité est donc $v_i - s_{-i}^{\max}$. Si, en revanche, $v_i < s_{-i}^{\max}$, alors i perd et son utilité est 0. Regardons si i peut gagner à choisir une stratégie différente.

   D'une part, enchérir $x < v_i$ ne change pas l'utilité de i lorsque $v_i < s_{-i}^{\max}$ ou lorsque $v_i > x > s_{-i}^{\max}$. Mais si $v_i > s_{-i}^{\max} > x$, alors l'utilité de i passe de $v_i - s_{-i}^{\max}$ à 0. Enchérir $x < v_i$ ne permet donc jamais d'obtenir une utilité plus grande qu'en enchérissant v_i.

[10] Une telle procédure d'enchère s'appelle une enchère au second prix sous pli scellé : le gagnant ne paye pas le montant qu'il a enchéri mais le montant le plus élevé après le sien, et sous pli scellé car au moment où les enchères sont faites tous les agents ignorent les choix des autres.

D'autre part, enchérir $y > v_i$, ne modifie pas l'utilité de i lorsque $y > v_i > s_{-i}^{\max}$ ou $s_{-i}^{\max} > y > v_i$, toutefois dans les cas où $y > s_{-i}^{\max} > v_i$, l'issue de l'enchère change : i gagne avec y et obtient une utilité de $v_i - s_{-i}^{\max}$, alors qu'il perd l'enchère en jouant v_i et obtient une utilité nulle. Le joueur i n'a pas intérêt à dévier puisque $v_i - s_{-i}^{\max} < 0$.

Ce résultat est très important : il est inutile de connaître les autres joueurs pour enchérir de manière optimale. Il suffit de jouer sa stratégie faiblement dominante.

2. Comme le joueur 2 sait qu'il perd si le joueur 1 enchérit 100, il est indifférent entre enchérir n'importe quelle somme entre 0 et 100 (sauf 100). Nous avons donc comme équilibre de Nash : $s_1 = 100$ et $s_2 = x$ avec $x \in [0, 100[$. Dans ce cas, l'utilité du joueur 1 est $100 - x$ tandis que celle du joueur 2 est 0. Il existe aussi des équilibres de Nash de la forme $s_1 = 10 + \varepsilon$ et $s_2 = x$ avec $x \in [0, 10 + \varepsilon[$. En fait tout couple de stratégies (s_1, s_2) avec $s_1 \in]10, +\infty[$ et $s_2 \in [0, \min\{s_1, 100\}[$ est un équilibre de Nash de ce jeu. Le résultat reste efficace au sens où le gagnant est toujours celui qui attribue la valeur la plus élevée à l'objet mais le prix payé est lui, en quelque sorte, imprévisible. Si les joueurs n'utilisent pas de stratégies faiblement dominées, il vient : $s_1 = 100$ et $s_2 = 10$ c'est-à-dire l'équilibre obtenu à la question 1.

1.10 Exclusion**

Objectif de l'exercice : Étudier un jeu avec trois joueurs. Détermination des équilibres de Nash et problèmes de coordination.

Alain, Bernard et Christian (ci-après A, B et C) doivent choisir d'éliminer l'un d'entre-eux. Par exemple, ils possèdent deux places de théâtre et tous les trois souhaiteraient y aller. Ils prennent leur décision à l'aide d'un vote à bulletin secret. Chacun écrit simultanément un nom (on élimine a priori la possibilité de voter contre soi-même) sur une feuille. La personne dont le nom a reçu le plus de voix est exclue. En cas d'égalité (chaque nom obtient une voix) c'est A qui décide qui exclure. Les utilités des trois agents sont les suivantes : tout agent exclu a une utilité normalisée à 0. Si A n'est pas éliminé il obtient une utilité de 4 (qu'il reste avec B ou C). Si A est éliminé, B et C ont chacun une utilité de 2. Enfin, si C (resp. B) est éliminé, l'utilité de B (resp. C) est de 1.

1. *Écrire ce jeu de vote sous forme normale en supposant que A joue une stratégie mixte en cas d'égalité : avec la probabilité α il élimine celui qui a voté contre lui, et avec la probabilité $1-\alpha$ il élimine celui contre qui il avait voté.*
2. *Déterminer en les équilibres de Nash où B et C votent en stratégies pures.*

Correction

1. Ce jeu se décrit sous forme normale de la manière suivante. Il a trois joueurs, les ensembles de stratégies pures sont respectivement : $S_A = \{B, C\}$, $S_B = \{A, C\}$ et $S_C = \{A, B\}$. Contrairement aux jeux à deux joueurs, il n'est pas possible de représenter les paiements dans une matrice. La démarche habituelle consiste à utiliser deux matrices comme dans la table 1.18. Le joueur A vote B ou C, ce qui correspond à choisir une ligne (la même pour les deux tableaux). Le joueur B choisit, lui, une colonne (la même pour les deux tableaux). Le joueur C choisit, en revanche, l'un des deux tableaux. Ces trois choix sont simultanés.

   Les gains se déduisent de l'énoncé. En cas d'égalité (chaque joueur recevant une voix), il faut utiliser le fait que A choisit d'éliminer celui qui a voté contre lui avec une probabilité α. Dans chaque case, le premier chiffre correspond au gain de A, le second à l'espérance du gain de B et le troisième à l'espérance du gain de C.
2. Étudions d'abord le cas où B et C votent contre A. Le joueur A est alors indifférent entre voter contre B ou C puisque dans les deux cas il ne peut éviter d'être éliminé. Cela conduit aux équilibres de Nash : $((\rho\text{B}, (1-\rho)\,\text{C}), \text{A}, \text{A})$ avec $\rho \in [0, 1]$.

   La vérification qu'il s'agit bien d'équilibres de Nash est immédiate. Si B (resp. C) dévie, il vote contre C (resp. B), A ne peut alors jamais être éliminé et B (resp. C) gagne soit 0 soit 1 (selon qu'il est éliminé ou pas) alors qu'il gagne 2 à l'équilibre.

		J2	
		A	C
A	B	$(0,2,2)$	$(4,\alpha,1-\alpha)$
	C	$(0,2,2)$	$(4,1,0)$

C vote A

		J2	
		A	C
A	B	$(4,0,1)$	$(4,0,1)$
	C	$(4,1-\alpha,\alpha)$	$(4,1,0)$

C vote B

TAB. 1.18 – Jeu de vote

Examinons ensuite le cas où B vote contre A mais C vote contre B. L'argument précédent montre que C a intérêt à dévier en votant contre A ce qui lui assure un gain égal à 2. Il ne peut donc pas y avoir d'équilibre de ce type. Par symétrie il n'y a pas non plus d'équilibres où B vote contre C et C vote contre A.

Étudions finalement le cas où B vote contre C et C vote contre B. Supposons de plus que A vote contre B avec la probabilité ρ et contre C avec la probabilité $1-\rho$.

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un équilibre, supposons que B dévie et vote contre A. Avec la probabilité ρ, A vote contre B, B est éliminé (puisque C vote aussi contre B) et dans ce cas, l'utilité de B est de 0. Avec la probabilité $1-\rho$, A vote contre C, et une égalité survient. Dans ce cas, avec la probabilité α, B est éliminé et il obtient 0, tandis qu'avec la probabilité $1-\alpha$ il n'est pas éliminé et reste avec A pour obtenir 1. L'espérance d'utilité de B en déviant s'élève donc à $(1-\rho)\,\alpha$. S'il ne dévie pas, il est éliminé avec la probabilité ρ et sinon il reste avec A. D'où une espérance d'utilité de $(1-\rho) \geq (1-\rho)\,\alpha$. Il en résulte que B n'a pas intérêt à dévier. Le même raisonnement s'applique à C. De son côté, A ne peut pas augmenter son gain (qui est déjà maximum) en déviant. Il s'agit donc bien d'un équilibre de Nash (quels que soient ρ et α).

Ces équilibres peuvent s'écrire : $((\rho\mathrm{B},(1-\rho)\,\mathrm{C})\,,\mathrm{C},\mathrm{B})$ avec $\rho \in [0,1]$.

En résumé, les joueurs B et C font face à un problème de coordination. S'ils réussissent à se coordonner pour voter contre A, ils arrivent à gagner 2 (équilibres de Nash de la première famille). En revanche, il existe aussi des équilibres de Nash où cette coordination n'arrive pas à se mettre en place et où B et C préfèrent voter l'un contre l'autre.

1.11 Jeu séquentiel ou simultané**

Objectif de l'exercice : Étudier le lien entre les équilibres de Nash d'un jeu où les décisions sont simultanées et ceux du même jeu où les décisions sont prises les unes après les autres (séquentiellement).

1. *Soit le jeu G présenté sous forme normale dans la table 1.19. Déterminer l'ensemble N des équilibres de Nash de ce jeu lorsque J1 et J2 jouent simultanément. Déterminer ensuite l'ensemble N' des équilibres de Nash du jeu G' où J1 joue après avoir observé le choix de J2. Enfin l'ensemble N'' du jeu G'' où J2 joue après avoir observé le choix de J1.*

		J2 G	J2 D
J1	H	$(4,4)$	$(0,0)$
J1	B	$(0,7)$	$(6,6)$

Tab. 1.19 – Forme normale du jeu G

2. *Soit maintenant $G = \left(I,\ S = \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} S_i,\ (u_i)_{i=1 \text{ à } n}\right)$ un jeu sous forme normale et soit $N \subset S$ l'ensemble des équilibres de Nash de G. Soit G' un jeu en tout point identique à G sauf que le joueur 1 joue en dernier après avoir observé les stratégies des autres joueurs. Soit N' l'ensemble des équilibres de Nash de G'. Montrez que (d'une certaine manière) $N \subseteq N'$.*

Correction

1. Dans le jeu simultané dont la forme normale est donnée dans la table 1.19 il existe un unique équilibre de Nash : $N = \{(\mathrm{H}, \mathrm{G})\}$.

   Le jeu où le joueur 2 joue en premier, le joueur 1 en second après avoir observé le coup choisi est décrit sous forme normale par la table 1.20. Ce jeu

		J2 G	J2 D
J1	HH	$(4,4)$	$(0,0)$
J1	HB	$(4,4)$	$(6,6)$
J1	BH	$(0,7)$	$(0,0)$
J1	BB	$(0,7)$	$(6,6)$

Tab. 1.20 – Forme normale du jeu où J2 joue en premier

(notons que la stratégie BH est strictement dominée par HB, elle est donc éliminée) possède deux équilibres de Nash en stratégies pures et deux familles d'équilibres de Nash en stratégies semi-mixtes : $N' = \{(HH, G),\ (HB, D),$

$((\alpha_0 HB, (1-\alpha_0)\, BB)\, , D)$, $((\alpha_1 HH, (1-\alpha_1)\, HB)\, , G)\}$, avec $\alpha_0 \geq \frac{1}{3}$ et $\alpha_1 \geq \frac{1}{3}$. L'issue $(6,6)$ peut donc être atteinte à un équilibre de Nash, mais l'issue $(4,4)$ reste comme issue d'un équilibre de Nash. Notons tout de même que le concept d'équilibre sous-jeux parfait associé à la forme extensive de ce jeu conduit à l'unique équilibre (HB, D).

Le jeu où le joueur 1 joue en premier, le joueur 2 en second après avoir observé le coup choisi est décrit sous forme normale par la table 1.21. Ce jeu possède

		J2			
		GG	GD	DG	DD
J1	H	$(4,4)$	$(4,4)$	$(0,0)$	$(0,0)$
	B	$(0,7)$	$(6,6)$	$(0,7)$	$(6,6)$

Tab. 1.21 – Forme normale du jeu où J1 joue en premier

trois équilibres de Nash : $N'' = \{(H, GG)\, , (B, DG),\, (H, (\beta_0 GG, (1-\beta_0)\, GD))\}$ avec $\beta_0 \geq \frac{1}{3}$. L'issue $(6,6)$ ne peut pas être atteinte. Le seul équilibre sous-jeux parfait (associé à la forme extensive) est (H, GG).

2. Dans le jeu G', les ensembles de stratégies des joueurs 2 à n sont identiques à leurs ensembles de stratégies dans le jeu G, c'est-à-dire S_2, S_3, …, S_n. En revanche, l'ensemble des stratégies du joueur 1 n'est plus S_1. En effet, puisque le joueur 1 a le privilège de choisir son coup après avoir observé les choix des autres joueurs, une stratégie pour le joueur 1 est une fonction, $s'_1\,(.)$ qui à toute liste de stratégies des autres, $(s_2, s_3, \ldots, s_n)$, associe une stratégie dans S_1. Soit $S'_1 = \{s'_1 : S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n \longrightarrow S_1\}$.

   Soit $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ un équilibre de Nash du jeu G. Soit $\sigma'_1\,(.)$ la fonction constante qui à tout $(s_2, s_3, \ldots, s_n)$ associe σ_1^*. Il est facile de vérifier que les stratégies $(\sigma'_1, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ forment un équilibre de Nash du jeu G'. En ce sens, il est possible de dire que tout équilibre de Nash du jeu G est aussi un équilibre de Nash du jeu G'.

1.12 Exploitation d'une ressource commune**

Objectif de l'exercice : Détermination des équilibres de Nash d'un jeu où l'ensemble des stratégies d'un joueur est un ensemble continu. Utilisation des fonctions de meilleures réponses.

Soit une ressource disponible en quantité $m > 0$ que doivent se partager deux utilisateurs, 1 et 2. Le partage est compliqué par le fait qu'ils souhaitent consommer du bien aujourd'hui et demain. Notons x et y les consommations courantes de chacun des consommateurs. Si la somme $x + y$ dépasse m, alors les consommateurs sont rationnés. De manière générale, soit x et y une paire de demandes, J1 peut consommer la quantité $\overline{x} = \min\{x\ ;\ \max\{m-y\ ;\ m/2\}\}$ (et symétriquement pour J2). Pour simplifier, il est supposé qu'en période 2 tout ce qui n'a pas été consommé en première période est partagé équitablement entre les deux consommateurs et chacun obtient $\frac{m-(\overline{x}+\overline{y})}{2}$. La fonction d'utilité de chaque consommateur ne dépend que de la consommation de ce bien en première et en seconde période. Elle a une forme Cobb-Douglas :

$$u_1(x,y) = \alpha \ln(\overline{x}) + (1-\alpha)\ln\left(\frac{m-(\overline{x}+\overline{y})}{2}\right)$$

avec $\alpha \in]0,1[$ et u_2 est définie de manière symétrique :

$$u_2(x,y) = \beta \ln(\overline{y}) + (1-\beta)\ln\left(\frac{m-(\overline{x}+\overline{y})}{2}\right)$$

avec $\beta \in]0,1[$.

1. *Calculer les fonctions de meilleures réponses et trouver l'équilibre de Nash du jeu où les consommateurs choisissent simultanément leur niveau de consommation (on supposera pour simplifier que $\overline{x} = x$ et $\overline{y} = y$).*
2. *Étudier comment varient les choix d'équilibres avec α.*
3. *Déterminer les optima de Pareto de cette économie.*
4. *L'équilibre de Nash est-il un optimum de Pareto ?*

Correction

1. Calculons la fonction de meilleures réponses de chaque consommateur à tout choix de l'autre. Le problème du consommateur 1 est :

$$\max_x \left[\alpha \ln(x) + (1-\alpha)\ln\left(\frac{m-(x+y)}{2}\right)\right]$$

Il est facile de vérifier que ce programme est concave en x, nous pouvons donc chercher sa solution à l'aide de la condition du premier ordre. En dérivant la fonction $u_1(x,y)$ par rapport à x il vient :

$$\frac{\alpha}{x} - \frac{1-\alpha}{m-x-y} = 0$$

Un calcul élémentaire nous amène à la fonction de meilleures réponses [11]

$$x^*(y) = \alpha(m-y)$$

de manière symétrique il vient :

$$y^*(x) = \beta(m-x)$$

Pour arriver à l'équilibre de Nash il nous suffit donc de chercher l'intersection des fonctions de meilleures réponses en résolvant le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} x = \alpha(m-y) \\ y = \beta(m-x) \end{cases}$$

Ce qui nous amène à un unique équilibre de Nash :

$$\begin{cases} x^* = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}m \\ y^* = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}m \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $x^* + y^* \leq m$ tant que $\alpha \leq 1$ et $\beta \leq 1$, ce qui est bien le cas.

Remarquons que si l'une des égalités $\overline{x} = x$ ou $\overline{y} = y$ n'était pas vérifiée, cela voudrait dire que $\overline{x} + \overline{y} = m$ et donc qu'il ne reste rien à consommer en seconde période. Cela conduit à une utilité de $-\infty$ pour les deux consommateurs. Il existe pourtant des équilibres de Nash du type $x > m$ et $y > m$. En effet, si, par exemple, $y > m$, alors quel que soit x, les utilités des deux joueurs sont égales à $-\infty$ et donc tout $x > m$ est bien une meilleure réponse. Toutefois, ces équilibres ne sont pas très intéressants et il est raisonnable de se limiter aux cas où les joueurs consomment aux deux périodes ce qui leur donne une utilité finie.

2. Tout d'abord il est immédiat que (quel que soit $\beta \in]0,1[$, x^* est une fonction strictement croissante avec α, tandis que y^* est une fonction strictement décroissante avec α. En effet, si α augmente, le joueur 1 préfère plus le présent et donc choisit de prendre une quantité plus importante. En réaction à ce choix, le joueur 2 diminue sa consommation courante afin de maintenir une quantité plus importante en seconde période.

   Il est intéressant d'étudier les deux cas extrêmes : $\alpha \to 1$ et $\alpha \to 0$. Tout d'abord si $\alpha \to 1$, il vient que $x^* \to m$ et $y^* \to 0$. C'est la même explication que ci-dessus. Notons que si α est exactement égal à 1, alors n'importe quel partage de première période tel que $x + y = m$ est un équilibre de Nash. Toutefois comme le joueur 2 a une utilité égale à $-\infty$ à tous ces équilibres (puisqu'il n'a rien à consommer en seconde période), l'équilibre particulier où $x = m$ et $y = 0$ domine au sens de Pareto les autres. Si $\alpha \to 0$, le joueur 1 ne valorise que le futur et ignore le présent. Il en résulte que $x^* \to 0$ et $y^* \to \beta m$. Le joueur 1 ne consomme rien en première période, tandis que le joueur 2 répartit sa consommation entre les deux périodes.

[11] Notons que cette meilleure réponse conduit bien à un choix de x en première période tel que $x^* + y \leq m$. En effet, $x^* + y = \alpha m + (1-\alpha)y$ or $y \leq m$ par nécessité et donc $x^* + y \leq m$.

3. Pour trouver les optima de Pareto on peut résoudre le programme suivant :

$$\max_{x,y} u_1(x)$$
$$\text{s.c. : } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq m$$
$$u_2(y) \geq \overline{u}$$

Dans ce programme $\overline{u}$ est un paramètre qui varie entre $-\infty$ (dans le cas où $y=0$) et $\overline{u_\beta} = u_2(\beta m)$ (dans le cas où $x=0$). Le paramètre $\overline{u}$ sert à décrire les optima de Pareto. On ignore les contraintes $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x+y \leq m$ et il sera facile de vérifier qu'elles sont bien satisfaites à un optimum. Le lagrangien de ce programme s'écrit :

$$\mathbf{L} = \alpha \ln(x) + (1-\alpha)\ln\left(\frac{m-(x+y)}{2}\right) + \lambda\left(\beta \ln(y) + (1-\beta)\ln\left(\frac{m-(x+y)}{2}\right)\right)$$

La résolution des conditions du premier ordre conduit à

$$\widehat{x} = \alpha m \frac{1}{1+\widehat{\lambda}}$$
$$\widehat{y} = \beta m \frac{\widehat{\lambda}}{1+\widehat{\lambda}}$$
$$\widehat{\lambda} \text{ tel que } u_2(\widehat{x}, \widehat{y}) = \overline{u}$$

4. Pour voir si l'équilibre de Nash est ou non un optimum de Pareto, on peut éliminer $\widehat{\lambda}$ entre $\widehat{x}$ et $\widehat{y}$ afin d'obtenir la relation :

$$\widehat{y} = \beta m \left(1 - \frac{\widehat{x}}{\alpha}\right)$$

or à l'équilibre de Nash on a

$$y^* = \beta m (1 - x^*)$$

ce qui montre que l'équilibre de Nash n'est pas un optimum de Pareto.
La figure 1.14 permet de comparer la fonction de meilleure réponse $y^*(\widehat{x})$ avec la réponse la plus efficace $\widehat{y}$.
Dans le système où les consommateurs sont libres de puiser autant qu'ils le désirent en première période dans les ressources communes, ils en consomment trop. La raison en est que chaque consommateur raisonne de manière égoïste dans son programme de maximisation. Il prend bien en compte le fait que s'il consomme plus aujourd'hui, il pourra moins consommer demain, mais il ignore que l'autre consommateur aussi pourra moins consommer demain. Cela pousse chaque consommateur à trop utiliser la ressource dans le présent. D'autre part, comme le montrerait une généralisation à n consommateurs, plus le nombre de consommateurs est important et plus ce problème est aigu.

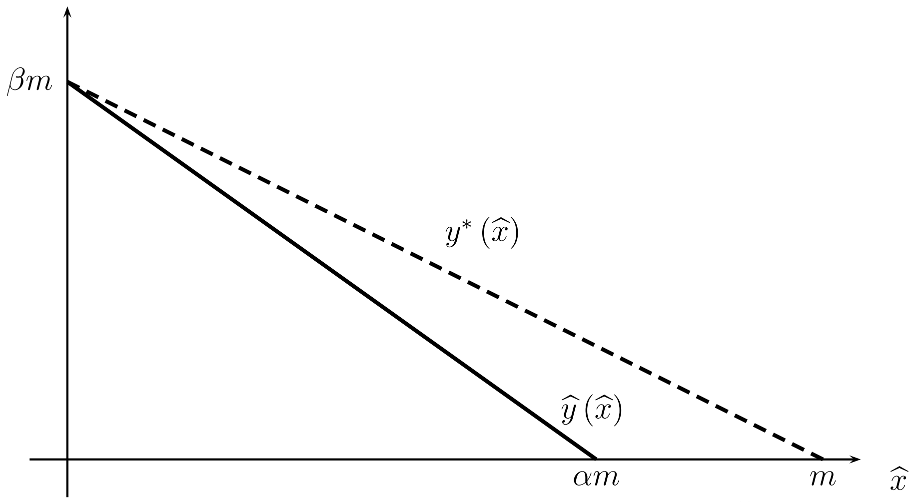


FIG. 1.14 – Meilleure réponse et réponse efficace

1.13 Jeux sous forme extensive**

Objectif de l'exercice : Utilisation du concept d'équilibre sous-jeux parfait. Illustration du passage de la forme extensive à la forme normale.

1. *Identifier les sous-jeux du jeu G_1 représenté sous forme extensive dans la figure 1.15 puis résoudre ce jeu (trouver les équilibres de Nash) en s'appuyant sur la forme normale.*

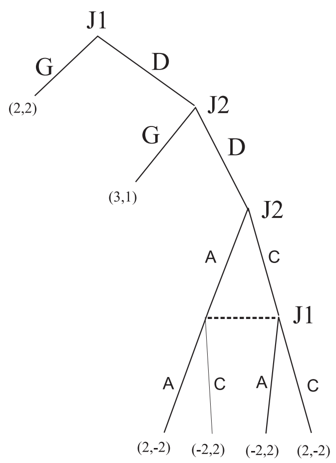


Fig. 1.15 – Forme extensive du jeu G_1

2. *Trouvez les sous-jeux puis les équilibres de Nash sous-jeux parfaits du jeu G_2 dont la figure 1.16 donne la forme extensive. Déterminez S_1 et S_2 les ensembles de stratégies des joueurs. Voyez-vous d'autres équilibres de Nash ?*

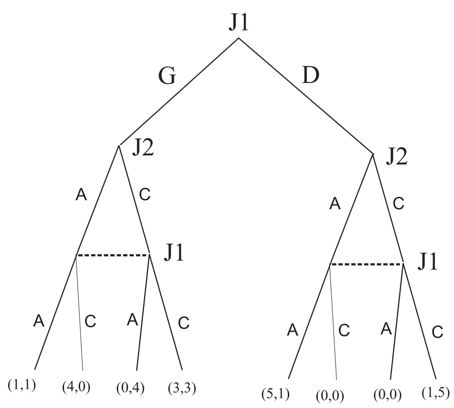


Fig. 1.16 – Jeu G_2 sous forme extensive

Correction

1. Le jeu de la figure 1.15 possède trois sous-jeux : lui même, le sous-jeu commençant au nœud où J2 a le choix entre G et D et enfin le sous-jeu où J2 a le choix entre A et C. La forme extensive invite à chercher les équilibres de Nash sous-jeux parfaits. Il faut donc commencer par identifier les équilibres de Nash du sous-jeu où J2 et J1 choisissent simultanément A ou C. Ce sous-jeu possède un unique équilibre de Nash : $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$. L'espérance d'utilité associée à cet équilibre est (quel que soit le joueur) égale à 0. Il en résulte que lorsque J2 choisit entre G ou D il préfère G qui l'amène à une utilité de 1 plutôt que D qui le conduit à 0. Finalement J1 joue D anticipant que le choix de G par J2 lui donne une utilité de 3 supérieure à 2 qu'il peut obtenir en jouant G. Il existe donc un unique équilibre de Nash sous-jeux parfaits au jeu de la figure 1.15 : ((G, $(1/2, 1/2)$) ; (G, $(1/2, 1/2)$))).

   La table 1.22 décrit ce jeu sous forme normale (réduite Gx compte pour GA et GC et Gy pour GA et GC car cela conduit aux mêmes paiements). Cela montre qu'il existe (au moins) deux équilibres de Nash non sous-jeux

		J2		
		Gy	DA	DC
	Gx	$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$
J1	DA	$(3,1)$	$(2,-2)$	$(-2,2)$
	DC	$(3,1)$	$(-2,2)$	$(2,-2)$

TAB. 1.22 – Jeu G_1 sous forme normale

   parfaits : (Gx,DA) et (Gy,DC).

2. Le jeu de la figure 1.16 possède trois sous-jeux : lui-même, le sous-jeu commençant après que J1 ait joué G et celui après le coup D de J1. Le sous-jeu “après G” possède (C,C) comme unique équilibre de Nash, tandis que le sous-jeu “après D” possède trois équilibres de Nash : (A,A) et (C,C) plus $\left(\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)\right)$. Il existe donc trois équilibres de Nash sous-jeux parfaits : J1 joue G et l'équilibre (C,C) est atteint dans le sous-jeu, car s'il jouait D soit l'équilibre (C,C) serait joué, soit ce serait l'équilibre en stratégies mixtes. Le troisième équilibre voit J1 jouer D et l'équilibre (A,A) est l'issue du sous-jeu.

   L'ensemble des stratégies de J1 peut s'écrire sous la forme : $S_1 = \{$GAx,GCx, DAx,DCx$\}$ où GAx signifie que J1 joue G suivi de A (conditionnellement au fait qu'il joue G, jouer A ou C après D ne change rien aux paiements de J1 d'où le x). Pour J2 l'ensemble des stratégies est $S_2 = \{$AA,AC,CA,CC$\}$. Le jeu de la figure 1.16 est donc associé à la forme normale de la table 1.23. La forme normale ne fait pas apparaître de nouveaux[12] équilibres de Nash en stratégies pures (on ne cherche pas ici à caractériser tous les équilibres de Nash en stratégies mixtes).

[12]Au sens où ils auraient été difficiles à trouver avec la forme extensive. Mais bien entendu quelle que soit sa forme un jeu a toujours les mêmes équilibres de Nash.

		J2			
		AA	AC	CA	CC
J1	GAx	$(1,1)$	$(1,1)$	$(0,4)$	$(0,4)$
	GCx	$(4,0)$	$(4,0)$	$(3,3)$	$(3,3)$
	DAx	$(5,1)$	$(0,0)$	$(5,1)$	$(0,0)$
	DCx	$(0,0)$	$(1,5)$	$(0,0)$	$(1,5)$

TAB. 1.23 – Jeu G_2 sous forme normale

1.14 Marchandage**

Objectif de l'exercice : Construction d'un jeu permettant d'éclairer le problème du marchandage (partage d'un surplus entre deux individus). L'équilibre de Nash sous-jeux parfait permet de comprendre quels sont les éléments qui influencent le partage.

Soient deux individus (1 et 2) qui doivent s'entendre sur le partage d'une somme normalisée à 1. Le marchandage est organisé de la manière suivante : ils ont T périodes (numérotées de 0 à $T-1$) pour s'entendre. Chaque période est décomposée en deux étapes : dans la première étape l'un des deux joueurs fait une proposition de partage du type $(x, 1-x)$ où x est la part du joueur 1 et $1-x$ celle du joueur 2. Une fois cette proposition faite, la deuxième étape commence : elle consiste simplement en une acceptation ou un refus de l'autre joueur. En cas d'acceptation le partage est mis en œuvre, en cas de refus, une nouvelle période commence où les rôles sont inversés. En cas de refus à la fin de la dernière période, alors les deux agents obtiennent 0. Soit $0 < \delta_1 < 1$ (resp. $0 < \delta_2 < 1$) le taux d'escompte du joueur 1 (resp. 2). C'est-à-dire que si le joueur 1 gagne 1 en période 1 il a une utilité (vu de la période 0) égale à δ_1. Et de manière plus générale, s'il gagne x en période t il a (vu de la période 0) une utilité égale à $\delta_1^t x$. Le joueur 1 fait la première proposition (en $t = 0$). Tout au long de cet exercice, il sera fait l'hypothèse que si un joueur est indifférent entre accepter ou refuser un partage, alors il accepte.

1. *Si $T = 1$, il s'agit d'un jeu dit de l'ultimatum. Déterminez en l'équilibre de Nash sous-jeu parfait.*
2. *Trouver, en utilisant la* récurrence arrière, *l'équilibre de Nash sous-jeu parfait du jeu où $T = 2n+1$ c'est-à-dire où le joueur 1 fait la première et la dernière offre. En déduire le partage lorsque $n \to +\infty$.*
3. *Trouver, en utilisant la* récurrence arrière, *l'équilibre de Nash sous-jeu parfait du jeu où $T = 2n$ c'est-à-dire où le joueur 1 fait la première offre mais où le joueur 2 fait la dernière offre.*
4. *En supposant l'existence et l'unicité, trouver l'équilibre sous-jeux parfait du même jeu de marchandage infiniment répété.*

Correction

1. Considérons le sous-jeu où le joueur 2 doit choisir ou refuser une proposition $(x, 1-x)$. S'il refuse, il obtient 0. S'il accepte, il gagne $1-x$. Si $x < 1$, accepter est donc le seul équilibre de Nash de ce sous-jeu. Il en résulte que toute proposition $0 \leq x < 1$ est acceptée par le joueur 2. Le joueur 1 maximise donc son utilité en choisissant x le plus grand possible. Étant donné qu'il peut choisir x aussi proche de 1 qu'il le souhaite, on considère qu'il propose un partage $(1, 0)$ et que ce partage est accepté puisque le joueur 2 est alors indifférent entre accepter ou refuser.
2. Notons $(V_k, 1 - V_k)$ la proposition faite par le joueur 1 au tour $2k$ ($k = 0, \ldots, n$). L'idée est que si un partage est accepté à une certaine date dans

le futur, il est préférable de mettre en œuvre un partage "équivalent" dès aujourd'hui. Illustrons ce point en supposant qu'il est connaissance commune qu'en $t = 2$ un partage $(V, 1 - V)$ est mis en œuvre. En $t = 1$ c'est au tour du joueur 2 de faire une proposition. Il sait que si le joueur 1 refuse, il obtient V à la période suivante c'est-à-dire qu'il a en refusant une utilité (vue de $t = 1$) égale à $\delta_1 V$. Le joueur 2 peut donc proposer le partage $(\delta_1 V, 1 - \delta_1 V)$ puisque ce partage est accepté par le joueur 1 et qu'il est avantageux pour le joueur 2 car $1 - \delta_1 V > 1 - V > \delta_2 (1 - V)$. En $t = 0$, le joueur 1 fait une proposition. Si le joueur 2 refuse il obtiendra en $t = 1$ le montant $1 - \delta_1 V$ soit vu de la période 0 une utilité $\delta_2 (1 - \delta_1 V)$. Donc le joueur 1 doit au moins proposer cette part au joueur 2 s'il veut qu'il accepte. Comme il n'a pas intérêt à proposer plus il propose le partage $(1 - \delta_2 (1 - \delta_1 V), \delta_2 (1 - \delta_1 V))$ qui est accepté.

En généralisant, il en résulte que s'il est connaissance commune que le partage $(V_k, 1 - V_k)$ est accepté au tour $2k$, alors le joueur 1 peut proposer le partage $(V_{k-1}, 1 - V_{k-1})$ au tour $2(k-1)$ et que ce partage est accepté, avec :

$$V_{k-1} = 1 - \delta_2 (1 - \delta_1 V_k) = 1 - \delta_2 + \delta_1 \delta_2 V_k.$$

Or, au dernier tour, il est certain que le joueur 2 accepte le partage $(1, 0)$. On a donc $V_n = 1$. Posons $a = 1 - \delta_2$ et $b = \delta_1 \delta_2$. À partir de la relation de récurrence $V_{k-1} = a + bV_k$, il vient que :

$$V_0 = a \left(1 + b + \ldots + b^{n-1}\right) + b^n V_n = \frac{1 - \delta_2 + \delta_2 (1 - \delta_1) (\delta_1 \delta_2)^n}{1 - \delta_1 \delta_2}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, le joueur 1 obtient (dès la période 0) la part :

$$V = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2}.$$

En particulier, à δ_2 fixé, si $\delta_1 \to 1$ (le joueur 1 devient infiniment patient), alors $V \to 1$ (celui qui fait la première proposition obtient tout). À l'inverse si à δ_1 fixé, $\delta_2 \to 1$, alors le joueur 1 obtient 0 bien qu'il fasse la première proposition.

Finalement, si $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, le partage (pour $n \to +\infty$) s'établit à

$$\left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right).$$

L'avantage de jouer en premier et en dernier est clair.

3. Si le joueur 2 fait la dernière offre, il propose un partage $(0, 1)$. Il en résulte qu'à l'avant-dernière étape le joueur 1 doit proposer $(1 - \delta_2, \delta_2)$ et que ce partage est accepté. La relation de récurrence obtenue dans la réponse à la question 2 est toujours valable mais il faut déterminer V_0 en partant de $V_{n-1} = 1 - \delta_2$ d'où
$$V_0 = (1 - \delta_2) \frac{1 - (\delta_1 \delta_2)^n}{1 - \delta_1 \delta_2}.$$

Bien entendu, le joueur 1 préfère faire à la fois la première et la dernière proposition plutôt que simplement la première. Lorsqu'il joue en premier et en dernier il gagne $(\delta_1\delta_2)^n$ de plus. Toutefois, lorsque n devient important, cette différence tend vers 0. À la limite, lorsque $n \to +\infty$, cette différence est nulle et le seul avantage vient du fait de faire la première proposition.

4. Pour trouver le partage du jeu infiniment répété, il n'est pas suffisant de prendre la limite des deux jeux précédents. Cherchons une preuve directe. L'avantage du jeu infiniment répété est qu'il se répète (en quelque sorte) lui même. Toutefois, il faut faire attention ici aux facteurs d'actualisation différents. Soit G_{12}^{∞} le jeu infiniment répété où le joueur 1 (dont le facteur d'actualisation est δ_1) joue en premier et le joueur 2 (dont le facteur d'actualisation est δ_2) en second. Si J2 refuse la proposition de J1 en $t = 0$, il se retrouve exactement dans la position de J1 en $t = 1$. C'est-à-dire qu'en $t = 1$ le jeu est G_{21}^{∞}. Soit donc V_{12} le gain (supposé unique) du joueur en premier dans G_{12}^{∞}. Si J2 venait à refuser en $t = 0$, il pourrait gagner V_{21} (supposé unique), soit en termes actualisés : $\delta_2 V_{21}$. Mais si toutefois J1 refuse ce partage en $t = 1$ il peut gagner V_{12} en $t = 2$, J2 doit donc lui proposer au moins $\delta_1 V_{12}$ pour qu'il accepte (l'unicité de l'équilibre est une hypothèse importante, sans elle, et si les gains étaient différents d'un équilibre à l'autre, le raisonnement que nous venons de faire ne serait plus valable), d'où les égalités :
$$1 - V_{21} = \delta_1 V_{12} \text{ et } 1 - V_{12} = \delta_2 V_{21}$$
qui conduisent à
$$V_{12} = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}.$$

1.15 Guerre d'usure**

Objectif de l'exercice : Étudier la guerre d'usure qui a été formalisée sous forme de jeu par Maynard Smith en 1974[13]. L'application du concept n'est en rien limité à la biologie : l'exemple économique classique est celui de deux entreprises se livrant à une guerre des prix pour conquérir un marché.

Le jeu de guerre d'usure de base en temps discret est le suivant : deux joueurs (J1 et J2) "se battent" pour une récompense. À chaque date ($t = 0$ à $t = +\infty$) les joueurs choisissent entre continuer (C) ou abandonner (A). Les paiements pour la période t sont les suivants. Si les deux joueurs continuent, ils ont un paiement négatif égal à -1. Si l'un continue et l'autre abandonne, celui qui abandonne a 0 et celui qui continue gagne v et le jeu s'arrête. Si les deux joueurs abandonnent, ils ont tous les deux 0 et le jeu s'arrête. Les joueurs actualisent leurs paiements à l'aide du facteur d'actualisation $\delta \in]0,1[$.

1. *Montrer qu'il existe un équilibre de Nash où un joueur gagne avec certitude.*
2. *On cherche maintenant un équilibre où l'identité du gagnant est incertaine. Caractériser un équilibre où les joueurs suivent les stratégies suivantes : à n'importe quelle date, J1 (resp. J2) abandonne avec la probabilité p_1 (resp. p_2).*
3. *Déterminer l'espérance de gain de chaque joueur à l'équilibre de la question 2*

Correction

1. Si (par exemple) J1 est sûr de gagner, alors J2 est sûr de perdre et dans ce cas, il préfère abandonner immédiatement. Soient les stratégies : J1 joue C quel que soit t et J2 joue A quel que soit t. Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'un équilibre de Nash : si J1 dévie il a 0 plutôt que v, tandis que si J2 dévie il a un paiement strictement négatif plutôt que 0.
2. À n'importe quelle date, J1 ne doit pas avoir intérêt à dévier. Or à l'équilibre proposé, il joue aléatoirement entre A et C : il doit donc être indifférent entre continuer et abandonner. Notons $U(C)$ l'utilité espérée de J1 s'il continue ($U(C)$ ne prend pas en compte les pertes passées). Puisqu'abandonner rapporte 0, on doit avoir $U(C) = 0$. Or,

$$U(C) = p_2 v + (1 - p_2)\left[-1 + \delta\left(p_1 0 + (1 - p_1) U(C)\right)\right]$$

En effet, lorsque J1 continue pour un tour de plus, avec la probabilité p_2 J2 abandonne et J1 gagne v. En revanche, avec la probabilité $1 - p_2$, J2 continue aussi et J1 perd 1. Ensuite, au tour suivant, avec la probabilité p_1 J1 abandonne et gagne 0 ou bien il continue avec la probabilité $1 - p_1$ et

[13] J. Maynard Smith "The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflicts", 1974, *Journal of Theoretical Biology*, 47, pp. 209-221. Voir aussi Drew Fudenberg et Jean Tirole *Game Theory* chapitre 4, pp. 119 et suivantes.

obtient, par définition, $U(C)$. La résolution de l'équation $U(C) = 0$ conduit à

$$p_2 = \frac{1}{1+v}.$$

Le même calcul s'applique à J2 et montre que

$$p_1 = p_2 = p = \frac{1}{1+v}.$$

Et il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'un équilibre.

3. Les deux joueurs ont la même espérance de gain. Vérifions qu'elle est bien nulle :

$$\begin{aligned} EU &= pv + (1-p)\left[-1 + \delta pv + \delta(1-p)\left[-1 + \delta pv + \delta(1-p)\left[-1 + \ldots\right.\right.\right. \\ &= pv\left(1 + \delta(1-p) + \delta^2(1-p)^2 + \ldots\right) - (1-p)\left(1 + \delta(1-p) + \delta^2(1-p)^2 + \ldots\right) \\ &= pv\frac{1}{1-\delta(1-p)} - (1-p)\frac{1}{1-\delta(1-p)} \\ &= \frac{(1+v)p - 1}{1-\delta(1-p)} = 0. \end{aligned}$$

En espérance, le gain v est entièrement dissipé par le coût du combat.

1.16 Existence de l'équilibre de Nash***

Objectif de l'exercice : Démontrer l'existence d'au moins un équilibre de Nash dans tout jeu (fini) sous-forme normale. La preuve donnée ici reprend la démonstration proposée par John Nash[14].

Soit G un jeu sous forme normale, $G = \left(I,\ S = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} S_i,\ (u_i)_{i=1 \text{ à } n}\right)$. On note k_i le nombre de stratégies pures du joueur i et $S_i = \left\{s_i^1, \dots, s_i^\alpha, \dots, s_i^{k_i}\right\}$ l'ensemble des stratégies pures du joueur i. Soit Σ_i l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i. Un élément σ_i de Σ_i est un vecteur noté $\sigma_i = \left(\sigma_i\left(s_i^\alpha\right) s_i^\alpha\right)_{\alpha=1}^{\alpha=k_i}$, il signifie que la stratégie pure s_i^α est jouée avec la probabilité $\sigma_i\left(s_i^\alpha\right)$. Soit Σ l'ensemble de toutes les stratégies mixtes. Un élément σ de Σ est un vecteur de stratégies mixtes. On note σ_{-i} le vecteur de stratégies mixtes construit sur le modèle de σ mais où la stratégie du joueur i est omise.

1. *Pour tout i, $i = 1$ à n, pour tout α, $\alpha = 1$ à k_i, on définit la fonction :*

$$\varphi_{i\alpha}(\sigma) = \max\left\{0\ ;\ u_i\left(s_i^\alpha, \sigma_{-i}\right) - u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right)\right\}$$

À l'aide de ces fonctions on définit la fonction :

$$T(\sigma) : \sigma_i \to \sigma_i'$$

telle que

$$\sigma_i'\left(s_i^\alpha\right) = \frac{\sigma_i\left(s_i^\alpha\right) + \varphi_{i\alpha}(\sigma)}{1 + \sum_{\alpha=1}^{k_i}\left(\varphi_{i\alpha}(\sigma)\right)}.$$

Montrer que cette fonction est définie de Σ dans lui-même et rappeler pourquoi cette fonction possède au moins un point fixe en utilisant le théorème de Brouwer (toute fonction continue définie d'un compact convexe fermé dans lui-même admet un point fixe).

2. *Montrer que tout équilibre de Nash est un point fixe de T et que réciproquement qu'un point fixe de T est un équilibre de Nash.*

Correction

1. Soit σ donné. Pour tout s_i^α, $\sigma_i\left(s_i^\alpha\right) \geq 0$ et $\varphi_{i\alpha}(\sigma) \geq 0$ donc $\sigma_i'\left(s_i^\alpha\right) \geq 0$. Montrons maintenant que $\sum_{\alpha=1}^{k_i} \sigma_i'\left(s_i^\alpha\right) = 1$:

$$\sum_{\alpha=1}^{k_i} \sigma_i'\left(s_i^\alpha\right) = \frac{1}{1 + \sum_{\alpha=1}^{k_i}\left(\varphi_{i\alpha}(\sigma)\right)} \sum_{\alpha=1}^{k_i}\left[\sigma_i\left(s_i^\alpha\right) + \varphi_{i\alpha}(\sigma)\right]$$

et le résultat découle du fait que

$$\sum_{\alpha=1}^{k_i} \sigma_i\left(s_i^\alpha\right) = 1.$$

[14] *Annals of Mathematics*, 1951, 54, pp. 286-295.

La fonction T est donc bien définie de Σ dans Σ. Elle est bien continue (comme composée de fonctions continues) et Σ est un ensemble convexe compact fermé. Le théorème de Brouwer[15] implique qu'elle possède au moins un point fixe.

2. Tout d'abord s'il existe un équilibre de Nash, σ^*, il s'agit d'un point fixe de T. En effet, par définition de l'équilibre de Nash, on a : quel que soit $s_i^\alpha \in S_i$,

$$U_i\left(s_i^\alpha, \sigma_{-i}^*\right) \leq U_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right)$$

d'où l'on déduit que $\varphi_{i\alpha}(\sigma^*) = 0$ et donc que $T(\sigma) = \sigma$.

Passons à la réciproque. Soit σ^* un point fixe de T. Alors, pour tout i, et pour tout s_i^α on doit avoir :

$$\sigma_i^*\left(s_i^\alpha\right) = \frac{\sigma_i^*\left(s_i^\alpha\right) + \varphi_{i\alpha}(\sigma^*)}{1 + \sum_{\alpha=1}^{k_i}\left(\varphi_{i\alpha}(\sigma^*)\right)},$$

d'où il vient que

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{k_i}\left(\varphi_{i\alpha}(\sigma^*)\right)\right)\sigma_i^*\left(s_i^\alpha\right) = \varphi_{i\alpha}(\sigma^*). \tag{1.1}$$

Pour prouver que σ^* est un équilibre de Nash, il faut montrer qu'un joueur i quelconque n'a pas de déviation profitable, c'est-à-dire montrer que pour tout α,

$$u_i\left(s_i^\alpha, \sigma_{-i}\right) \leq u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right)$$

soit encore

$$\varphi_{i\alpha}(\sigma^*) = 0$$

Considérons les stratégies pures utilisées par la stratégie mixte $\sigma_i^*(.)$. Pour chacune de ces stratégies on peut évaluer l'utilité obtenue par le joueur i s'il joue cette stratégie pure face à σ_{-i}^*. Soit m le minimum de ces valeurs et s_i^α une stratégie pure qui permet d'atteindre ce minimum m.
La stratégie s_i^α est donc telle que $m = \sigma_i^*\left(s_i^\alpha\right) > 0$ et telle que $U_i\left(s_i^\alpha, \sigma_{-i}^*\right) \leq U_i\left(s_i^{\alpha'}, \sigma_{-i}^*\right)$ pour tout α' tel que $\sigma_i^*\left(s_i^{\alpha'}\right) > 0$. Il est alors immédiat que

$$U_i\left(s_i^\alpha, \sigma_{-i}^*\right) \leq U_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right),$$

et donc par définition,

$$\varphi_{i\alpha}(\sigma^*) = 0.$$

Mais alors l'équation (1.1) implique que

$$\sum_{\alpha=1}^{k_i}\left(\varphi_{i\alpha}(\sigma^*)\right) = 0$$

et tous les termes sont donc nuls, ce qui prouve qu'il s'agit d'un équilibre de Nash.

[15] Voir Berge, 1966, *Espaces topologiques*, Dunod, Paris, pages 124 et 125.

Cet exercice prouve que tout jeu fini possède au moins un équilibre de Nash (en stratégies mixtes). Cette propriété a contribué au succès de cette notion puisque quel que soit le jeu fini considéré il y a toujours une prédiction sur le comportement des joueurs. Il existe de nombreuses démonstrations de ce résultat, un des intérêts de cette approche est qu'elle ne nécessite pas l'utilisation de correspondance.

Lectures complémentaires

Il existe de très nombreux ouvrages sur la théorie des jeux. La liste suivante ne cherche pas à être exhaustive. Il s'agit simplement des livres qui nous ont été utiles et avec lesquels nous aimons travailler.

Le livre *Game theory* de Drew Fudenberg et Jean Tirole (MIT Press, 1991) vient en premier. Il est très complet sur les jeux non-coopératifs et le niveau est avancé. L'ouvrage de David Kreps *A Course in microeconomic theory* (Harvester Wheastsheaf, 1990) contient plusieurs chapitres sur la théorie des jeux non-coopératifs il est d'ailleurs traduit en Français sous le titre : *Leçons de théorie micréconomique* (PUF, 1996). Le texte de Ken Binmore *Fun and games* (D. C. Heath and Company, 1992) est une mine d'informations et il présente des angles d'approche originaux. Une version en Français existe : *Jeux et théorie des jeux* (De Boeck-Wesmael, 1999). Le livre d'Hervé Moulin *Théorie des jeux pour l'économie et la politique*, 1981 et sa traduction en anglais *Game Theory for the Social Sciences (with a companion volume : 89 exercises with solutions)*, 1986 proposent de nombreux exercices. De plus, la théorie des jeux non-coopératifs y est abordée ainsi que dans *Cooperative Micro-economics : A Game Theoretic Introduction*, 1995, toujours d'Hervé Moulin. Nous recommendons aussi le livre de Gabrielle Demange et Jean-Pierre Ponssard, *Théorie des jeux et analyse économique*, 1994 , PUF. Enfin, le livre de Herbert Gintis *Game theory evolving (A problem-centered introduction to modeling strategic interaction)* (Princeton University Press, 2000) présente la théorie des jeux non-coopératifs à partir d'exercices. De plus, il s'intéresse aussi à la théorie des jeux évolutionnistes.

Chapitre 2

Monopole

Rappel de cours

Le thème du monopole est évidemment au cœur de l'économie industrielle. Son analyse est ancienne puisqu'elle remonte au moins à Cournot (1838). Dans ce rappel de cours, nous précisons la notion de profit d'une firme, celle de surplus (Marshallien) des consommateurs et de bien-être social.

Fonction de profit d'une entreprise :

Le profit d'une entreprise est défini comme les recettes des ventes moins les coûts de production. Si toutes les unités, q, sont vendues au même prix, p, les recettes s'écrivent simplement pq. La fonction de coût qui représente la technologie de l'entreprise dépend de la quantité q produite et se note $C(q)$, la fonction $C(.)$ étant croissante avec q. Le profit de l'entreprise s'écrit donc :

$$\Pi(p, q) = pq - C(q).$$

Toutefois, une entreprise ne peut pas vendre une quantité plus importante que celle demandée par les consommateurs. La demande des consommateurs est modélisée par une fonction $D(p)$ décroissante en p. La quantité q vendue au prix p par l'entreprise ne peut, donc, pas dépasser $D(p)$.

L'objectif de l'entreprise consiste donc à maximiser son profit sous la contrainte de demande :

$$\max_{p,q} \Pi(p, q) \text{ sc. } q \leq D(p).$$

Pour résoudre ce programme, deux raisonnements sont possibles : maximiser en quantité ou maximiser en prix. Examinons tout d'abord le raisonnement en quantité. Puisqu'à q fixé le profit augmente avec p, ce profit n'est maximum que si $q = D(p)$. En introduisant $P(.) = D^{-1}(.)$ la fonction inverse de demande, il vient

$$p = P(q),$$

et le profit s'écrit :

$$\Pi(q) = P(q)\, q - C(q).$$

Sous réserve de concavité, la maximisation conduit (en utilisant la condition du premier ordre) à l'égalisation du revenu marginal avec le coût marginal :

$$P'(q)\, q + P(q) = C'(q),$$

équation qui définit la quantité q^m choisie par le monopole.

D'autre part, un raisonnement similaire en prix conduit l'entreprise à maximiser :

$$\Pi(p) = pD(p) - C(D(p)).$$

À nouveau, sous réserve de concavité, et en introduisant l'élasticité prix de la demande $\varepsilon = -pD'(p)/D(p)$, la condition du premier ordre conduit à l'égalisation de l'indice de Lerner avec l'inverse de l'élasticité :

$$\frac{p - C'(D(p))}{p} = \frac{1}{\varepsilon},$$

équation qui définit le prix p^m choisi par le monopole.

Surplus des consommateurs :

La notion de surplus des consommateurs a été introduite par Dupuit[1] en 1844. Cette notion a ensuite été popularisée par Marshall. Il s'agit d'une notion centrale en économie industrielle. L'idée est de mesurer l'utilité que les consommateurs retirent de leurs achats.

L'économie industrielle se place dans un cadre d'analyse partielle. Il est supposé qu'un marché peut s'analyser indépendamment du reste de l'économie. Les consommateurs sont modélisés à l'aide de fonctions d'utilité. L'achat de x unités de bien au prix p fournit au consommateur i l'utilité :

$$U_i(x) = u_i(x) - px$$

où $u_i(x)$ représente la valorisation des x unités par le consommateur i, alors que px est la dépense engagée pour l'achat des x unités. Le consommateur choisit la quantité x_i^* qui maximise son utilité. La condition du premier ordre s'écrit alors :

$$u_i'(x_i^*) = p.$$

Cette équation définit la demande individuelle, $x_i^* = (u_i')^{-1}(p) = D_i(p)$. Le consommateur retire de l'achat de x_i^* unités au prix p une utilité ou surplus individuel

$$U_i^* = u_i(x_i^*) - px_i^*,$$

qu'il est possible de réécrire (en supposant que $u_i(0) = 0$)

$$U_i^* = \int_0^{x_i^*} u_i'(x)\,dx - px_i^*.$$

En effectuant maintenant le changement de variable $x = (u_i')^{-1}(z) = D_i(z)$, il vient que

$$U_i^* = -\int_p^{+\infty} zD_i'(z)\,dz - pD_i(p)$$

qui se réécrit en intégrant par partie :

$$U_i^* = \int_p^{+\infty} D_i(z)\,dz.$$

[1] Jules Dupuit (1804-66), ingénieur français des ponts et chaussées, il publie en 1844 un texte intitulé : *De la mesure de l'utilité des Travaux Publics.*

Le surplus, noté S, des consommateurs est la somme des utilités individuelles. En notant $D(p) = \sum_i D_i(p)$, la fonction de demande totale, il vient que

$$S = S(p) = \int_p^{+\infty} D(z)\,dz.$$

Cette intégrale définit le surplus comme une fonction du prix de vente. De la même manière que pour le profit du monopole, il est possible d'écrire le surplus comme une fonction de la quantité. En utilisant la fonction inverse de la demande agrégée notée q, $P(q) = D^{-1}(p)$, en effectuant le changement de variable $z = P(x)$ et en intégrant par partie, il vient :

$$S = S(q) = \int_0^q P(x)\,dx - P(q)\,q.$$

Notons que par un abus de notation courant en économie industrielle, la même lettre S est utilisée pour décrire la fonction $S(p)$ et la fonction $S(q)$, bien qu'il s'agisse formellement de deux fonctions distinctes. Les figures 2.1 et 2.2 illustrent les intégrales qui définissent le surplus du consommateur. Elles montrent aussi que dans le cas d'une fonction de demande linéaire, il est assez simple de calculer le surplus des consommateurs puisqu'il s'agit de l'aire d'un triangle.

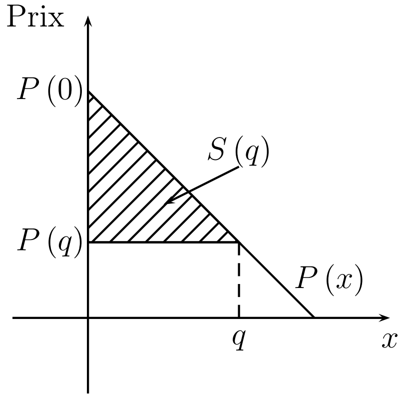


FIG. 2.1 – Surplus des consommateurs exprimé en termes de quantité

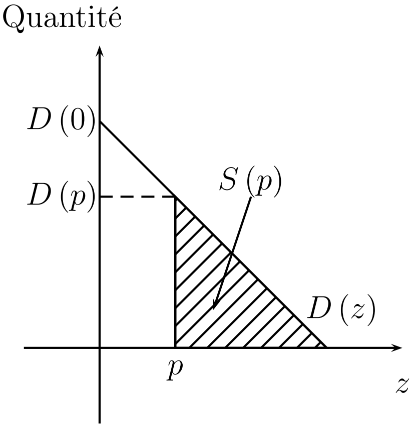


FIG. 2.2 – Surplus des consommateurs exprimé en termes de prix

BIEN-ÊTRE SOCIAL :

Le bien-être social est défini comme la somme du surplus des consommateurs et du profit réalisé par la firme. Nous noterons W (comme *welfare*) cette grandeur :

$$W = S + \Pi$$

Le bien-être social s'exprime soit en fonction du prix, p :

$$W = W(p) = \int_p^{+\infty} D(z)\,dz + pD(p) - C(D(p)),$$

soit en fonction de la quantité q :

$$W = W(q) = \int_0^q P(x)\,dx - C(q).$$

À nouveau, nous nommons de la même manière le bien-être social en fonction de p et ne fonction de q bien qu'il s'agisse de deux fonctions différentes. En fait, si $W(.)$ est définie comme une fonction du prix, lorsque nous écrivons $W(q)$ où q est la quantité, il faut lire $W(P(q))$.

La maximisation de $W(q)$ sur q conduit à la condition du premier ordre $P'(q) = C'(q)$ qui correspond au choix d'une entreprise en concurrence parfaite et qui diffère du choix réalisé par un monopole.

Les exercices de ce chapitre illustrent certaines conséquences de la présence d'une unique entreprise sur un marché. L'exercice 2.1 est un exemple très simple tandis que l'exercice 2.2 étudie le cas de fonctions de demande plus générales. Dans l'exercice 2.3 différentes mesures de l'effet de la présence d'un monopole sont étudiées. L'exercice 2.4 montre qu'en présence d'émissions polluantes, un monopole peut trop produire par rapport à l'optimum social. L'exercice 2.5 montre que le prix de monopole croît avec le coût marginal de production. L'exercice 2.6 étudie l'inefficacité sociale qu'entraîne à long terme la présence d'un monopole sur un marché. L'exercice 2.7 s'intéresse à la discrimination du premier degré. L'exercice 2.8 étudie la tarification d'un bien durable par un monopole. L'exercice 2.9 étudie les conflits d'intérêts lorsqu'un monopole vend à la fois sur le marché national et à l'international. L'exercice 2.10 étudie la tarification d'un monopole servant deux marchés distincts. L'exercice 2.11 montre comment un monopole peut exploiter l'existence de propensions à payer différentes entre des groupes de consommateurs. L'exercice 2.12 illustre comment un monopole en place peut limiter l'entrée d'un concurrent à l'aide de contrat de long terme avec ses clients.

2.1 Exemple numérique*

Objectif de l'exercice : Illustrer dans un cadre discret le comportement du monopole et son effet sur le bien-être social.

Considérons le marché d'un produit particulier tel que celui de l'ordinateur. Soient dix consommateurs potentiels sur ce marché, notés de C1 à C10. Chaque consommateur souhaite acheter au plus un ordinateur (zéro si le prix est trop élevé). Chaque consommateur à une évaluation notée v_i, i de 1 à 10 ; c'est-à-dire un prix maximum auquel il est disposé à acheter. De son côté le vendeur d'ordinateurs les achète à un prix unitaire de 3 000. Supposons que les prix de réserve sont les suivants : $v_1 = 2000$, $v_2 = 2500$, $v_3 = 3000$, $v_4 = 3500$, $v_5 = 4000$, $v_6 = 4500$, $v_7 = 5000$, $v_8 = 5500$, $v_9 = 6000$, $v_{10} = 6500$.

1. *Écrire et tracer le profit du monopole pour* $p \in v = \{v_1, v_2, ..., v_{10}\}$. *Déterminer le prix qui maximise ce profit.*
2. *Pour ce prix mesurer le bien-être social (somme du profit du vendeur et des surplus des acheteurs). Quel est le prix qui maximise le bien-être social ?*
3. *Quelle est l'analyse si* $v_1 = v_2 = \ldots = v_{10} > 3000$ *?*

Correction

1. Un consommateur achète si et seulement si son évaluation est supérieure ou égale au prix. Le profit du vendeur est donc : $\Pi = (p - 3000) \times \# \{i | v_i \geq p\}$ (où $\#\{\}$ est le cardinal de l'ensemble). La figure 2.3 représente le profit du monopole lorsque le prix varie de v_1 à v_{10}.

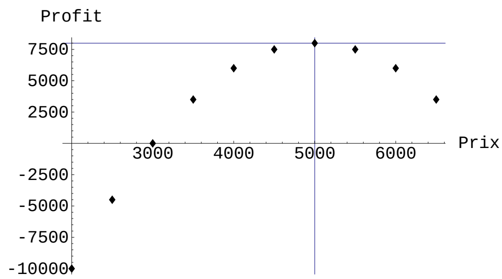


Fig. 2.3 – Profit du monopole

   Il est immédiat que le prix qui maximise le profit du monopole est : 5000. À ce prix seuls quatre consommateurs achètent.

2. Le bien-être social est égal à

$$\sum_{v_i \geq p} (v_i - p) + \sum_{v_i \geq p} (p - 3000) = \sum_{v_i \geq p} (v_i - 3000) \, .$$

   Lorsque $p = 5000$ le bien-être social est égal à $v_7 + \ldots + v_{10} - 4 \times 3000$ soit 11 000. Le bien-être social n'est pas maximum pour ce prix de monopole car les consommateurs 3 à 6 n'achètent pas alors que leur prix de réserve est supérieur au coût unitaire (égal ici au coût marginal). Il est immédiat (voir la figure 2.4) que le bien-être social est maximum pour $p = 3000$ avec $v_3 + \ldots + v_{10} - 8 \times 3000 = 14000$.

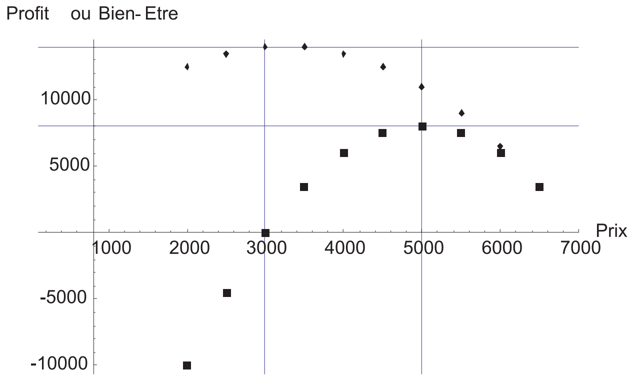


FIG. 2.4 – Bien-être social et profit du monopole

3. Lorsque tous les consommateurs ont le même prix de réserve v, le prix qui maximise le profit du monopole est v. Les consommateurs achètent mais le monopole s'accapare tout leur surplus. Néanmoins, le bien-être social est maximum pour ce prix puisque tous les consommateurs achètent. Tout prix dans l'intervalle $[3000, v]$ maximise le bien-être social. Plus le prix est proche de 3000 et plus le surplus des consommateurs est important et moins le profit du vendeur est grand. Tandis que l'inverse se produit lorsque le prix tend vers v.

2.2 Famille de fonctions de demande**

Objectif de l'exercice : Résoudre le programme de maximisation de son profit par un monopole. Étudier le prix et le profit de monopole lorsque l'élasticité de la demande varie. Comparaison entre le niveau maximum du bien-être social et le niveau en monopole.

Soit une famille de fonctions de demande décrite par le paramètre $\alpha \in [0, +\infty[$, *et telle qu'une fonction inverse de demande soit définie pour* $0 \leq q \leq 1$ *(normalisation) par :*

$$P(q, \alpha) = (1-q)^{\alpha}.$$

Afin de se concentrer uniquement sur les changements dans la fonction de demande, les coûts de production du monopole sont supposés constants et normalisés à zéro.

1. *Discuter la convexité de cette fonction inverse de demande pour différentes valeurs de* α. *Représenter dans le plan* (q, p) *cette famille de fonctions.*
2. *Écrire le profit du monopole et calculer la quantité qui le maximise.*
3. *Écrire la fonction de bien-être social. Déterminer la quantité* q^c *qui maximise le bien-être social, calculer* W^c *la valeur maximale du bien-être et* W^m *le niveau du bien-être en présence d'un monopole.*

Correction

1. Pour $\alpha = 0$ la fonction inverse de demande correspond à la droite horizontale $P = 1$, pour $\alpha \in]0, 1[$ la fonction inverse de demande est strictement concave. Pour $\alpha = 1$ il s'agit de la droite $1 - q$. Pour $\alpha \in]1, +\infty[$, la fonction inverse de demande est strictement convexe. La figure 2.5 montre ces différentes fonctions. Lorsque α tend vers l'infini, la fonction est convexe et se rapproche de l'axe vertical, tandis que si α tend vers zéro, la fonction est concave et se rapproche d'une droite horizontale.

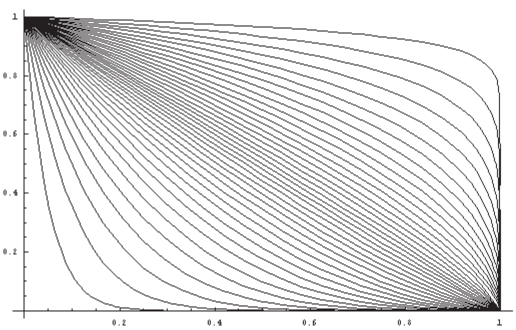
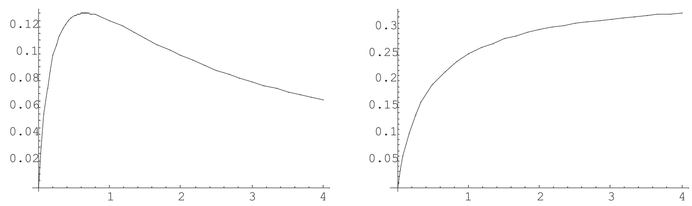


Fig. 2.5 – Une famille de fonctions de demande

2. Le profit du monopole s'écrit :
$$\Pi(q) = P(q)\, q = (1-q)^{\alpha}\, q.$$
Il en découle que
$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = (1-q)^{\alpha} - \alpha q (1-q)^{\alpha-1} = (1-q)^{\alpha-1}\left(1-(1+\alpha)\, q\right).$$
La quantité, q^m qui maximise le profit du monopole est donc
$$q^m = \frac{1}{1+\alpha}.$$
La condition du second ordre :
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = -\alpha\left(2-(1+\alpha)\, q\right)(1-q)^{\alpha-2}$$
indique bien que la fonction de profit est strictement concave en q^m (maximum local) mais qu'elle devient convexe pour $q > \frac{2}{1+\alpha}$. L'étude de la dérivée montre pourtant bien que la fonction de profit est strictement croissante avant q^m et strictement décroissante après. Donc bien qu'il ne s'agisse pas d'une fonction de profit strictement concave q^m est bien la quantité qui maximise le profit.
L'élasticité de la fonction inverse de demande est
$$\frac{-qP'(q)}{P(q)} = \alpha \frac{1-q}{q}$$
donc l'élasticité de la fonction de demande $D(p)$ s'écrit
$$\varepsilon = \frac{1}{\alpha} \frac{D(p)}{1-D(p)} .$$
Toute chose égale par ailleurs, ε diminue lorsque α augmente. Si α tend vers zéro, ε tend vers $+\infty$ et q^m tend vers 1 (la quantité qui maximise le bien-être social). Au contraire, si α tend vers $+\infty$, q^m tend vers zéro.
3. La fonction de bien-être social s'écrit
$$W(q) = \int_0^q P(x)\, dx = \frac{1}{1+\alpha} - \frac{(1-q)^{1+\alpha}}{1+\alpha},$$
le maximum de cette fonction, noté W^c, est obtenu lorsque le prix est égal au coût marginal, soit ici 0 et donc :
$$W^c = \frac{1}{1+\alpha}.$$
Le bien-être de monopole, noté W^m, est égal à
$$W^m = \frac{1}{1+\alpha}\left(1-\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{1+\alpha}\right).$$

Bien entendu, lorsque α tend vers zéro, W^m tend vers W^c. Lorsque α tend vers $+\infty$ la comparaison est plus délicate. En effet, il est facile de voir[2] que $\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{1+\alpha}$ tend vers $1/e$ lorsque α tend vers $+\infty$, mais cela a deux conséquences. D'une part W^c et W^m tendent tous les deux vers zéro. D'autre part W^m/W^c tend vers $1 - 1/e$. Donc d'un côté on peut dire que la perte de bien-être social disparaît lorsque α tend vers $+\infty$ (même résultat que pour α tend vers zéro), alors que de l'autre l'écart (en pourcentage) reste toujours strictement positif (ce qui n'est pas vrai lorsque α tend vers zéro).

Les écarts absolus $(W^c - W^m)$ et relatifs $(\frac{W^c - W^m}{W^c})$ sont représentés, en fonction de α, sur la figure 2.6.



Écart absolu

Écart relatif

FIG. 2.6 – Écarts de bien-être

[2]On a pour α proche de l'infini

$$Log\left[\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{1+\alpha}\right] = -(1+\alpha)\, Log\left[1 + 1/\alpha\right] \simeq -1$$

2.3 Coût social du monopole**

Objectif de l'exercice : Étudier le prix (ou la quantité) qui maximise une fonction de bien-être social généralisée (où le poids du profit n'est pas forcément égal au poids du surplus des consommateurs). Comparer avec le prix de monopole.

Soit un monopole faisant face à une demande $D(p)$ (resp. $P(q)$ la fonction inverse de demande) et produisant avec un coût marginal de production constant c. Supposons que l'objectif du gouvernement soit de maximiser une somme pondérée du profit du monopole et du surplus des consommateurs :

$$G(p) = \beta\Pi(p) + (1-\beta)S(p)$$

avec $\beta \in [0,1]$ (resp. $H(q) = \beta\Pi(q) + (1-\beta)S(q)$).

1. *Discuter du programme de maximisation de $G(p)$ en fonction de p : condition du premier ordre et concavité (resp. maximisation de $H(q)$ en fonction de q).*
2. *Application : déterminer $p^*(\beta)$ la solution à ce programme pour $D(p) = \max\{0\,;\, a-bp\}$ (avec $a>0$ et $b>0$) et $D(p) = p^{-\varepsilon}$ avec $1<\varepsilon$.*

Correction

1. (a) **Condition du premier ordre :** Soit

$$\varepsilon(p) = \frac{-pD'(p)}{D(p)},$$

l'élasticité prix de la fonction de demande. Le profit s'écrit $\Pi(p) = (p-c)D(p)$, dont la dérivée est $\Pi' = (p-c)D' + D$. Le surplus des consommateurs est égal à $\int_p^{+\infty} D(z)\,dz$, sa dérivée est donc $S' = -D(p)$. Il est donc facile de voir que $G'(p) = 0$ si et seulement si

$$\frac{p-c}{p} = \frac{2\beta-1}{\beta}\frac{1}{\varepsilon(p)}.$$

En particulier, lorsque $\beta = 1$, il s'agit exactement de l'équation qui donne le prix de monopole (l'indice de Lerner, $\frac{p-c}{p}$, est égal à l'inverse de l'élasticité prix de la demande). Pour $\beta = \frac{1}{2}$, le même poids est donné au profit et au surplus des consommateurs dans la fonction objectif, alors $\frac{2\beta-1}{\beta} = 0$ et donc le prix qui maximise le bien-être social est $p = c$. À l'autre extrême, lorsque $\beta \to 0$, $\frac{2\beta-1}{\beta}$ tend vers $-\infty$ ce qui indique que le prix doit tendre vers 0.

La fonction de profit écrite en fonction de la quantité q est égale à $\Pi(q) = P(q)q - cq$ tandis que le surplus des consommateurs s'écrit $S(q) = \int_0^q P(x)\,dx - P(q)q$. Il est immédiat que $S'(q) = qP'(q)$. Soit

$Rm(q) = P(q) + qP'(q)$ le revenu marginal de la firme. Il résulte de tout cela que $H'(q) = 0$ si et seulement si

$$\frac{2\beta - 1}{\beta} Rm(q) + \frac{1-\beta}{\beta} P(q) = c.$$

Si $\beta > \frac{1}{2}$, alors $\frac{1-\beta}{\beta} \leq 1$ et la courbe de la fonction $\widetilde{Rm} = \frac{2\beta-1}{\beta} Rm(q) + \frac{1-\beta}{\beta} P(q)$ se trouve entre celles du revenu marginal et de la fonction inverse de demande (figure 2.7). En revanche si $\beta < \frac{1}{2}$, cette courbe est au dessus de la fonction de demande (figure 2.8). Bien entendu, pour $\beta = \frac{1}{2}$, $\widetilde{Rm} = P(q)$ et la tarification optimale se fait au coût marginal.

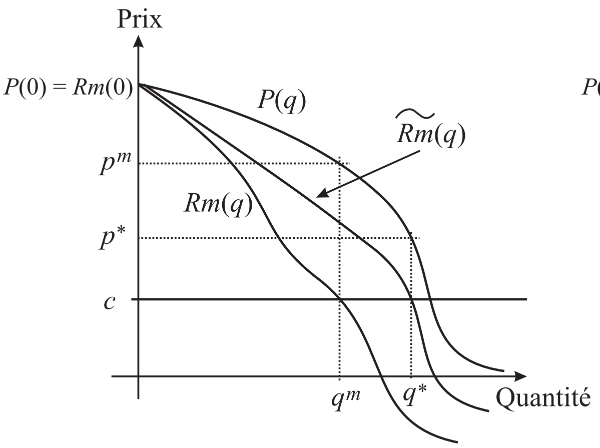


FIG. 2.7 – Cas $\beta > \frac{1}{2}$

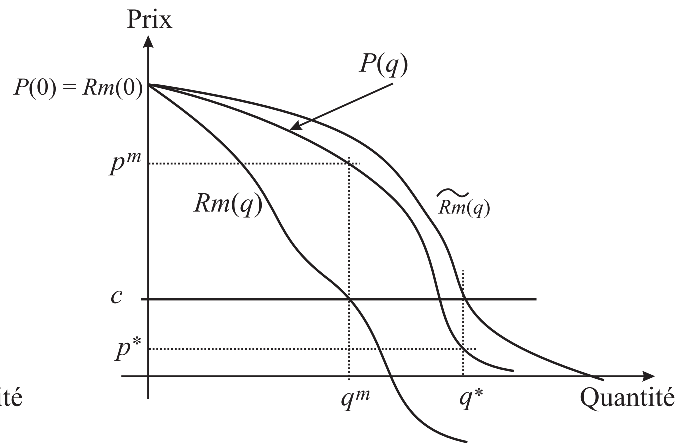


FIG. 2.8 – Cas $\beta < \frac{1}{2}$

(b) **Condition du second ordre :** En prix, la dérivée seconde de la fonction de profit s'écrit $\Pi'' = (p - c) D'' + 2D'$, celle du surplus est égale à $-D'$. Il apparaît donc que s'il est raisonnable de supposer que la fonction de profit est concave (ou au moins strictement quasi-concave), la fonction de surplus des consommateurs est, elle, strictement convexe en p. Il en découle que si β est proche de 1, alors $G(p)$ sera plutôt concave, tandis que si β est proche de 0, alors $G(p)$ sera plutôt convexe. Dans ce dernier cas, la condition du premier ordre ne conduira pas au maximum. Si G est globalement convexe, alors le maximum sera réalisé pour $p = 0$ (prix pour lequel le surplus des consommateurs est maximum).

En quantité, il vient : $H'' = (2\beta - 1) Rm' + (1 - \beta) P'$ où P' est négatif, Rm' est en général négatif (ici cela correspond à la concavité de la fonction de profit puisque les coûts marginaux sont constants) tandis que le signe de $(2\beta - 1)$ est positif ou négatif selon la position de β par rapport à 1/2. Il en résulte que si β est proche supérieur à 1/2, H'' est certainement négatif. En revanche, si β est proche de 0, alors il est possible que H'' soit positif. Et à nouveau il faudrait être prudent avec l'usage de la condition du premier ordre.

2. Applications

   (a) $D(p) = \max\{0; a - bp\}$

Le calcul de la dérivée seconde conduit à $G'' = (1 - 3\beta)\, b$. La fonction G est un polynôme du second degré en p, strictement concave si $\beta > \frac{1}{3}$ et strictement convexe si $\beta < \frac{1}{3}$ (si $\beta = \frac{1}{3}$ il s'agit d'une droite décroissante). Le prix optimal est donc 0 lorsque $\beta \leq \frac{1}{3}$. Si $\beta > \frac{1}{3}$ il faut utiliser la condition du premier ordre. Finalement il vient :

$$p^*(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1-2\beta}{1-3\beta}\frac{a}{b} - \frac{\beta}{1-3\beta}c & \text{si } \beta > \frac{1}{3} \end{cases}$$

(b) $D(p) = p^{-\varepsilon}$

Le mieux est d'écrire les dérivées première et seconde de G de la manière suivante :

$$G' = p^{-\varepsilon-1}\left[\beta c\varepsilon - (1 - 2\beta + \beta\varepsilon)\, p\right],$$

et

$$G'' = -\varepsilon p^{-\varepsilon-2}\left[\beta c\,(1+\varepsilon) - (1 - 2\beta + \beta\varepsilon)\, p\right],$$

La fonction G n'est ni concave ni convexe mais elle est bien strictement quasi-concave (croissante avant le prix qui annule la dérivée première puis décroissante après). Le prix optimal est donc :

$$p^*(\beta) = \frac{\beta c\varepsilon}{1 - 2\beta + \beta\varepsilon}$$

On note que la condition $\varepsilon > 1$ est nécessaire pour assurer que quel que soit β, ce prix est bien positif.

2.4 Monopole et pollution*

Objectif de l'exercice : Le résultat central de l'étude du monopole est qu'il produit trop peu par rapport à la quantité qui maximise le bien-être social. Ce point peut-être contredit en présence d'une externalité négative liée à la production.

Soit un monopole sur un marché où la fonction inverse de demande est notée $P(q)$. La fonction de coût de production du monopole est notée $C(q)$.

1. *Supposons que le monopole dégage de la pollution (bruits, émissions, emballage, ...). Cette pollution ne coûte rien au monopole mais a un coût pour la société noté $\gamma(q)$ avec $\gamma' \geq 0$. Représenter la perte de bien-être social et discuter selon l'importance de la fonction γ.*
2. *Application : $P(q) = \max\{0; 1-q\}$, $C = 0$, $\gamma = cq$, avec $c \in [0,1]$.*

Correction

1. La figure 2.9 donne une solution graphique à la question. Le monopole détermine son prix uniquement en fonction du coût marginal C' et de la fonction de demande (plus précisément du revenu marginal et du coût marginal). En revanche, le bien-être social prend lui en compte le coût marginal réel pour la société : $C' + \gamma'$ (intersection entre la fonction inverse de demande et le coût marginal total). Éventuellement, p^* est supérieur à p^m si γ' est important. C'est-à-dire que le monopole pratique un prix insuffisamment élevé compte tenu de l'externalité négative qu'entraîne sa production.

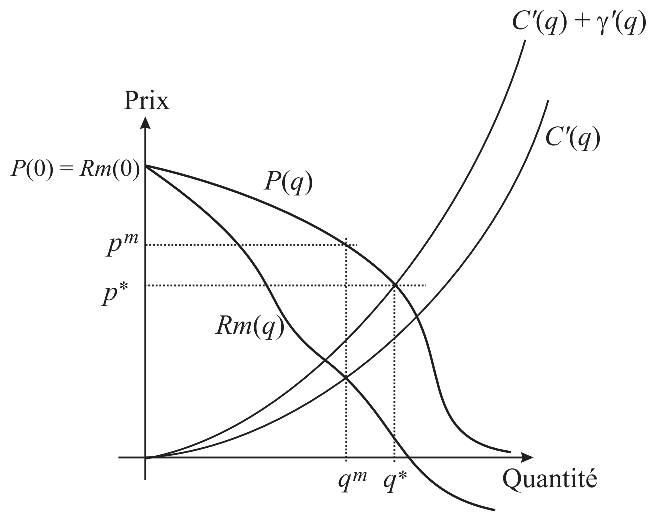


Fig. 2.9 – Monopole et externalité négative

2. Il est immédiat que la quantité qui maximise le profit du monopole $((1-q)\,q)$ est égale à $\frac{1}{2}$ et que $p^m = \frac{1}{2}$. Le prix qui maximise le bien-être social

$\left(\frac{1}{2}\left(1-p\right)^2+\left(p-c\right)\left(1-p\right)\right)$ est compte tenu de la pollution $p^* = c$ donc :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } 0 \leq c < \frac{1}{2}, & \text{alors } p^m > p^* \\ \text{Si } c = \frac{1}{2}, & \text{alors } p^m = p^* \\ \text{Si } c > \frac{1}{2}, & \text{alors } p^m < p^* \end{array}$$

2.5 Prix de monopole et coût marginal*

Objectif de l'exercice : Montrer que le prix de monopole augmente si la fonction de coût marginal augmente.

Considérons deux fonctions de coûts : $C_1(.)$ et $C_2(.)$ telles que pour toute quantité q, $C_1'(q) < C_2'(q)$. Notons p_i^m et q_i^m, $i = 1, 2$ le prix et la quantité de monopole.

1. *Montrer que $[C_2(q_1^m) - C_2(q_2^m)] - [C_1(q_1^m) - C_1(q_2^m)] \geq 0$.*
2. *En déduire que $q_1^m \geq q_2^m$ et donc le résultat sur les prix.*
3. *Construire un exemple où pour tout q, $C_1'(q) < C_2'(q)$ et $q_1^m = q_2^m$.*

Correction

1. En utilisant la définition du maximum, il vient que pour $i \neq j$, $i, j = 1, 2$.

$$p_i^m q_i^m - C_i(q_i^m) \geq p_j^m q_j^m - C_i\left(q_j^m\right).$$

Il en résulte que

$$[C_2(q_1^m) - C_2(q_2^m)] - [C_1(q_1^m) - C_1(q_2^m)] \geq 0.$$

2. Il est possible de réécrire la dernière inégalité sous la forme :

$$\int_{q_2^m}^{q_1^m} [C_2'(x) - C_1'(x)]\, dx \geq 0.$$

Puisque $C_1'(q) < C_2'(q)$ l'intégrale ne peut être positive que si $q_2^m \leq q_1^m$, il en découle bien que le prix croît avec le coût marginal.

3. Ce résultat peut apparaître lorsque la fonction de demande présente une discontinuité comme sur la figure 2.10.

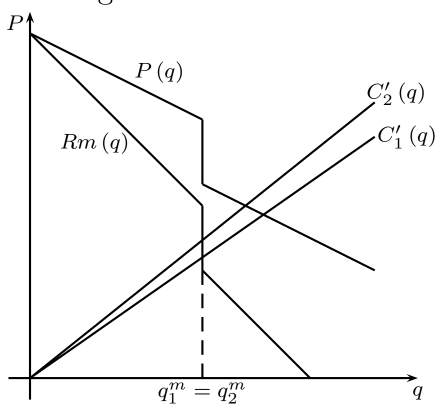


Fig. 2.10 – Prix de monopole insensible à un changement ce coût

2.6 Monopole à long terme**

Objectif de l'exercice : La distortion de la quantité due à la présence d'un monopole est en général étudiée à court terme. Cependant à long terme un marché concurrentiel ne contient pas qu'une seule firme et de même le monopole peut construire plusieurs établissements. Comment évolue cette distortion dans cette perspective ?

À long terme le nombre, n, d'entreprises présentes sur un marché de concurrence parfaite augmente jusqu'à ce que chaque entreprise réalise un profit nul. En d'autres termes, à long terme la concurrence est plus vive et le prix diminue. Soit F le coût fixe de production. Soit $P(q)$ la fonction inverse de demande et soit $C(q)$ la fonction de coût commune à toutes les entreprises.

1. *Rappeler les conditions sur n et q qui caractérisent l'équilibre concurrentiel[3] de long terme (libre entrée donc profits nuls). Quels seraient les choix (de n et de q) d'un planificateur social ?*
2. *À long terme le monopole peut avoir intérêt à ouvrir plusieurs usines. Déterminer le nombre d'usines construites par un monopole et le niveau de production de chacune d'elles.*
3. *Comparer les choix d'un monopole avec ceux qui résultent de la libre entrée. En particulier étudier le cas de la fonction de demande linéaire.*

Correction

1. Par hypothèse, sur un marché concurrentiel les entreprises considèrent qu'elles n'ont pas d'influence sur le prix. Elles maximisent donc leurs profits en choisissant une quantité à prix fixe. La solution du programme $\max_q (pq - C(q))$ détermine l'offre individuelle d'une entreprise notée $q^*(p)$. Elle est donnée par la condition du premier ordre : $C'(q) = p$. Toujours par définition, le prix concurrentiel est tel que l'offre est égale à la demande soit : $nq^*(p) = D(p)$. En composant par la fonction $P = D^{-1}$ et en utilisant la condition prix égal coût marginal, il vient : $C'(q) = P(nq)$. À long terme, la libre entrée pousse le profit vers zéro. En effet tant que le profit est strictement supérieur à zéro, une nouvelle firme a intérêt à s'installer. Le profit est nul si le prix est égal au coût moyen ($CM(.)$). Les conditions qui caractérisent l'équilibre concurrentiel de long terme sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} C'(q) = P(nq) & \text{Offre} = \text{Demande} \\ P(nq) = CM(q) = \frac{C(q)+F}{q} & \text{Profit nul (libre entrée)} \end{cases}$$

Ces conditions permettent de déterminer le nombre n^* d'entreprises actives et la quantité q^* produite par chaque firme. À court terme, la maximisation

[3]Chaque firme maximise son profit à prix, p, fixe et détermine ainsi son offre concurrentielle individuelle. La somme des offres individuelles donne l'offre totale concurrentielle. L'équilibre concurrentiel s'obtient alors en cherchant le prix qui égalise l'offre totale à la demande totale (ici la demande des consommateurs).

du bien-être amène exactement aux mêmes conditions. En effet, la fonction de bien-être social s'écrit :

$$W(q,n) = \int_0^{nq} P(u)\,du - nC(q) - nF$$

où la maximisation s'opère à la fois en q et en n. Cela conduit aux conditions du premier ordre suivantes qui sont identiques aux équations définissant l'équilibre concurrentiel :

$$\begin{cases} \frac{\partial W(q,n)}{\partial q} = 0 \\ \frac{\partial W(q,n)}{\partial n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\left(P(nq) - C'(q)\right) = 0 \\ P(nq) = \frac{C(q)+F}{q} \end{cases}$$

2. Le programme du monopole s'écrit dans ce cas :

$$\max_{q,n}\left[P(nq)\,nq - nC(q) - nF\right].$$

En supposant que ce programme est concave, les conditions du premier ordre permettent de déterminer les valeurs notées $\widehat{n}$ et $\widehat{q}$ qui maximisent le profit du monopole :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi(q,n)}{\partial q} = 0 \\ \frac{\partial \Pi(q,n)}{\partial n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nqP'(nq) + P(nq) - C'(q) = 0 \\ nqP'(nq) + P(nq) = \frac{C(q)+F}{q} \end{cases}$$

3. En concurrence parfaite, q^* et n^* sont déterminés par les équations :

$$P(n^*q^*) = Cm(q^*) = CM(q^*),$$

les grandeurs choisies par le monopole, elles, vérifient :

$$Rm(\widehat{n}\widehat{q}) = Cm(\widehat{q}) = CM(\widehat{q}).$$

À nouveau, là où il serait optimal d'égaliser le prix au coût marginal et au coût moyen, le monopole égalise le revenu marginal. Il en résulte toutefois que

$$\widehat{q} = q^*.$$

En effet, $\widehat{q}$ et q^* sont toutes les deux solutions de la même équation : $Cm(q) = CM(q)$. À long terme la quantité produite par chacune des usines du monopole est égale à la quantité que produirait chaque entreprise concurrentielle. Cette quantité est donc efficace. Pourtant la quantité totale produite n'est, elle, pas optimale car

$$\widehat{n} < n^*.$$

En effet, n^* est solution de $P(nq^*) = Cm(q^*)$ alors que $\widehat{n}$ est solution de $Rm(nq^*) = Cm(q^*)$, or, $P(nq^*) > Rm(nq^*)$. En particulier, si la fonction de demande est linéaire (voir la figure 2.11), il est immédiat que

$$Rm(\widehat{n}q) = P(n^*q) \Leftrightarrow \widehat{n} = \frac{1}{2}n^*,$$

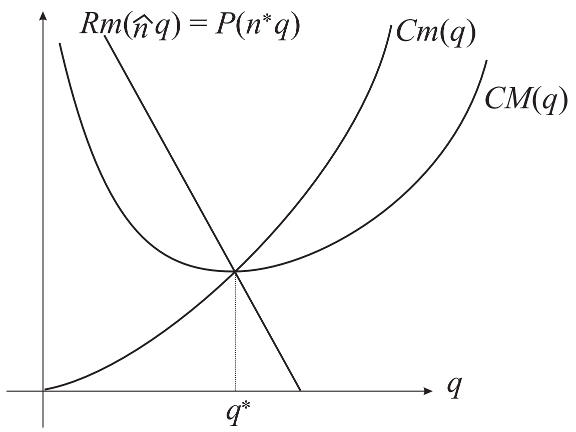


FIG. 2.11 – Monopole et concurrence parfaite à long terme

c'est-à-dire que le monopole installe deux fois moins d'usines qu'il en apparaîtrait en concurrence parfaite avec libre entrée. Notons que sur la figure 2.11 nous avons $Rm\left(\widehat{n}q\right) = P\left(n^*q\right)$ pour tout q et non pas seulement pour q^*. Toutefois, cette propriété n'est vraie que pour les demandes linéaires[4].

[4]Il suffit de se rappeler que $Rm(0) = P(0)$ et que par deux points il ne passe qu'une seule droite.

2.7 Majorité en faveur de la discrimination*

Objectif de l'exercice : La discrimination parfaite est à première vue défavorable aux consommateurs. Une majorité d'entre-eux peut toutefois y être favorable si en son absence le prix est trop élevé pour qu'ils puissent acheter.

Soit un continuum de consommateurs achetant toujours 0 ou 1 unité d'un bien produit (avec un coût marginal nul) par un monopole. Chaque consommateur est caractérisé par son évaluation v, $v \in [0,1]$ et sa fonction d'utilité est $u = v - p$, avec p le prix du bien, s'il achète et 0 sinon.

1. *Montrer que la fonction de demande lorsque le prix est le même pour tous est* $\max\{0\,;\,1-p\}$*, calculer le prix de monopole, le surplus d'un consommateur v et le surplus des consommateurs ainsi que le bien-être social.*
2. *Le monopole propose d'introduire un révélateur de v c'est-à-dire une machine permettant de connaître avec exactitude l' évaluation d'un consommateur. Une fois v révélé, le prix proposé au consommateur est $v-\varepsilon(v)$ avec $\varepsilon(v) > 0$ aussi petit que désiré. Quels sont les consommateurs pour et ceux contre ?*

Correction

1. Soit $0 \leq p \leq 1$, un consommateur achète si et seulement si son utilité en achetant est supérieure à 0, soit $v \geq p$. Il en résulte que tous les consommateurs avec $v \geq p$ achètent. Cela conduit à la fonction de demande : $D(p) = \int_p^1 dv = 1 - p$. Le profit du monopole s'écrit donc $p(1-p)$ qui est maximum pour $p^m = \frac{1}{2}$ et pour ce prix le profit s'élève à $\pi^m = \frac{1}{4}$. Le surplus d'un consommateur v est $\max\{0\,;\,v - 1/2\}$. Le surplus des consommateurs est égal à $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(v - \frac{1}{2}\right) dv = \frac{1}{8}$ et donc le bien-être social s'élève à $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.
2. Tous les consommateurs avec un $v \leq \frac{1}{2} + \varepsilon(v)$ sont favorables à la discrimination. En effet, elle leur assure une utilité égale à $\varepsilon(v) > 0$ alors qu'en son absence ils ont une utilité nulle. En revanche, les consommateurs avec un $v > \frac{1}{2} + \varepsilon(v)$ sont contre la discrimination. Ici plus de 50% des consommateurs sont donc favorables à la discrimination. Le profit du monopole discriminant s'élève à $\int_0^1 (v - \varepsilon(v))\, dv$ soit $1/2 - \varepsilon$, où $\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon(v)\, dv$, tandis que le surplus des consommateurs est $\int_0^1 \varepsilon(v)\, dv = \varepsilon$, donc le bien-être social avec discrimination est de $1/2$ et il est plus important que le bien-être social sans discrimination (résultat classique avec une discrimination du premier degré).

2.8 Monopole et bien durable**

Objectif de l'exercice : Montrer comment le monopole d'un bien durable se fait concurrence à lui-même lorsqu'il vend sur plusieurs périodes. Comparer la vente avec la location du bien[5].

Considérons un monopole et un continuum de consommateurs qui vivent deux périodes $t = 1, 2$. Le monopole produit un bien durable qui ne se détériore pas entre les deux périodes. Le coût de production est supposé nul. Soit δ le taux d'escompte. Les consommateurs achètent une ou zéro unité, ils sont caractérisés par un paramètre v (chaque consommateur a un v différent) uniformément distribué sur $[0, 1]$. Leur fonction d'utilité s'écrit $u = v - p$ (si consommation et 0 sinon).

1. *Le monopole cherche d'abord à vendre son bien. Soit p_1 le prix affiché en première période et p_2 le prix de seconde période. L'utilité d'un consommateur s'écrit :*

$$u = \begin{cases} (1+\delta)\, v - p_1 & \textit{s'il achète en première période,} \\ \delta\,(v - p_2) & \textit{s'il achète en deuxième période,} \\ 0 & \textit{s'il n'achète pas.} \end{cases}$$

   En raisonnant par récurrence arrière, *déterminer les prix p_2^* et p_1^* qui maximisent le profit du monopole.*

2. *Le monopole loue le bien durable au prix p_t pour la période t. Déterminer sa politique optimale de location. Calculer le profit du monopole noté Π^L.*
3. *Comparer Π^V et Π^L.*

Correction

1. Il faut commencer par résoudre la maximisation de deuxième période c'est-à-dire trouver pour tout prix p_1 le prix $p_2^*(p_1)$ qui maximise le profit du monopole. Soit p_1 le prix pratiqué en première période. La difficulté est qu'il n'est pas encore possible de savoir qui achète ou pas. Cependant si un consommateur v achète dès la première période, il est immédiat qu'un consommateur v' avec $v' > v$ trouve lui aussi profitable d'acheter immédiatement plutôt que d'attendre. Il est donc possible de noter $\widetilde{v_1}(p_1)$ le consommateur indifférent entre acheter en première période ou acheter en seconde période. Tous les consommateurs dont le v est inférieur à $\widetilde{v_1}$ n'ont donc pas acheté en première période. Il en résulte que la demande de seconde période est : $D_2(p_2) = \widetilde{v_1} - p_2$. Donc le prix optimal de seconde période est : $p_2^*(p_1) = \frac{1}{2}\widetilde{v_1}$.

[5] Pour plus sur la production d'un bien durable par un monopole, voir l'article de Michael Waldman "Durable Goods Theory of Real World Markets", *Journal of Economic Perspectives*, Winter 2003, Vol. 17, number 1, pp. 131-154.

Cela permet de déterminer finalement l'expression de $\widetilde{v_1}$. En effet, par définition : $(1+\delta)\,\widetilde{v_1} - p_1 = \delta\left(\widetilde{v_1} - p_2^*(p_1)\right)$ d'où

$$\widetilde{v_1}(p_1) = \frac{1}{1+\frac{\delta}{2}}p_1.$$

Le profit de seconde période est égal à $\frac{1}{4}\widetilde{v_1}^2$. Le monopole détermine p_1 de telle sorte à maximiser le profit de première période plus le profit de seconde période soit :

$$p_1\left(1-\widetilde{v_1}(p_1)\right) + \frac{\delta}{4}\widetilde{v_1}^2 = p_1\left(1+\left(-\frac{2}{2+\delta}+\frac{\delta}{(2+\delta)^2}\right)p_1\right)$$

d'où

$$p_1^* = \frac{(2+\delta)^2}{2(4+\delta)},$$

et donc

$$p_2^* = \frac{1}{2}\frac{2+\delta}{4+\delta}$$

Finalement,

$$\Pi^V = \frac{1}{4}\frac{(2+\delta)^2}{4+\delta}$$

2. La location fait perdre au bien son caractère durable. Chaque consommateur accepte ou pas de louer le bien à la période t si et seulement si $p_t \leq v$. Il en résulte qu'à chaque période le monopole maximise son profit

$$p(1-p)$$

ce qui conduit à

$$p_1^L = p_2^L = \frac{1}{2}$$

et donc à

$$\Pi^L = \frac{1}{4} + \delta\frac{1}{4} = \frac{1+\delta}{4}.$$

3. Il est facile de vérifier que

$$\Pi^L > \Pi^V,$$

en effet :

$$1+\delta > \frac{(2+\delta)^2}{4+\delta}.$$

Cela illustre l'idée qu'un producteur d'un bien durable se fait concurrence à lui même et que cela le pousse à baisser son prix. En revanche s'il réussit à louer son produit il peut maintenir un prix plus élevé et réaliser plus de profit.

2.9 Monopoles exportateurs*

Objectif de l'exercice : Illustrer la difficulté à réguler un monopole qui exporte. D'un côté le gouvernement souhaite un prix bas pour réduire la perte de bien-être social au sein de son pays. D'un autre il désire un prix élevé pour maximiser le revenu lié aux exportations.

Soient deux pays, A et B de même taille. Le pays A abrite une entreprise qui produit un bien y_A et le pays B une entreprise qui fabrique le bien y_B. Chacune des entreprises dispose d'une situation de monopole sur le marché national comme sur le marché international. Dans chaque pays et pour chaque bien, la demande est de la forme $\max\{0; (1-p)\}$. *Les coûts marginaux de production sont supposés constants et sont normalisés à* 0. *De plus il n'y a pas de coût de transport d'un pays à l'autre. Du fait d'une possibilité d'arbitrage parfait*[6]*, une firme doit fixer le même prix sur les deux marchés.*

1. *Les entreprises fixent librement leurs prix. Déterminer les prix choisis par les firmes pour maximiser leur profits et en déduire le bien être dans chacun des pays.*
2. *Dans chaque pays le gouvernement décide ou pas de réguler le prix du monopole national (comme précédemment le prix d'un bien est le même sur les deux marchés) en le fixant égal au coût marginal. Écrire sous forme normale le jeu où les gouvernements font ce choix simultanément et le résoudre.*

Correction

1. Pour maximiser son profit un monopole fixe un prix égal à $\frac{1}{2}$ dans chaque pays :

$$\max_p p(1-p) \Leftrightarrow 1-2p=0 \Leftrightarrow p=1/2$$

Le profit du monopole sur un marché est donc : $1/2(1-1/2)=1/4$. Tandis que le surplus des consommateurs sur un marché est : $1/2(P(0)-P(q^m))q^m = 1/8$ (voir le rappel de cours).
Le bien-être dans un pays est donc égal à la somme de $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ (profit de la firme nationale) et de $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ (surplus des consommateurs sur chacun des deux marchés). Soit un bien-être égal à $W\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ où $W(p_A,p_B)$ est le bien-être social lorsque le prix du bien A est p_A et celui du bien B p_B.

2. Si les deux gouvernements décident de fixer le prix au niveau du coût marginal, le bien-être de chaque pays passe à $W(0,0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Si le gouvernement national décide de fixer le prix à zéro mais que le gouvernement étranger maintient un prix de monopole le bien-être est égal à $W\left(0,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$. Enfin, si le gouvernement national maintient le prix de monopole le bien-être

[6] En cas de prix différents, un arbitragiste achète au prix le plus bas et revend légèrement en dessous du prix le plus élevé.

devient : $W\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{9}{8}$. Cela correspond donc au jeu de la table 2.1.

		G2	
		$p=0$	$p=1/2$
G1	$p=0$	$(1,1)$	$\left(\frac{5}{8},\frac{9}{8}\right)$
	$p=1/2$	$\left(\frac{9}{8},\frac{5}{8}\right)$	$\left(\frac{6}{8},\frac{6}{8}\right)$

TAB. 2.1 – Faut-il réguler un monopole qui exporte ?

Il en résulte qu'en l'absence de coopération entre les deux gouvernements (et de possibilité de discriminer les consommateurs nationaux des autres consommateurs), le seul équilibre de Nash de ce jeu est de laisser les firmes nationales vendre au prix de monopole. Il s'agit d'un dilemme des prisonniers.

2.10 Discrimination entre deux marchés**

Objectif de l'exercice : Déterminer la stratégie optimale d'un monopole qui a accès à deux marchés pour vendre le même bien. Étudier l'impact de la discrimination sur le bien-être social.

Soit un monopole qui produit à coût nul un bien qu'il peut vendre sur deux marchés, 1 et 2. La demande sur le marché 1 est $D_1(p_1) = \max\{0; a_1 - p\}$ et celle sur le marché 2 est $D_2(p_2) = \max\{0; a_2 - p\}$, avec $a_1 > a_2$.

1. *Supposons que le monopole puisse pratiquer des prix différents sur chaque marché. Calculer les prix et les quantités sur chaque marché. En déduire S_1 et S_2 les surplus, Π le profit et W le bien-être.*
2. *Imaginons maintenant que la discrimination soit interdite. Calculer le prix unique, $\overline{p}$ qui maximise le profit du monopole en supposant que les deux marchés sont servis. Vérifier que $\overline{p}$ est bien compris entre les deux prix précédents.*
3. *Montrer que si $a_1 > 3a_2$, alors le monopole préfère ne pas servir le deuxième marché. Quel prix choisit-il ? Montrer que le bien-être sans discrimination est inférieur au bien-être avec discrimination.*
4. *Supposons que $a_2 < a_1 < 3a_2$, montrer que le bien-être sans discrimination est supérieur au bien-être avec discrimination. Qui gagne et qui perd ?*

Correction

1. Soit $i = 1, 2$. Sur le marché i le profit du monopole s'écrit $p(a_i - p)$. Il est donc maximum pour $p_i^m = \frac{a_i}{2}$ pour un montant $\pi_i^m = \frac{a_i^2}{4}$. Pour ce prix le surplus des consommateurs est égal à $\int_{\frac{a_i}{2}}^{a_i} (a_i - p)\, dp = \frac{a_i^2}{8}$ et donc le bien-être social sur le marché i est $W_i = \frac{3}{8}a_i^2$. Le profit total est $\Pi = \pi_1^m + \pi_2^m = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2)$ et le bien-être total est $W = W_1 + W_2 = \frac{3}{8}(a_1^2 + a_2^2)$.
2. Si la discrimination est interdite le monopole doit proposer le même prix sur les deux marchés. Son profit ne peut donc pas être séparer en deux et s'écrit : $p(a_1 + a_2 - 2p)$. Il est donc maximum pour $\overline{p} = \frac{a_1+a_2}{4}$. On a donc $p_2^m < \overline{p} < p_1^m$, en effet $\frac{a_i}{2} > \frac{a_i+a_j}{4}$ si et seulement si $a_i > a_j$.
3. Le calcul précédent de $\overline{p}$ n'est valable que si $\frac{a_1+a_2}{4} < a_2$ c'est-à-dire s'il existe des consommateurs du marché 2 qui consomment. Si, au contraire, $\frac{a_1+a_2}{4} > a_2$ c'est-à-dire $a_1 > 3a_2$, alors le maximum de la fonction de profit : $p(\max\{0, a_1 - p\} + \max\{0, a_2 - p\})$ est atteint pour $p = p_1^m$ ce qui signifie bien que le monopole ne sert qu'un seul marché (il fixe un prix trop élevé pour les consommateurs du petit marché). La figure 2.12 illustre les deux cas de figure. À gauche le profit maximum est atteint lorsque le deux marchés sont servis, à droite seul le marché 1 est approvisionné.

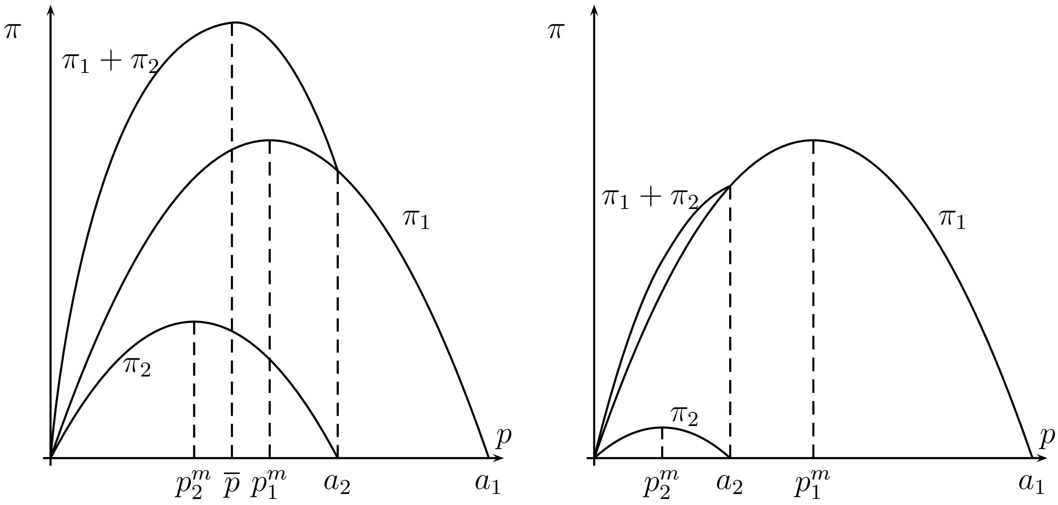


FIG. 2.12 – Profits sur chaque marché et somme des deux

Le bien-être sans discrimination est donc simplement le bien-être du marché 1 : W_1^m. En revanche si la discrimination était autorisée le bien-être serait supérieur : $W_1^m + W_2^m$.

4. Lorsque $a_2 < a_1 < 3a_2$, nous sommes dans une situation illustrée par le graphique de gauche de la figure 2.12. Le bien-être social sans discrimination est donc égal à $W(\overline{p})$ c'est-à-dire $\Pi(\overline{p}) + S_1(\overline{p}) + S_2(\overline{p})$, avec $\Pi(\overline{p}) = \frac{1}{8}(a_1 + a_2)^2$, $S_1(\overline{p}) = \frac{1}{32}(3a_1 - a_2)^2$ et $S_2(\overline{p}) = \frac{1}{32}(3a_2 - a_1)^2$ donc le bien-être social s'élève à

$$\overline{W} = \frac{1}{16}\left[7a_1^2 + 7a_2^2 - 2a_1a_2\right] = \frac{1}{16}\left[6a_1^2 + 6a_2^2 + (a_1 - a_2)^2\right].$$

Par ailleurs, le bien-être social avec discrimination W^D est égal à la somme $W_1^m + W_2^m$ soit

$$W^D = \frac{3}{8}\left[a_1^2 + a_2^2\right] = \frac{1}{16}\left[6a_1^2 + 6a_2^2\right].$$

Il est donc immédiat que $W^D < \overline{W}$ tant que les marchés sont de tailles différentes. L'absence de discrimination favorise les consommateurs du grand marché puisque $\overline{p} < p_1^m$ mais pénalise les consommateurs du petit marché qui eux doivent payer plus cher. Globalement, le gain de bien-être réalisé sur le grand marché dépasse la perte de bien-être subie sur le petit marché.

2.11 Discrimination du second degré**

Objectif de l'exercice : Illustrer la discrimination du second degré qui consiste pour un monopole à proposer au lieu d'un prix unitaire des prix différents selon la quantité. Cette politique cherche à tirer parti des différentes utilités marginales au sein des consommateurs.

Supposons qu'il n'existe que deux types de consommateurs, 1 et 2, caractérisés par : θ_1 et θ_2 avec $\theta_1 < \theta_2$. Soit $f(.)$ une fonction strictement croissante et strictement concave, la fonction d'utilité d'un individu de type i qui consomme q unités de bien au prix total t est $\theta_i f(q) - t$. Le monopole qui produit avec un coût marginal constant noté c, ignore le type des consommateurs, cependant il cherche à maximiser son profit en tirant parti du fait qu'il existe deux types de consommateurs. Pour cela il propose deux "paniers de biens" : (q_1, t_1) d'une part, destiné à être acheté par les consommateurs qui valorisent peu le bien et (q_2, t_2) d'autre part, qui cible les consommateurs avec un θ élevé.

1. *Écrire le profit du monopole lorsque les n_1 consommateurs de type 1 achètent le panier 1 et les n_2 consommateurs de type 2 achètent le panier 2.*
2. *Supposons que le monopole a intérêt à ne pas exclure les consommateurs de type 1. Notons $f_i = f(q_i)$. Le programme de maximisation du profit s'effectue donc sous quatre contraintes : deux contraintes de participations (chaque type de consommateur préfère acheter à ne pas acheter. Et deux contraintes de non-imitation (chaque type préfère acheter le panier qui lui est destiné plutôt que l'autre panier). Écrire ces quatre contraintes.*
3. *Montrer que la contrainte de participation d'un consommateur de type 2 est vérifiée si les trois autres le sont. Montrer que la contrainte de participation d'un type 1 et la contrainte de non-imitation d'un type 2 sont saturées et que la contrainte de non-imitation d'un type 1 est vérifiée.*
4. *Résoudre le programme du monopole.*

Correction

1. Le profit du monopole s'écrit dans ce cadre :

$$\Pi = n_1 (t_1 - cq_1) + n_2 (t_2 - cq_2),$$

   où n_1 est le nombre de consommateurs de type 1 et n_2 de type 2.

2. Les consommateurs de chaque type achètent effectivement :

$$\theta_1 f_1 - t_1 \geq 0, \tag{2.1}$$

$$\theta_2 f_2 - t_2 \geq 0. \tag{2.2}$$

   Chaque type de consommateur achète le panier qui lui est destiné et pas l'autre panier :

$$\theta_1 f_1 - t_1 \geq \theta_1 f_2 - t_2, \tag{2.3}$$

$$\theta_2 f_2 - t_2 \geq \theta_2 f_1 - t_1. \tag{2.4}$$

3. Supposons que les conditions 2.1 et 2.4 sont satisfaites alors la contrainte 2.2 est aussi vraie. En effet, si $\theta_1 f_1 - t_1 \geq 0$, alors comme $\theta_2 > \theta_1$, il en découle que $\theta_2 f_1 - t_1 > 0$. Or, 2.4 implique que $\theta_2 f_2 - t_2 \geq \theta_2 f_1 - t_1$ et donc que $\theta_2 f_2 - t_2 > 0$. Nous avons même obtenu un strictement supérieur ce qui montre que les consommateurs de type 2 doivent avoir un surplus strictement positif, donc t_2 ne peut pas "prendre" tout le surplus de ces consommateurs.

   Le mieux pour saisir le rôle des quatre contraintes est de les représenter dans le plan t_1, t_2 comme sur la figure 2.13. Comme la fonction objectif

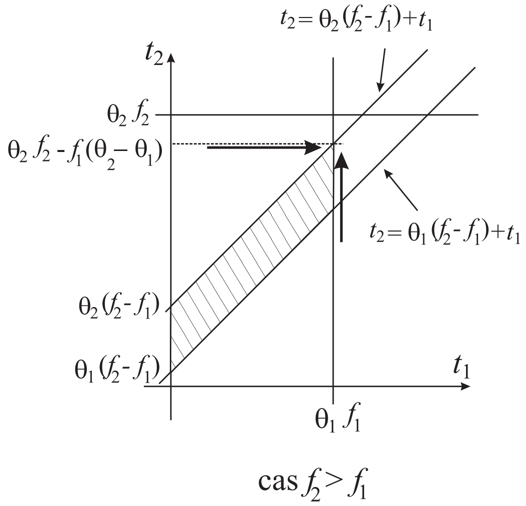


FIG. 2.13 – Les contraintes

   est croissante en t_1 et t_2, il est immédiat que les deux contraintes "actives" doivent être saturées. Le cas $f_2 < f_1$ est identique (il s'agit juste de translater vers le bas les deux droites obliques).

4. Le programme de maximisation s'écrit alors :

$$\max_{q_1, q_2} \left[n_1 \left(\theta_1 f_1 - c q_1 \right) + n_2 \left(\theta_2 f_2 - f_1 \left(\theta_2 - \theta_1 \right) - c q_2 \right) \right].$$

   Programme qui se décompose en deux parties. D'une part,

$$\max_{q_1} \left[n_1 \left(\theta_1 f_1 - c q_1 \right) - n_2 \left(f_1 \left(\theta_2 - \theta_1 \right) \right) \right],$$

   et d'autre part

$$\max_{q_2} \left[n_2 \left(\theta_2 f_2 - c q_2 \right) \right].$$

   Ces programmes se résolvent en utilisant leur condition du premier ordre. Ce que montre le dernier programme est que la quantité proposée aux consommateurs du type 2 est identique à celle qui est socialement optimale. En revanche les consommateurs du groupe 1 n'obtiennent pas la quantité optimale. Le graphique 2.14 permet de comprendre pourquoi et donne une intuition de comment le monopole maximise son profit.

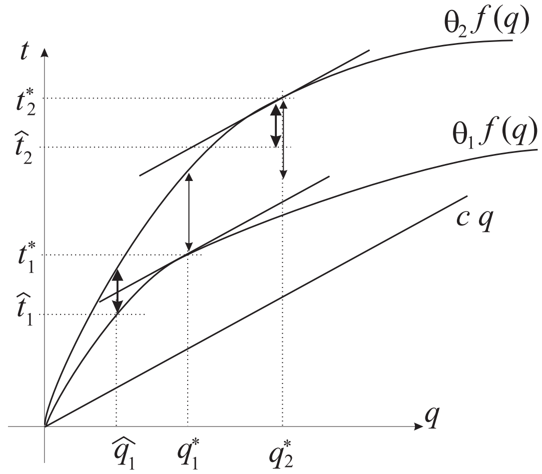


FIG. 2.14 – Discrimination du second degré

Tout d'abord, les quantités optimales en information parfaite q_1^* et q_2^* s'obtiennent lorsque la pente de la tangente à la courbe $\theta_i f(q_i)$ est égale à c. Soient $t_i^* = \theta_i f(q_i^*)$. Le monopole souhaiterait vendre les paniers : (q_i^*, t_i^*). Malheureusement pour lui cela n'est pas possible car les consommateurs du groupe 2 préféreraient alors le panier (q_1^*, t_1^*) qui leur assure une utilité strictement positive à (q_2^*, t_2^*) qui ne donne qu'une utilité nulle. Le monopole doit donc diminuer t_2. Toutefois, la diminution de t_2 nécessaire pour que les consommateurs θ_2 optent pour (q_2^*, t_2) est d'autant plus importante que la quantité q_1 proposée à l'autre groupe est élevée. Donc, afin de "perdre" le moins d'argent possible sur le groupe 2 le monopole diminue q_1 de telle sorte à rendre moins attractif le panier (q_1, t_1) aux yeux des consommateurs du type 2. Cette diminution pourrait aller jusqu'à choisir $\widehat{q_1} = 0$ qui permet d'imposer $t_2 = t_2^*$, toutefois ce choix extrême prive le monopole de tout profit sur le groupe 1. C'est pourquoi, le monopole "arrête" en général la diminution de q_1 à $\widehat{q_1} > 0$ qui arbitre optimalement entre les profits des deux groupes et dont la valeur exacte dépend des paramètres du modèle.

2.12 Contrats comme barrière à l'entrée**

Objectif de l'exercice : Montrer comment un monopole en place peut élever une barrière à l'entrée à l'aide d'un contrat passé librement avec un client[7].

Soit M, un monopole en place qui vend un bien à un acheteur A. L'acheteur demande une unité et il est prêt à payer au maximum $p = 1$ pour l'obtenir. Le monopole produit cette unité à un coût $c_M = 1/2$. Un entrant, E, peut produire dans le futur le même bien à un coût unitaire c_E inconnu pour l'instant. Il est connaissance commune que c_E est uniformément distribué entre 0 et 1. S'il n'entre pas E réalise un profit normalisé à 0. Le jeu est le suivant (mais les questions le rendront plus précis) : en $t = 0$, A et M s'entendent sur un contrat (éventuellement aucun contrat), en $t = 1$, la teneur du contrat est révélée, E apprend la valeur de son coût unitaire c_E et décide d'entrer ou pas et propose un prix p_E, en $t = 3$ A décide où acheter. Tous les agents sont supposés neutres vis-à-vis du risque.

1. *Si l'entrée a lieu, et en l'absence de contrat, la concurrence est à la Bertrand (cf.les exercices du chapitre 4). Établir le prix en cas d'entrée et en déduire la probabilité ϕ avec laquelle l'entrée peut survenir en l'absence de toute barrière.*
2. *Toujours en l'absence de contrat (entre A et M) quel est l'espérance de profit de l'acheteur ? Celle de la firme M ? Et celle de la firme E ?*
3. *Aghion et Bolton montrent qu'il est possible de se restreindre à des contrats $\mathcal{C}$ de la forme : $\mathcal{C} = (P, P_0)$ où P est le prix auquel M vend à A (si A désire acheter à M) tandis que P_0 est la pénalité que A verse à M s'il achète à E. Les agents A et M peuvent-ils s'entendre sur un tel contrat ? Et surtout un tel contrat peut-il empêcher l'entrée ?*
   (a) *Quelle est l'utilité de A s'il accepte un contrat $\mathcal{C} = (P, P_0)$?*
   (b) *Si un contrat $\mathcal{C} = (P, P_0)$ a été signé, dans quels cas E entre-t-il ?*
   (c) *Déterminer parmi les contrats $\mathcal{C} = (P, P_0)$ celui qui permet à M de maximiser son profit.*
   (d) *Calculer les espérances de profits sous ce contrat. Comparer le profit de M avec celui obtenu lorsque le contrat empêche tout entrée. Quelle est la situation la plus efficace du point de vue du surplus total ?*

Correction

1. La concurrence à la Bertrand entre deux producteurs dont les coûts marginaux de production sont constants mais différents conduit au prix $p = \max\{c_M, c_E\}$ (l'entreprise qui a le coût marginal le plus bas emporte la vente et propose un prix égal (légèrement inférieur) au coût marginal de son concurrent). L'entrant n'entre que s'il peut réaliser un profit supérieur à 0

[7]Cet exercice s'appuie sur l'article de Philippe Aghion et Patrick Bolton "Contracts as a Barrier to Entry", 1987, *American Economic Review*, vol. 77, 3, pp. 388-401.

donc il le fait si et seulement si $c_E \leq 1/2$ ce qui arrive avec une probabilité $\phi = 1/2$.

2. Avec la probabilité $1-\phi$ l'entrée n'a pas lieu et M vend au prix de monopole $p = 1$ et A n'a aucun surplus. Avec la probabilité ϕ l'entrée a lieu et le prix s'établit à $c_M = 1/2 \geq c_E$. D'où l'espérance d'utilité pour A :

$$(1-\phi)\,0 + \phi\,(p - c_M) = 1/4.$$

Pour la firme M son espérance de profit s'écrit :

$$(1-\phi)\,(1-c_M) + \phi 0 = 1/4.$$

Enfin, pour la firme E on a :

$$\int_0^{c_M} (c_M - c_E)\, dc_E = \frac{1}{8}.$$

3. (a) Si l'entrée n'a pas lieu, A obtient un surplus $1-P$. Si l'entrée a lieu et s'il continue à acheter à M il a toujours un surplus $1-P$, enfin s'il achète à E il a un surplus $1-P_E-P_0$ qui doit être supérieur ou égal à $1-P$. Toutefois, l'entrant va fixer le prix le plus élevé possible (sous la contrainte de rester compétitif) et donc à l'équilibre on a forcément $1-P_E-P_0 = 1-P$. Donc dans tous les cas, A obtient un surplus égal à $1-P$.

   (b) La firme E entre que si elle peut proposer un surplus d'au moins $1-P$ à A tout en faisant un profit positif. Soit P_E le prix de E, il doit vérifier : $P_E \geq c_E$ et $P_E + P_0 \leq P$ d'où l'entrée n'est possible que si

$$c_E \leq P - P_0.$$

   De manière triviale, il en résulte que si P_0 dépasse P l'entrée n'a jamais lieu.

   (c) Sans perte de généralité, on peut se limiter aux contrats $\mathcal{C} = (P, P_0)$ avec $P \geq P_0$. Pour que A accepte le contrat il faut qu'il lui procure une utilité au moins égale à celle qu'il obtient en l'absence de contrat donc on doit avoir :

$$1 - P \geq 1/4.$$

   Sous cette contrainte le contrat est accepté par A et le profit de M s'écrit :

$$\pi_M = (P - P_0)\, P_0 + (1 - P + P_0)\,(P - c_M)$$

   que M cherche à maximiser en P et P_0. En effet, avec la probabilité $P - P_0$, E entre, A achète à E et paye P_0 à M (qui ne produit rien), tandis qu'avec la probabilité complémentaire $1 - P + P_0$, E n'entre pas et A achète à M (qui produit) au prix P. Cette expression se réécrit en :

$$\pi_M = (2P - c_M - P_0)\, P_0 + (1 - P)\,(P - c_M)$$

qui conduit à $P_0 = P - \frac{c_M}{2} = P - 1/4$ (qui est bien inférieur à P), en injectant cette valeur dans π_M il vient :

$$\pi_M = \frac{1}{4}P - \frac{1}{16} + \frac{3}{4}(P - c_M)$$

expression qui est strictement croissante en P qui combinée avec la contrainte $1 - P \geq 1/4$ conduit à $P = 3/4$ et donc :

$$\mathcal{C}^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

L'entrée n'a donc lieu que si c_E est compris entre 0 et 1/4, c'est-à-dire moins souvent qu'en l'absence de contrat. Toutefois, l'entrée n'est pas toujours dissuadée : si la firme E est suffisamment plus efficace que la firme en place, elle peut entrer sur le marché.

(d) L'espérance de gain de A est égale à 1/4 comme en l'absence de contrat. Le profit espéré de M s'établit à

$$\frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16} > \frac{1}{4},$$

la firme M réalise un profit supérieur avec que sans le contrat. Si M avait voulu bloquer toute entrée, il aurait dû proposer le contrat $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ et il aurait eu le même profit $\left(\frac{1}{4}\right)$ qu'en l'absence de contrat. La firme E obtient quant à elle en espérance :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} - c_E\right) dc_E = \frac{1}{32}$$

en présence du contrat la somme des profits s'établit à

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{16} + \frac{1}{32} = \frac{19}{32}$$

c'est-à-dire strictement moins qu'en l'absence de contrat :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{20}{32},$$

le contrat est donc inefficace du point de vue social puisqu'il empêche l'entrée d'une firme plus efficace que M lorsque c_E est compris entre 1/4 et 1/2.

Lectures complémentaires

Pratiquement toutes les actions que peut prendre une entreprise peuvent être analysées dans le cadre du monopole. Il serait impossible de passer ici en revue toute les problématiques liées à la présence d'une unique firme. Pour un cours complet, se référer aux trois premiers chapitres de Tirole *The Theory of Industrial Organization* (MIT Press, 1988) (traduction française : *Théorie de l'organisation industrielle*, 2 tomes, Economica, 1995). En particulier dans le chapitre 2 du Tirole, sont détaillés les choix de variétés et de qualité par un monopole. Les questions de discrimination sont présentées en détail dans le chapitre 3 du Tirole.

Sur les notions de surplus des consommateurs et de bien-être social voir l'introduction du livre de Tirole ainsi que le chapitre 3 section 3.1 du livre *Microeconomic Theory* de Mas-Colell, Whinston et Green, Oxford University Press, 1995.

Chapitre 3

Concurrence à la Cournot

Antoine-Augustin Cournot (1801-1877) est un professeur de mathématiques français, il est l'auteur d'un des premiers ouvrages d'économie mathématique : *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838) où il résout le modèle du monopole et de l'oligopole lorsque la concurrence est en quantité[1]. La solution proposée par Cournot correspond à l'équilibre de Nash, cela plus de cent ans avant que le concept ne soit défini. Aujourd'hui, le modèle de concurrence à la Cournot est très fréquemment utilisé et il est nécessaire de bien le maîtriser.

Rappels de cours

Soit un marché où la fonction de demande est $D(p)$ et la fonction inverse de demande $P(Q)$. Dans le cadre du monopole (voir chapitre 2) nous avons vu que la maximisation du profit pouvait se faire de manière équivalente soit en prix soit en quantité. Lorsque n, $n \geq 2$, entreprises sont actives cette équivalence disparaît. Si le prix est la variable centrale, la démarche la plus naturelle consiste à considérer que la demande $D_i(p_i, p_{-i})$ (où $p_{-i} = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n)$) de chaque entreprise dépend de son prix ainsi que de ceux de ses concurrents. L'autre approche suppose que la quantité est la variable clef. Il est alors naturel de faire dépendre le prix $P_i(q_i, q_{-i})$ (où $q_{-i} = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n)$) auquel une entreprise peut écouler sa production de toute les quantités produites. Le modèle de concurrence à la Cournot appartient à cette seconde approche et s'appuie, de plus, sur l'hypothèse simplificatrice suivante : pour tout i, $i = 1$ à n,

$$P_i(q_i, q_{-i}) = P(Q)$$

[1] Bien que l'idée originelle de la concurrence à la Cournot ne soit pas tout à fait celle d'une concurrence en quantité, le modèle est souvent associé à cette expression. L'idée de Cournot est celle d'une monopolisation de la demande résiduelle : les quantités des autres firmes étant données, une entreprise agit en monopole sur la demande qui reste. Le choix d'un prix ou d'une quantité est équivalent pour un monopole. Pour plus de détails sur le débat Cournot-Bertrand regarder : "The Cournot-Bertrand Debate : A Historical Perspective" de Jean-Magnan de Bornier, *History of Political Economy* ; 24(3), Fall 1992, pages 623-56, ainsi que la discussion entre Clarence Morrison et de Bornier dans : *History of Political Economy* ; 33(1), Spring 2001, pages 161-74. De manière plus large sur Cournot consulter le numéro de la : *European Economic Review* ; 33(2/3), March 1989.

où

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

est la somme de toutes les quantités produites. *Il en résulte que, par hypothèse, dans un modèle de concurrence à la Cournot toutes les entreprises vendent au même prix.* En revanche, elles choisissent librement les quantités qu'elles produisent.

En notant $C_i(q_i)$ la fonction de coût de l'entreprise i, son profit s'écrit :

$$\Pi_i(q_i, q_{-i}) = P(Q)\, q_i - C_i(q_i).$$

Chaque entreprise cherche à maximiser son profit en considérant comme fixes les quantités choisies par ses concurrents. *Nous avons donc un jeu sous forme normale*, avec n joueurs. L'ensemble des stratégies du joueur i est $[0, \overline{q_i}]$, où $\overline{q_i}$ est une quantité arbitraire qui représente, par exemple, la quantité maximale que peut produire cette firme.

Un équilibre de Cournot-Nash est un équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Cournot.

La démarche habituelle pour déterminer les équilibres de Nash d'un jeu de concurrence à la Cournot repose sur le calcul des fonctions de meilleures réponses. Pour tout i et pour toute combinaison de quantités produites par les autres joueurs q_{-i} nous recherchons la quantité $q_i^*(q_{-i})$ qui maximise le profit de i à q_{-i} fixé. Formellement :

$$q_i^*(q_{-i}) \in \arg\max_{q_i} \Pi_i(q_i, q_{-i}).$$

Si la fonction de profit est concave en q_i, alors il est possible de chercher cette meilleure réponse à l'aide de la condition du premier ordre qui conduit à

$$P(Q) + q_i P'(Q) = C_i'(q_i).$$

La résolution de cette équation donne l'expression de $q_i^*(q_{-i})$. Notons que cette équation est très proche de la condition : «revenu marginal égal coût marginal» du monopole. La différence tient au fait que le prix ne dépend pas ici uniquement de q_i mais de la somme Q des quantités produites par toutes les entreprises. Il est intéressant de noter que la condition du premier ordre peut s'écrire :

$$\frac{P(Q) - C_i'(q_i)}{P(Q)} = \left(\frac{q_i}{Q}\right)\left(\frac{-P'(Q)\,Q}{P(Q)}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{P(Q) - C_i'(q_i)}{P(Q)} = \alpha_i \frac{1}{\varepsilon},$$

où α_i est la part de marché de l'entreprise i et ε est l'élasticité de la demande. L'indice de Lerner de l'entreprise i ($\frac{P-C_i'}{P}$) est donc croissant avec sa part de marché et inversement proportionnel à l'élasticité de la demande.

L'équilibre de Nash (ou les équilibres) se trouve(nt) à l'intersection des fonctions de meilleures réponses. Cela signifie qu'il faut résoudre un système de n équations à n inconnues afin de déterminer cette(ces) intersection(s).

$$\left\{\begin{array}{c} P(Q)+q_1P'(Q)=C_1'(q_1) \\ P(Q)+q_2P'(Q)=C_2'(q_2) \\ \vdots \\ P(Q)+q_nP'(Q)=C_n'(q_n) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} q_1=q_1^*(q_{-1}) \\ q_2=q_2^*(q_{-2}) \\ \vdots \\ q_n=q_n^*(q_{-n}) \end{array}\right.$$

Un vecteur $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ solution de ce système est un équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Cournot. Une solution à ce type de système n'existe pas pour n'importe quelle fonction de demande et pour n'importe quelles fonctions de coût de production[2]. Les exercices de ce chapitre se placeront dans le cas où l'équilibre existe et est unique. C'est le cas par exemple en supposant que la fonction de demande est linéaire et que les fonctions de coût sont, elles aussi, linéaires.

Les exercices de ce chapitre explorent en détail le modèle de concurrence à la Cournot. En particulier, les exercices 3.1 à 3.6 s'intéressent au modèle de Cournot avec, en général, une fonction de demande linéaire et des coûts marginaux constants. L'exercice 3.4 montre comment certains résultats s'étendent au cas d'une fonction de demande plus générale. L'exercice 3.7 montre comment l'inefficacité de l'oligopole à la Cournot pourrait être éliminée si les firmes avaient un autre objectif que la maximisation de leurs profits. Les exercices 3.9 à 3.17 mettent l'accent sur l'effet d'engagement dans un jeu à plusieurs périodes dans le cadre de la concurrence à la Cournot.

[2]Pour plus de détails sur l'existence de l'équilibre, voir Carl Shapiro, Theories of Oligopoly Behavior, in *Handbook of Industrial Organization*, vol. I, chapter 6, North Holland, Amsterdam, 1989 ainsi que l'article de Gérard Gaudet et Stephen Salant, Uniqueness of Cournot Equilibrium : New Results from Old Methods, *Review of Economic Studies*, Vol. 58, Iss. 2, April 1991, pp. 399-404.

3.1 Duopole dans un cadre linéaire*

Objectif de l'exercice : Étudier complètement le modèle de Cournot avec deux entreprises lorsque les coûts marginaux sont constants (mais potentiellement différent) et la fonction de demande affine. L'étude du bien-être social à l'équilibre fait souligne une propriété intéressante du duopole asymétrique : un monopole peut être préférable à un duopole.

Deux entreprises se font concurrence sur le marché d'un bien homogène. Le coût marginal constant de production de l'entreprise i, $i = 1, 2$, est noté c_i. La quantité produite par l'entreprise i est notée q_i. Soit Q la quantité totale produite, $Q = q_1 + q_2$. La fonction inverse de demande est notée $P(Q)$, elle est supposée linéaire : $P(Q) = \max\{0\,;\, a - bQ\}$, $a > 0$, $b > 0$.

1. *Écrire le profit de l'entreprise i en fonction de sa quantité q_i, de la quantité de son concurrent q_j et de son coût marginal c_i. En déduire la fonction de meilleure réponse $q_i^*(q_j)$.*
2. *En supposant que les deux entreprises produisent à l'équilibre, représenter sur un graphique les fonctions de meilleures réponses et déterminer les quantités q_1^* et q_2^* qui forment un équilibre de Nash.*
3. *Pour quelles valeurs de c_1 et de c_2 les deux entreprises produisent-elles à l'équilibre ? Représenter dans le plan c_1, c_2 les différents équilibres de Nash.*
4. *Pour chaque type d'équilibres calculer les profits des entreprises, le surplus des consommateurs ainsi que le niveau de la fonction de bien-être social.*
5. *Pour c_1 fixé tracer la fonction de bien-être social lorsque c_2 varie de 0 à l'infini.*

Correction

1. Le profit de l'entreprise i, $i \in \{1, 2\}$, s'écrit :

$$\Pi_i(q_i, q_j) = P(Q)\, q_i - c_i q_i = (a - bq_i - bq_j - c_i)\, q_i,$$

avec $j \neq i$, $j \in \{1, 2\}$. Il s'agit de l'équation, factorisée, d'une parabole concave. Pour trouver le maximum de cette fonction de profit, nous pouvons donc utiliser la méthode du milieu des deux racines. La première parenthèse s'annule si $a - bq_i - bq_j - c_i = 0$ soit si $q_i = \dfrac{a - c_i - bq_j}{b}$. La deuxième racine est $q_i = 0$ ce qui simplifie d'autant le calcul du milieu. Il en découle l'expression de la fonction de meilleures réponses :

$$q_i^*(q_j) = \frac{a - c_i - bq_j}{2b}.$$

2. La recherche de l'équilibre de Cournot-Nash passe par le calcul de l'intersection des fonctions de meilleures réponses, soit la résolution du système de

deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} q_i = \frac{1}{2b}\left(a - c_i - bq_j\right) \\ q_j = \frac{1}{2b}\left(a - c_j - bq_i\right) \end{cases}$$

Comme il s'agit d'un jeu à deux joueurs, nous pouvons représenter les fonctions de réaction dans le plan. La figure 3.1 les présente dans le plan (q_i, q_j).

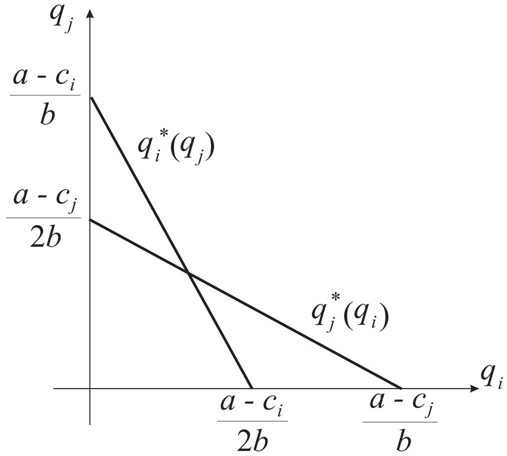


Fig. 3.1 – Fonctions de réactions

Il en découle que

$$q_i^* = \frac{1}{3b}\left(a - 2c_i + c_j\right).$$

Nous avons ainsi déterminé l'équilibre de Nash de ce duopole à la Cournot. Les quantités produites[3] à l'équilibre sont les suivantes :

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{1}{3b}\left(a - 2c_1 + c_2\right) \\ q_2^* = \frac{1}{3b}\left(a + c_1 - 2c_2\right) \end{cases}$$

Ces formules montrent que si $c_1 < c_2$, alors $q_1^* > q_2^*$. L'entreprise la plus efficace produit le plus à l'équilibre.

3. Les quantités déterminées à la question précédente doivent être positives. Si les formules de q_1^* ou q_2^* conduisent à des grandeurs négatives, cela signifie qu'une des deux entreprises ne produit pas et que son concurrent est donc en monopole (grâce à un avantage significatif en termes de coût marginal). En particulier, $q_1^* \geq 0$ si et seulement si $c_2 \geq 2c_1 - a$ et $q_2^* \geq 0$ si et seulement si $c_2 \leq \frac{1}{2}\left(a + c_1\right)$. La figure 3.2 présente dans le plan (c_1, c_2) ces conditions d'existence.

4. Nous pouvons maintenant calculer la quantité totale produite sur ce marché ainsi que son prix de vente lorsque les deux entreprises sont actives :

$$\begin{cases} Q^* = \frac{1}{3b}\left(2a - c_1 - c_2\right) = \frac{2}{3b}\left(a - \frac{c_1+c_2}{2}\right) \\ p^* = a - bQ^* = \frac{1}{3}\left(a + c_1 + c_2\right) \end{cases}$$

[3] Il n'est maintenant plus nécessaire de garder la notation en i, j et il est possible de revenir à 1 et 2.

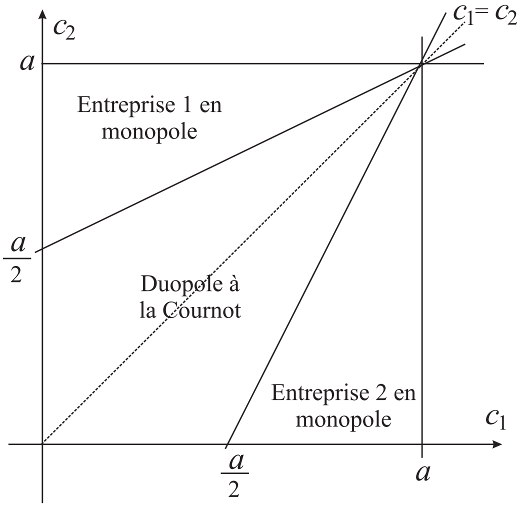


FIG. 3.2 – Équilibres dans le plan c_1, c_2

Il en découle finalement les valeurs des profits à l'équilibre :

$$\Pi_1^* = \frac{1}{9b}(a - 2c_1 + c_2)^2 \text{ et } \Pi_2^* = \frac{1}{9b}(a + c_1 - 2c_2)^2$$

Comme la fonction de demande est linéaire, le surplus des consommateurs est égal à

$$S^* = \frac{b}{2}(Q^*)^2 = \frac{2}{9b}\left(a - \frac{c_1 + c_2}{2}\right)^2.$$

Enfin, le bien-être social s'établit à :

$$W^*(c_1, c_2) = \Pi_1^* + \Pi_2^* + S^* = \frac{1}{9b}\left[4a^2 + \frac{11}{2}c_1^2 + \frac{11}{2}c_2^2 - 4ac_1 - 4ac_2 - 7c_1c_2\right]$$

En revanche, lorsque l'entreprise i est en monopole, elle choisit la quantité $\frac{a-c_i}{2b}$, elle réalise un profit égal à $\frac{(a-c_i)^2}{4b}$ et le surplus des consommateurs s'élève à $\frac{(a-c_i)^2}{8b}$. Le bien-être en monopole est donc $\frac{3(a-c_i)^2}{8b}$.

5. Lorsque les deux entreprises produisent à l'équilibre, le bien-être social peut se réécrire :

$$W^*(c_1, c_2) = \frac{1}{9b}\left[4a^2 + \frac{11}{2}c_1^2 - 4ac_1 + \frac{11}{2}c_2\left(c_2 - \frac{2(4a + 7c_1)}{11}\right)\right]$$

il s'agit donc d'une parabole convexe en c_2 qui atteint son minimum pour $c_2 = \frac{4a+7c_1}{11}$ qui est strictement inférieur à $\frac{a+c_1}{2}$. La figure 3.3 présente l'évolution du bien-être social lorsque c_2 augmente à c_1 fixé. Deux cas sont distingués selon que $c_1 < \frac{1}{2}a$ ou pas (c'est-à-dire selon que la firme 1 produit ou pas lorsque $c_2 = 0$).

Dans un premier temps, lorsque c_2 croît le bien-être social diminue puisque l'une des firmes est moins efficace et que le prix augmente. Dans un second temps pourtant le bien-être social s'élève avec c_2. Cet effet s'explique de la manière suivante. Lorsque c_2 est plus grand que c_1, il est plus efficace que

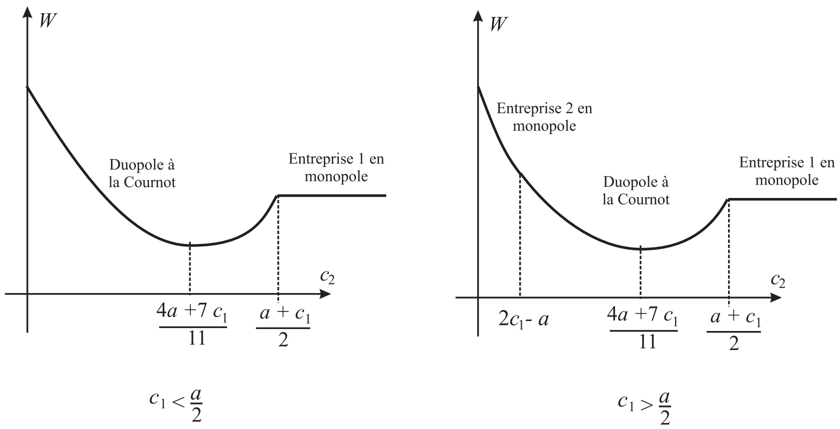


FIG. 3.3 – Variation du bien-être social avec c_2

l'entreprise 1 produise plus. Or, une augmentation de c_2 a deux effets : la quantité totale produite baisse (ce qui fait décroître le bien-être social) mais l'entreprise la plus efficace produit davantage (ce qui fait croître le bien-être social). Ces deux effets existent dès que $c_2 > c_1$. Le second l'emporte sur le premier lorsque c_2 dépasse $\frac{4a+7c_1}{11}$. En particulier, dans ce dernier cas, le bien-être social est plus important si l'entreprise la plus efficace est en monopole plutôt qu'en duopole. La prise en compte de coûts fixes de production renforcerait ce résultat. Toutefois, le passage du duopole au monopole se ferait au détriment des consommateurs car le prix augmenterait ce qui montre bien qu'il est restrictif de ne considérer que le surplus des consommateurs pour évaluer un changement de la structure concurrentielle d'un marché.

3.2 Duopole avec des coûts quadratiques*

Objectif de l'exercice : Caractériser l'équilibre de Nash d'un jeu de concurrence à la Cournot lorsque la fonction de demande est affine et les fonctions de coût quadratiques.

Supposons que la demande soit $D(p) = \max\{0\,;1-p\}$ *et que les coûts de production soient* $\alpha\frac{q_1^2}{2}$ *pour la firme 1 et* $\beta\frac{q_2^2}{2}$ *pour la firme 2, avec* $\alpha \geq 0$ *et* $\beta \geq 0$.

1. *Écrire la fonction inverse de demande, les fonctions de profit de chaque entreprise et en déduire les fonctions de meilleures réponses.*
2. *Tracer les fonctions de meilleures réponses dans le plan* q_1, q_2.
3. *Déterminer l'équilibre de Nash de ce jeu de concurrence à la Cournot.*

Correction

1. La fonction inverse de demande est $P(q_1+q_2) = 1-q_1-q_2$. Le profit d'une entreprise (l'entreprise 1 par exemple) s'écrit après une factorisation :
$$\pi_1(q_1,q_2) = \left(1-q_1-q_2-\frac{\alpha}{2}q_1\right)q_1,$$
la fonction de meilleure réponse s'en déduit immédiatement (milieu des deux racines) :
$$q_1^*(q_2) = \frac{1-q_2}{2+\alpha}$$
par symétrie :
$$q_2^*(q_1) = \frac{1-q_1}{2+\beta}.$$
2. La figure 3.4 présente dans le plan (q_1,q_2) les fonctions de meilleures réponses.

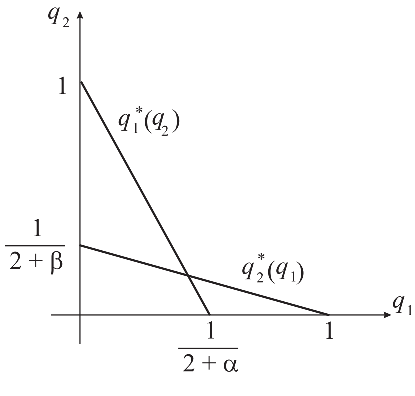


Fig. 3.4 – Fonctions de réactions

3. La résolution du système de deux équations à deux inconnues :
$$\begin{cases} q_1 = q_1^*(q_2) \\ q_2 = q_2^*(q_1) \end{cases}$$

conduit à

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{1+\beta}{3+2\alpha+2\beta+\alpha\beta} \\ q_2^* = \frac{1+\alpha}{3+2\alpha+2\beta+\alpha\beta} \end{cases}$$

Notons que les deux firmes sont actives quelles que soient les valeurs de $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, ce qui est intuitif car leur coût marginal en zéro est nul et qu'il n'y a pas de coût fixe de production. Si α et β tendent tous les deux vers 0, le résultat du duopole de Cournot avec des coût marginaux constants nuls réapparaît ($q_1^* = q_2^* = 1/3$). En revanche, si à α fixe, β tend vers $+\infty$, alors q_1 tend vers la quantité de monopole $\frac{1}{2+\alpha}$ et q_2 tend vers 0.

3.3 Oligopole avec n firmes asymétriques**

Objectif de l'exercice : Étudier l'équilibre de Nash d'un jeu de concurrence à la Cournot entre un nombre quelconque de firmes dont les coûts marginaux de production sont constant mais différents. Il s'agit d'une généralisation de l'exercice 3.1.

Soit un marché où n entreprises sont en concurrence à la Cournot. Chaque firme décide de la quantité q_i qu'elle produit, soit $Q = \sum_i q_i$ la quantité totale produite, le prix est déterminé par la fonction inverse de demande qui s'écrit $P(Q) = \max\{0\,;\, a - bQ\}$. Chaque entreprise produit avec des rendements d'échelle constants. Soit c_i le coût marginal constant de l'entreprise i. Le vecteur des coûts marginaux de production est noté c, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. La moyenne des coûts marginaux est notée $\overline{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i$. La variance empirique des coûts marginaux s'écrit : $Var(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(c_i - \overline{c})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i (c_i - \overline{c})$.

1. *En supposant que toutes les firmes produisent à l'équilibre, déterminer la quantité Q^* puis les quantités q_i^* d'équilibre ainsi que les profits réalisés par chaque entreprise.*
2. *Montrer que le bien-être social s'écrit à l'équilibre sous la forme :*

$$W^* = \frac{n(n+2)}{2b}\left(\frac{a - \overline{c}}{n+1}\right)^2 + \frac{n}{b} Var(c)\,. \tag{3.1}$$

Correction

1. Notons Q_{-i} la somme des quantités produites par les entreprises autres que i, $Q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j$ et c_{-i} le vecteur, de dimension $n-1$, qui contient tous les coûts marginaux sauf c_i : $c_{-i} = (c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n)$. Le profit de l'entreprise i s'écrit :

$$\Pi_i = (P(Q) - c_i)\, q_i = (a - bQ - c_i)\, q_i = (a - c_i - bQ_{-i} - bq_i)\, q_i.$$

Comme il s'agit d'une parabole concave en q_i, nous obtenons directement la fonction de meilleure réponse de l'entreprise i à l'aide de la demi somme des deux racines :

$$q_i^*(q_{-i}) = \frac{1}{2b}(a - c_i - bQ_{-i})\,.$$

Pour déterminer l'équilibre de Nash de ce jeu de concurrence à la Cournot il nous faut résoudre le système de n équations à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2b}\left(a - c_1 - bQ_{-1}\right) \\ q_2 = \frac{1}{2b}\left(a - c_2 - bQ_{-2}\right) \\ \vdots \\ q_i = \frac{1}{2b}\left(a - c_i - bQ_{-i}\right) \\ \vdots \\ q_n = \frac{1}{2b}\left(a - c_n - bQ_{-n}\right) \end{cases}$$

Un tel système n'est *a priori* pas évident à résoudre pourtant il est ici extrêmement facile d'en trouver la solution grâce à l'astuce suivante. Le système peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} bq_1 = a - c_1 - bQ \\ bq_2 = a - c_2 - bQ \\ \vdots \\ bq_i = a - c_i - bQ \\ \vdots \\ bq_n = a - c_n - bQ \end{cases}$$

Sous cette forme il est clair que si nous trouvons la valeur de Q, nous pouvons en déduire celles de tous les q_i. Or, la somme des n équations conduit à :

$$bQ = na - \sum_i c_i - nbQ,$$

d'où

$$Q^* = \frac{na - \sum_i c_i}{b\,(n+1)} = \frac{n}{b\,(n+1)}\,(a - \overline{c})\,. \tag{3.2}$$

À l'aide de la formule 3.2 nous pouvons déterminer le prix et les quantités d'équilibre :

$$p^* = \frac{1}{n+1}\left(a + \sum_{i=1}^{n} c_i\right) = \frac{1}{n+1}\left(a + n\overline{c}\right),$$

et pour tout i :

$$q_i^* = \frac{1}{b\,(n+1)}\left(a + \sum_{j \neq i} c_j - nc_i\right).$$

Notons que bien entendu p^* est positif. Les calculs que nous avons menés jusqu'ici supposent que les entreprises réalisent toutes un profit positif, c'est-à-dire que leur marge est positive. Cela n'est vérifié à l'équilibre que si q_i^* est positif. C'est-à-dire qu'une entreprise est active si son coût marginal est inférieur à une moyenne entre le prix maximum a et les coûts marginaux des autres firmes actives :

$$c_i \leq \frac{1}{n}\left(a + \sum_{j \neq i} c_j\right).$$

Enfin, le profit d'une entreprise à l'équilibre de Cournot-Nash s'écrit :

$$\Pi_i^* = b\left(q_i^*\right)^2 = \frac{1}{b}\left(\frac{a + \sum\limits_{j \neq i} c_j - nc_i}{n+1}\right)^2$$

Bien entendu, le profit de l'entreprise i décroît si son coût marginal augmente, $\frac{\partial \Pi_i^*}{\partial c_i} < 0$. En revanche, si le coût marginal d'un de ses concurrents augmente le profit de l'entreprise i croît $\frac{\partial \Pi_i^*}{\partial c_j} > 0$.

2. Le surplus des consommateurs est facile à calculer puisque la fonction de demande est linéaire. De manière similaire à ce qui a été fait pour le monopole, il vient, en notant S^* le surplus des consommateurs à l'équilibre de Cournot-Nash que
$$S^* = \frac{b}{2}\left(Q^*\right)^2.$$
De son côté la somme des profits des entreprises s'écrit :
$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i^* = p^* Q^* - \sum_{i=1}^{n}\left(c_i q_i^*\right).$$
En utilisant le fait que $p^* = a - bQ^*$ et que $q_i^* = \frac{a-\overline{c}}{b(n+1)} + \frac{1}{b}\left(\overline{c} - c_i\right)$, il vient que
$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i^* = aQ^* - b\left(Q^*\right)^2 - \frac{a-\overline{c}}{b\left(n+1\right)}\sum_{i=1}^{n} c_i + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} c_i\left(c_i - \overline{c}\right),$$
soit encore
$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i^* = \frac{n}{b}\left(\frac{a-\overline{c}}{n+1}\right)^2 + \frac{n}{b}\mathrm{Var}\left(c\right)$$
Le bien-être social à l'équilibre de Cournot-Nash, $W^* = S^* + \sum_{i=1}^{n} \Pi_i^*$ s'écrit donc bien
$$W^* = \frac{n\left(n+2\right)}{2b}\left(\frac{a-\overline{c}}{n+1}\right)^2 + \frac{n}{b}\mathrm{Var}\left(c\right).$$
c'est-à-dire comme la somme d'un terme décroissant avec le coût marginal moyen et d'un terme croissant avec la variance des coûts marginaux. Il en résulte, en particulier, que, toutes choses égales par ailleurs, si la variance des coûts marginaux augmente, alors le bien-être augmente. Par exemple, toujours en supposant $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$, si c_1 diminue à $c_1 - \varepsilon$ et que c_n augmente à $c_n + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ et suffisamment faible de telle sorte que la n-ème firme reste active, alors le coût marginal moyen $\overline{c}$ est inchangé tandis que la variance des coûts marginaux augmente et donc le bien-être augmente. Ce résultat n'est pas forcément surprenant mais le gain de bien-être arrive par une voie inhabituelle : en général une amélioration du bien-être passe par une baisse du prix et une augmentation de la quantité. Ici le surplus des consommateurs reste inchangé et la quantité totale reste constante, pourtant cette quantité est produite de manière plus efficace au sens où l'entreprise avec le coût marginal le plus faible en fabrique davantage.

3.4 Demande non linéaire**

Objectif de l'exercice : Étudier l'équilibre de Nash d'un jeu de concurrence à la Cournot sans faire l'hypothèse que la fonction de demande est linéaire.

Soit une fonction inverse de demande notée $P(Q)$ avec Q la somme des quantités produites par n entreprises. Supposons que chaque entreprise produit avec un coût marginal constant. Notons c_1, $c_2, \ldots, c_n$ ces coûts marginaux. On supposera vérifiées les conditions de concavité des fonctions de profit.

1. *Caractériser Q^* la quantité totale produite à l'équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Cournot.*
2. *En déduire q_i^* la quantité produite à l'équilibre par la firme i ainsi que s_i^* sa part de marché.*
3. *Déterminer l'équilibre lorsque $P(Q) = (1-Q)^\alpha$ avec $\alpha > 0$, $0 \leq Q \leq 1$, et $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.*

Correction

1. La fonction de profit de l'entreprise i s'écrit $\Pi_i = (P(Q) - c_i)\, q_i$. La meilleure réponse de la firme i est donnée (sous des hypothèses de concavité que nous supposons vérifiées ici) par la condition du premier ordre :

$$P'(Q)\, q_i + P(Q) = c_i.$$

   L'astuce habituelle consiste à sommer sur i ces conditions du premier ordre. En notant $\overline{c} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i$ le coût marginal moyen, cela conduit à :

$$P'(Q)\, Q + nP(Q) = n\overline{c},$$

   équation qui caractérise la quantité Q^* produite à l'équilibre de Nash de ce jeu de concurrence à la Cournot.

2. La quantité produite par la firme i est donc

$$q_i^* = \frac{\overline{c} - c_i}{-P'(Q^*)} + \frac{Q^*}{n},$$

   d'où il est facile de déduire sa part de marché $\frac{q_i^*}{Q^*}$:

$$s_i^* = \frac{1}{n} + \frac{\overline{c} - c_i}{n\,(P(Q^*) - \overline{c})}.$$

   Un peu plus de calcul permet de trouver l'expression du bien-être social :

$$W^* = \int_0^{Q^*} P(u)\, du - \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^*,$$

en remplaçant q_i^* par $\frac{\overline{c}-c_i}{-P'(Q^*)} + \frac{Q^*}{n}$ et en posant $v = \mathrm{Var}\,(c) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(c_i - \overline{c})^2$ pour la variance des coût marginaux, il vient que

$$W^* = \int_0^{Q^*} [P\,(u) - \overline{c}]\,du + \frac{n}{-P'\,(Q^*)}v.$$

L'expression du bien-être social à l'équilibre s'interprète de la même manière que dans l'exercice 3.1.

3. Le profit de l'entreprise i, $i = 1$ à n, s'écrit :

$$\pi_i = (1-Q)^{\alpha} q_i$$

donc la condition du premier ordre est :

$$(1-Q)^{\alpha-1}\,(1 - Q - \alpha q_i) = 0$$

d'où à l'équilibre (pour tout i)

$$\alpha q_i = 1 - Q$$

soit en additionnant sur i

$$\alpha Q = n - nQ$$

et donc

$$Q^* == \frac{n}{n+\alpha} \text{ et } q_i^* = \frac{1}{n+\alpha}.$$

3.5 Analyse graphique**

Objectif de l'exercice : Déterminer graphiquement l'équilibre de Nash d'un jeu de concurrence à la Cournot. La méthode généralise celle utilisée pour le monopole[4].

Soit un oligopole composé de n entreprises produisant un bien homogène avec des coûts marginaux constants qui peuvent différer selon les firmes. Le coût marginal de l'entreprise i est noté c_i, $i = 1, \ldots, n$. La quantité produite par l'entreprise i s'écrit q_i. La fonction inverse de demande est supposée linéaire. Soit Q la somme des quantités produites par toutes les entreprises, $Q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$, la fonction inverse de demande notée $P(Q)$ est égale à $\max\{0\,;\, a - bQ\}$.

1. *À l'aide des conditions du premier ordre (des programmes de maximisation des profits de chaque entreprise), déterminer la quantité totale produite à l'équilibre de Nash. Représenter cette équation dans le plan quantité prix ainsi que la fonction inverse de demande et le revenu marginal.*
2. *Écrire l'équation qui donne la quantité d'équilibre q_i^* en fonction de p^* le prix d'équilibre et la représenter sur un graphique.*
3. *Hachurer sur le graphique précédent l'aire qui correspond au profit d'une entreprise.*

Correction

1. La quantité totale produite à l'équilibre de Nash-Cournot est donnée par l'équation 3.2 vue dans la correction de l'exercice 3.3. Laquelle peut se réécrire sous la forme :
$$\overline{c} = a - \frac{n+1}{n} bQ^*,$$
qui ressemble à une équation du type $\overline{c} = P(Q)$ sauf que la pente de la fonction inverse de demande a été modifiée de $-b$ en $-\frac{n+1}{n}b$, c'est-à-dire en une pente plus forte. Cette nouvelle droite s'obtient facilement à partir de $P(Q)$. La figure 3.5 montre comment la quantité Q^* est déterminée et comment le prix p^* s'en déduit. L'analogie avec le monopole et le revenu marginal est évidente puisque si $n = 1$, $\frac{n+1}{n} = 2$ et que $a - 2bQ = Rm(Q)$. La figure 3.5 permet d'ailleurs de comparer la quantité que produirait un monopole dont le coût marginal de production serait $\overline{c}$ à la quantité produite à l'équilibre de Cournot-Nash.
2. L'étape suivante est de passer de la production totale à la production individuelle. Or comme nous l'avons vu (exercice 3.3) $bq_i^* = a - bQ^* - c_i$, or $a - bQ^* = p^*$, donc
$$c_i = p^* - bq_i^*,$$

[4]Cet exercice s'inspire de l'article de Sarkar, Gupta et Pal, "A Geometric Solution of a Cournot Oligopoly with Nonidentical Firms", *Journal of Economic Education*, Spring 98, pp. 118-126.

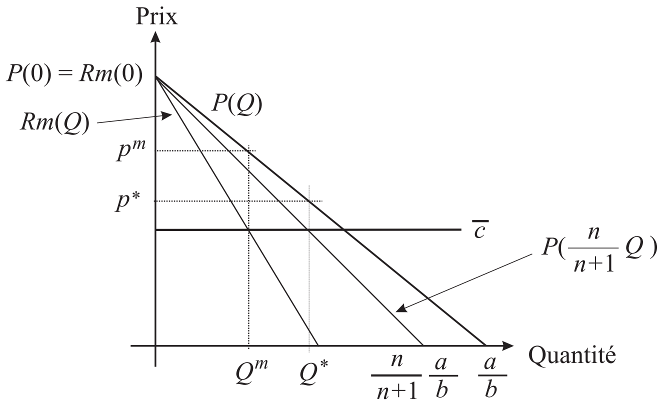


Fig. 3.5 – Quantité totale de Cournot-Nash

c'est-à-dire que si nous considérons la droite $p^* - bQ$ (qui part du point $(0, p^*)$ et qui a une pente $-b$) elle coupe la droite horizontale $p = c_i$ pour $Q = q_i^*$. Supposons que les coûts marginaux soient ordonnés :

$$c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n.$$

La figure 3.6 montre comment les quantités individuelles sont déterminées.

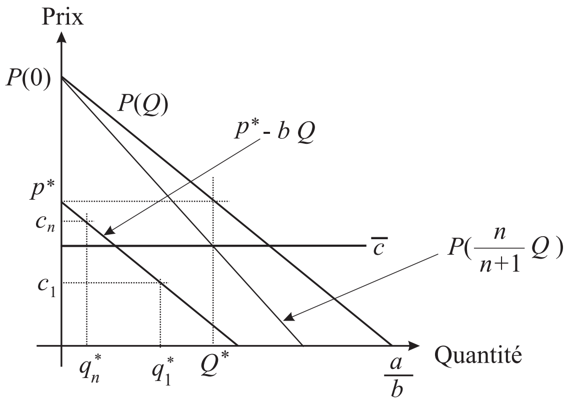


Fig. 3.6 – Quantités individuelles de Cournot-Nash

3. Sur le graphique 3.7 l'aire hachurée représente le profit de l'entreprise 1.

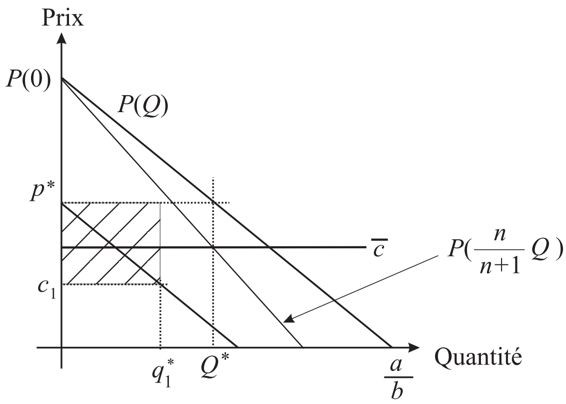


FIG. 3.7 – Profit à l'équilibre de Cournot-Nash

3.6 Libre entrée**

Objectif de l'exercice : Du fait de la concurrence imparfaite, les firmes réalisent un profit strictement positif à l'équilibre de Cournot. À long terme (les profits sont nuls sur un marché concurrentiel) cet perspective de profit positif attire plus de concurrents jusqu'à ce que les profits s'annulent. Une nouvelle question émerge : la concurrence imparfaite suscite-t-elle trop ou trop peu d'entrée ?

Il est supposé que n entreprises identiques se livrent une concurrence à la Cournot sur un marché dont la fonction inverse de demande s'écrit $P(Q) = \max\{0\,;\, a - bQ\}$, où $Q = q_1 + \ldots + q_n$ est la somme des quantités produites par chaque entreprise. Par hypothèse les firmes ont toutes le même coût marginal de production noté γ.

1. *Déterminer la quantité Q^* produite à l'équilibre, la quantité q_i^* produite par l'entreprise i à l'équilibre et le prix p^*. En déduire le profit de l'entreprise i. Examiner l'influence de n.*
2. *Soit f le coût fixe de production. Calculer $W(n)$ le bien-être social.*
3. *Déterminer le nombre limite d'entreprises, noté $\overline{n}$, tel que si $n < \overline{n}$, alors l'entrée d'une $n+1$ème entreprise est rentable, tandis que si $n > \overline{n}$ l'entrée d'une nouvelle entreprise n'est plus profitable car le profit devient inférieur au coût fixe.*
4. *Comparer $\overline{n}$ avec n^{**} le nombre d'entreprises qui maximise $W(n)$.*

Correction

1. En utilisant les résultats de l'exercice 3.3 il vient que $Q^* = \frac{n}{n+1}\frac{a-\gamma}{b}$. Comme les firmes sont identiques, la quantité produite par la firme i n'est autre que $\frac{1}{n}Q^*$ soit $\frac{1}{b}\frac{a-\gamma}{n+1}$; son profit s'écrit donc :
$$\pi(n) = \frac{1}{b}\left(\frac{a-\gamma}{n+1}\right)^2.$$
Nous pouvons mener une analyse de statique comparative sur n. Lorsque $n \to 1$, nous retrouvons les valeurs du monopole. En revanche quand $n \to +\infty$:
$$p^* = \frac{a}{n+1} + \frac{n}{n+1}\gamma \to \gamma.$$
Le prix tend vers le coût marginal de production lorsque le nombre d'entreprises tend vers l'infini. Dans ce cas, bien entendu, le profit des entreprises tend vers zéro.
2. La formule (3.1) de l'exercice 3.3 nous donne cette valeur en utilisant ici le fait que $\mathrm{Var}(c) = 0$ et que $\overline{c} = \gamma$. Toutefois, il ne faut pas oublier de soustraire les coûts fixes, $f > 0$, de production :
$$W(n) = n(\pi(n) - f) + S(Q^*) = \frac{n(n+2)}{2b}\left(\frac{a-\gamma}{n+1}\right)^2 - nf$$

3. La libre entrée conduit à un nombre d'entreprises déterminé par
$$\pi(\overline{n}) = f,$$
ce qui conduit à
$$\overline{n} = \frac{a-\gamma}{\sqrt{bf}} - 1.$$
4. Notons n^{**} le nombre d'entreprises qui maximise[5] W. Montrons que
$$n^{**} < \overline{n}.$$
C'est-à-dire que la libre entrée conduit à un nombre d'entreprises supérieur à celui qui serait socialement optimal étant donné que les entreprises se livrent à une concurrence à la Cournot.
Pour prouver ce résultat remarquons que
$$W(n) = \frac{n(n+2)}{2}\Pi(n) - nf,$$
d'où
$$W'(n) = (n+1)\Pi(n) + \frac{n(n+2)}{2}\Pi'(n) - f.$$
Or, un calcul immédiat montre que
$$\Pi'(n) = \frac{-2}{n+1}\Pi(n),$$
donc après quelques simplifications
$$W'(n) = \frac{1}{n+1}\Pi(n) - f.$$
Finalement, puisque n^{**} vérifie l'équation $W' = 0$, il est solution de l'équation
$$\frac{1}{n+1}\Pi(n) = f.$$
Nous pourrions en déduire l'expression de n^{**}. Toutefois notre objectif n'est pas tant de le calculer mais de le comparer à $\overline{n}$. Pour cela nous pouvons utiliser une astuce. Comme la fonction $\frac{1}{n+1}\Pi(n) < \Pi(n)$ et que ces deux fonctions sont décroissantes avec n, il en découle que (voir figure 3.8)
$$n^{**} < \overline{n}.$$

[5] De manière générale, le bien-être s'écrit comme une fonction du nombre d'entreprises et des quantités produites par chacune d'entre elles. Comme elles sont symétriques nous pouvons supposer qu'elles produisent la même quantité q. Le bien être s'écrit donc $W(q,n)$ et son maximum s'obtient en maximisant à la fois sur q et sur n. Ici nous procédons différemment car une fois n fixé les entreprises se livrent une concurrence à la Cournot. Nous cherchons donc le n qui sous cette contrainte rend W le plus grand possible. Bien entendu, la quantité q produite à l'équilibre de Cournot-Nash n'est pas la quantité socialement optimale.

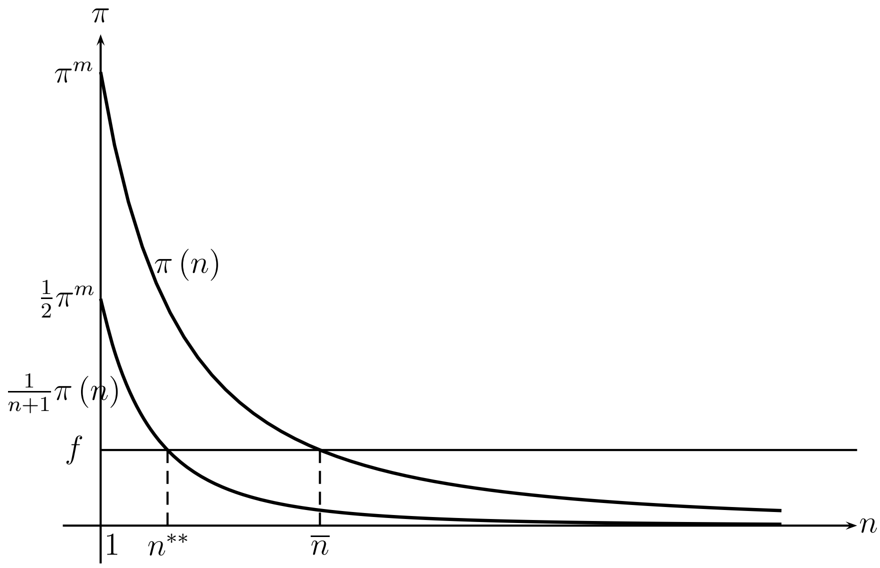


FIG. 3.8 – Détermination graphique de n^{**} et de $\overline{n}$

Il est intéressant de replacer ce résultat dans un contexte plus général. Soient n entreprises symétriques en concurrence sur un marché. Le bien-être s'écrit :

$$W(n) = S(n) + n\Pi(n) - nf.$$

La variation de bien-être induite par l'entrée d'une firme supplémentaire est

$$W(n+1) - W(n) = S(n+1) - S(n) + n(\Pi(n+1) - \Pi(n)) + (\Pi(n+1) - f).$$

Vraisemblablement, l'entrée d'un concurrent supplémentaire améliore le surplus des consommateurs (à travers la baisse du prix) : $S(n+1) - S(n) > 0$. De plus si l'entrée a lieu c'est qu'elle est rentable donc $\Pi(n+1) - f > 0$. En revanche l'entrée entraîne une diminution du profit des entreprises déjà installées : $\Pi(n+1) - \Pi(n) < 0$. Une entrée supplémentaire crée donc deux externalités : une positive vis-à-vis des consommateurs et une négative vis-à-vis des entreprises en place. L'entrant ne prend en compte aucune de ces externalités, seul l'intéresse le signe de $\Pi(n+1) - f$. La maximisation du bien-être réclame que ces deux externalités soient mesurées. Dans le cas de la concurrence à la Cournot, nous avons montré que l'externalité négative est plus importante que l'externalité positive et que la libre entrée conduit à trop d'entrée. Pour d'autres types de concurrence ce résultat peut être inversé.

3.7 Objectif des firmes et bien-être**

Objectif de l'exercice : Quel devrait-être l'objectif des firmes dans un oligopole à la Cournot pour que l'équilibre de Nash soit efficace d'un point de vue social ?.

1. *Considérons tout d'abord un duopole dans un cadre simplifié. La fonction inverse de demande s'écrit :* $P(Q) = \max\{0\,;\,1-Q\}$ *avec* $Q = q_1 + q_2$. *Les coûts marginaux de production des deux firmes sont nuls.*
   (a) *Écrire le surplus,* S, *des consommateurs en fonction de* $q_1 + q_2$ *ainsi que bien-être social* W.
   (b) *Quel est l'équilibre si chaque entreprise a pour objectif son profit plus* αW *?*
   (c) *Quel est l'équilibre si chaque entreprise a pour objectif son profit plus* αS *(avec* $0 < \alpha < 1$*) ?*
2. *Soient* n *entreprises possédant le même coût marginal constant* c. *Soit* $P(Q)$ *la fonction inverse de demande avec* $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$.
   (a) *Comparer les choix qui maximisent le bien-être social et ceux de l'équilibre de Nash du jeu où l'entreprise* i *a pour objectif son profit plus une part* α_i *du surplus des consommateurs. Pour quelles valeurs des* α_i *ces choix sont-ils identiques ?*
   (b) *Qu'advient-il si les entreprises ont des coûts marginaux constants mais différents ?*
3. *Soient* n *entreprises différentes avec* $C_i(q_i)$ *le coût de production de l'entreprise* i. *Il sera supposé qu'à l'équilibre, toutes les firmes produisent. Soit* $P(Q)$ *la fonction inverse de demande avec* $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$.
   (a) *Déterminer les quantités* q_i^* *qui maximisent le bien-être social.*
   (b) *Quelle devrait être la part de surplus qu'il faudrait ajouter au profit d'une entreprise pour qu'à l'équilibre son choix corresponde à* q_i^* *?*

Correction

1. (a) Comme le montre la figure 3.9, le surplus des consommateurs (qui est égal à l'aire du triangle hachuré) est

$$S(q_1+q_2) = \int_0^{q_1+q_2} (1-x)\,dx - (1-q_1-q_2)(q_1+q_2) = \frac{1}{2}(q_1+q_2)^2.$$

Le bien-être s'écrit comme la somme du surplus des consommateurs et des profits des entreprises :

$$W(q_1+q_2) = \frac{1}{2}(q_1+q_2)^2 + (1-(q_1+q_2))(q_1+q_2) = (q_1+q_2) - \frac{1}{2}(q_1+q_2)^2.$$

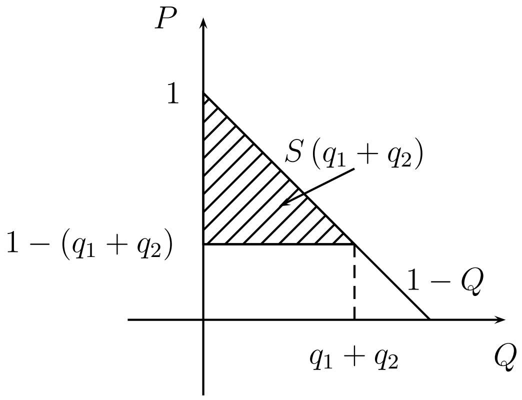


FIG. 3.9 – Surplus des consommateurs avec une demande linéaire

(b) Soit $O_i = \pi_i + \alpha W$ l'objectif de l'entreprise i si son concurrent produit q_j :

$$O_i = (1 - (q_i + q_j))\, q_i + \alpha \left((q_i + q_j) - \frac{1}{2} (q_i + q_j)^2 \right)$$

d'où

$$\frac{\partial O_i}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow q_i = \frac{1+\alpha}{2+\alpha} (1 - q_j)$$

et donc

$$q_1^* = q_2^* = \frac{1+\alpha}{3+2\alpha}.$$

Si $\alpha \to 0$ le résultat de Cournot apparaît, tandis qu'il faudrait que $\alpha \to +\infty$ pour que les entreprises produisent les quantités qui maximisent le bien-être social ($q_1 = q_2 = 1/2$).

(c) Soit maintenant $O_i = \pi_i + \alpha S$ l'objectif de l'entreprise i :

$$O_i = (1 - (q_i + q_j))\, q_i + \frac{\alpha}{2} (q_i + q_j)^2$$

d'où

$$\frac{\partial O_i}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow q_i = \frac{1 - (1-\alpha)\, q_j}{2 - \alpha}$$

Il faut remarquer que O_i est bien concave en q_i tant que α est inférieur à 2. Donc sous la condition $0 < \alpha < 1$ on a

$$q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3-2\alpha}.$$

À nouveau, si $\alpha \to 0$ le résultat de Cournot apparaît. En revanche si $\alpha = 1/2$, alors $q_1^* = q_2^* = 1/2$, c'est-à-dire que la quantité totale produite correspond à la quantité qui maximise le bien-être social. Finalement si α dépasse $1/2$, les entreprises produisent trop.

2. (a) Le bien-être social s'écrit $W(Q) = S(Q) + \sum_{i=1}^{n} (P(Q) - c) q_i$ soit après simplifications :

$$W(Q) = \int_0^Q P(u)\, du - cQ$$

la fonction W est maximale pour la quantité totale Q^* telle que $P(Q^*) = c$. En supposant que chaque entreprise produit autant, la quantité individuelle optimale est Q^*/n.
Si l'objectif d'une entreprise est $O_i = \pi_i + \alpha_i S$, soit

$$O_i = (P(Q) - c) q_i + \alpha_i \left(\int_0^Q P(u)\, du - QP(Q) \right)$$

d'où pour tout i, $i = 1$ à n

$$\frac{\partial O_i}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow (q_i - \alpha_i Q) P'(Q) + P(Q) - c = 0$$

ces n conditions définissent (lorsque les fonctions O_i sont concaves, c'est-à-dire que les α_i ne sont pas trop grands) l'équilibre de Nash de ce jeu de concurrence à la Cournot modifiée. En particulier, l'équilibre de Nash correspond à l'optimum social si pour tout i, $q_i = \alpha_i Q$ (puisqu'alors la condition du premier ordre se réduit à l'égalité entre le prix et le coût marginal). Comme les entreprises sont toutes identiques, il est raisonnable de chercher un équilibre symétrique : en posant $\alpha_i = 1/n$, il vient bien que toutes les entreprises produisent la même quantité à l'équilibre et donc que $q_i = Q/n$. Chaque entreprise devrait donc chercher à maximiser la somme de son profit et d'une part $1/n$ du surplus des consommateurs afin de maximiser le bien-être social.

(b) Si les entreprises sont asymétriques en termes de coût marginaux de production, le bien-être social s'écrit :

$$W(Q) = \int_0^Q P(u)\, du - \sum_{i=1}^{n} c_i q_i$$

Supposons (sans perte de généralité) que les coûts marginaux soient ordonnés de la manière suivante :

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k < c_{k+1} \leq c_{k+2} \leq \ldots \leq c_n$$

pour maximiser le bien-être social, il faut produire la quantité Q^* telle que $P(Q^*) = c_1$, et il est possible de répartir cette production entre les k entreprises les plus performantes soit :

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_k = \frac{Q^*}{k}$$

Ce résultat ne peut pas s'obtenir avec des entreprises qui maximisent des fonctions $O_i = \pi_i + \alpha_i S$ s'il est supposé que les α_i doivent tous être positifs. S'il est possible d'imposer des α_i négatifs, alors il suffit de poser : pour tout $i > k$, $\alpha_i = -\infty$, tandis que pour tout $i \leq k$, $\alpha_i = 1/k$.

3. (a) Lorsque les coûts marginaux de production ne sont pas constants, le bien-être social s'écrit :

$$W(Q) = \int_0^Q P(u)\, du - \sum_{i=1}^{n} C_i(q_i)$$

les conditions du premier ordre (qui seront supposées suffisantes) s'écrivent :

$$\text{pour tout } i, \quad P(Q) = C_i'(q_i)$$

c'est-à-dire que les coûts marginaux de toutes les entreprises doivent être égaux à l'optimum. Notons q_i^* les quantités définies par ces équations et $Q^* = \sum_i q_i^*$ la quantité totale produite à l'optimum social.

(b) Si l'entreprise i maximise la fonction $O_i = \pi_i + \alpha_i S$, soit

$$O_i = P(Q)\, q_i - C_i(q_i) + \alpha_i \left(\int_0^Q P(u)\, du - QP(Q) \right)$$

il vient, pour tout i, comme condition du premier ordre :

$$(q_i - \alpha_i Q)\, P'(Q) + P(Q) - C_i'(q_i) = 0$$

pour que l'équilibre de Nash conduise aux même quantités que celles qui maximisent le bien-être social, posons :

$$\alpha_i = \frac{q_i^*}{Q^*}$$

dans ce cas si pour tout $j \neq i$ $q_j = q_j^*$, il vient que

$$q_i = q_i^* \Rightarrow \frac{\partial O_i}{\partial q_i} = 0$$

Si la fonction O_i ainsi définie est bien strictement concave, il en résulte que $q_i = q_i^*$ est une meilleure réponse à $q_j = q_j^*$ et il s'agit bien d'un équilibre de Nash.

3.8 Concurrence internationale**

Objectif de l'exercice : Utiliser la concurrence à la Cournot pour illustrer différentes mesures protectionnistes.

Soit un marché où la fonction inverse de demande est donnée par $P(Q) = \max\{0\,;\,4-Q\}$*, avec* Q *la quantité totale proposée sur ce marché servi par trois entreprises (concurrence à la Cournot) dont les coûts marginaux de production sont respectivement* $c_1 = c$*,* $c_2 = 2c$ *et* $c_3 = 3c$ *avec* $0 \leq c \leq 2/3$*. L'entreprise 1 est une entreprise étrangère tandis que les deux autres sont des entreprises nationales. Le gouvernement cherche à maximiser le bien être national qui est égal à* $\Pi_2 + \Pi_3 + S$*. Pour cela il utilise l'instrument de la taxe à l'importation. Il oblige l'entreprise 1 à verser une taxe d'un montant c pour toute unité vendue.*

1. *Calculer le bien être national avant l'introduction de la taxe.*
2. *Calculer le bien être national après l'introduction de la taxe (sans oublier de rajouter le montant de la taxe, i.e. :* $W = \Pi_2 + \Pi_3 + S + taxe$*).*
3. *Le gouvernement décide d'aller plus loin et en plus de la taxe à l'importation il décide de subventionner l'entreprise nationale la moins efficace. Pour chaque quantité vendue, l'entreprise 3 reçoit une subvention d'un montant c. Calculer* $W = \Pi_2 + \Pi_3 + S + taxe - subvention$ *et comparer avec les résultats des questions 1 et 2.*
4. *Le pays de l'entreprise 1 fait pression sur le gouvernement du pays des entreprises 2 et 3 afin qu'il arrête de taxer les importations et il obtient gain de cause. Le gouvernement renforce néanmoins les subventions de telle sorte que* $c_2 = c_3 = c$*. Dériver le nouveau bien être national et comparer le avec 1).*

Correction

1. En utilisant les résultats de l'exercice 3.3, il vient que :

$$\Pi_2 = \left(\frac{4 + c + 3c - 6c}{4}\right)^2 \text{ et } \Pi_3 = \left(\frac{4 + c + 2c - 9c}{4}\right)^2$$

soit

$$\Pi_2 = \left(\frac{2-c}{2}\right)^2 \text{ et } \Pi_3 = \left(\frac{2-3c}{2}\right)^2.$$

De plus la quantité totale produite par les trois firmes s'établit à

$$Q = \frac{3}{4}(4-2c) = \frac{3}{2}(2-c),$$

et donc le surplus des consommateurs est ici :

$$S = \frac{1}{2}Q^2 = \frac{9}{8}(2-c)^2,$$

le bien-être social national est donc de :

$$W = \left(\frac{2-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-3c}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}(2-c)^2,$$

expression qu'il est préférable de ne pas simplifier afin de faciliter la comparaison avec les valeurs du bien-être social dans les autres questions.

2. Avec la taxe, le coût marginal de l'entreprise 1 devient $2c$. Les profits des firmes deviennent :

$$\Pi_2 = \left(\frac{4+2c+3c-6c}{4}\right)^2 \text{ et } \Pi_3 = \left(\frac{4+2c+2c-9c}{4}\right)^2$$

soit

$$\Pi_2 = \left(\frac{4-c}{4}\right)^2 \text{ et } \Pi_3 = \left(\frac{4-5c}{4}\right)^2.$$

Clairement les profits des firmes nationales augmentent. La quantité totale et le surplus des consommateurs deviennent :

$$Q_t = \frac{3}{4}\left(4 - \frac{7}{3}c\right) \text{ et donc } S_t = \frac{9}{8}\left(4 - \frac{7}{3}c\right)^2.$$

Les consommateurs sont perdants car le prix du bien augmente. Enfin, le montant de la taxe s'établit à :

$$T = cq_1 = \frac{c}{4}(4-c).$$

Au total le bien-être social devient avec la taxe :

$$\left(\frac{4-c}{4}\right)^2 + \left(\frac{4-5c}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}\left(4 - \frac{7}{3}c\right)^2 + \frac{c}{4}(4-c)$$

En comparant terme à terme le bien-être social avec et sans taxe il vient (en utilisant l'identité $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$) :

$$\Delta\Pi_2 = \frac{c}{4}\left(2 - \frac{3c}{4}\right), \quad \Delta\Pi_3 = \frac{c}{4}\left(2 - \frac{11c}{4}\right),$$

$$\Delta S = \frac{-c}{4}\left(3 - \frac{39c}{44}\right) \text{ et } \Delta T = T = \frac{c}{4}(4-c).$$

Au total il vient donc :

$$\Delta W = \frac{c}{4}\left(5 - \frac{23}{8}c\right) > 0.$$

La taxe sur les importations a deux effets positifs : elle crée un revenu et elle augmente les profits des firmes nationales. En revanche, elle pénalise les consommateurs. En général son effet est donc ambigu. Ici les effets positifs l'emportent sur l'effet négatif.

3. Nous comparons la situation taxe et subvention à la situation sans taxe ni subvention. La comparaison avec la situation de la question 2. découlera de la comparaison faite en 2. avec 1.

   Du fait de la taxe, le coût marginal de l'entreprise 1 est toujours à $2c$ tandis que grâce à la subvention, le coût marginal de la firme 3 devient $2c$. Les trois entreprises ont donc le même coût marginal. Il vient donc :

$$\Pi_2 = \Pi_3 = \left(\frac{2-c}{2}\right)^2$$

   La quantité totale vendue est :

$$Q_{st} = \frac{3}{2}(2-c) \text{ et donc } S_{st} = \frac{9}{8}(2-c)^2$$

   Les consommateurs obtiennent le même surplus qu'en l'absence de taxe et de subvention. Comment varie le bien-être social ? Le profit de l'entreprise 2 est inchangé comme le surplus des consommateurs. La comparaison porte donc sur le profit de la firme 3 et sur les recettes de la taxe moins le coût de la subvention :

$$\Delta\Pi_3 = c(1-c)$$

   La taxe (qui est égale à la subvention car les trois firmes produisent la même quantité) s'établit maintenant à

$$T_{st} = Sub = c\left(1 - \frac{c}{2}\right).$$

   Le gain de bien-être social par rapport à la situation sans taxe ni subvention correspond donc au gain de profit de la firme 3 soit :

$$\Delta W = c(1-c).$$

   Ce gain est moins important que le gain obtenu sans subvention pour la firme 3 mais avec une taxe pour la firme 1.

4. Les trois firmes ont le même coût marginal constant égal à c. Les profits des firmes nationales sont :

$$\Pi_2 = \Pi_3 = \left(\frac{4-c}{4}\right)^2$$

   Le surplus des consommateurs devient :

$$S = \frac{9}{32}(4-c)^2 = \frac{9}{8}\left(2 - \frac{c}{2}\right)^2$$

   Enfin la subvention s'élève à :

$$cq_2 + 2cq_3 = 3cq_2 = \frac{3c}{4}(4-c)$$

   La différence de bien-être social entre la situation sans taxe ni subvention et cette situation est donc décomposée en

$$\Delta\Pi_2 = \frac{c}{16}(8-3c), \quad \Delta\Pi_3 = \frac{5c}{16}(8-7c)$$

pour les consommateurs :

$$\Delta S = \frac{9c}{16}\left(4 - \frac{3}{2}c\right)$$

pour l'instant tout le monde y gagne mais il faut financer les subventions et au total :

$$\Delta W = \frac{c}{16}\left(72 - 79c\right)$$

qui est toujours positif pour c compris entre 0 et 2/3.

3.9 Taxer ou subventionner des exportateurs**

Objectif de l'exercice : Étudier comment deux pays peuvent chercher à manipuler les prix au profit d'une entreprise nationale en lui versant une subvention. (Voir l'exercice 4.12 pour la même question lorsque la concurrence est en prix).

Soient deux pays cherchant chacun à subventionner leur entreprise. Les deux firmes se livrent une concurrence à la Cournot sur le marché d'un troisième pays. Soit $P(Q) = \max\{0\,;\,1-Q\}$ la fonction inverse de demande. Supposons que $c_1 = c_2 = 0$. Notons s_1 et s_2 le niveau des subventions choisis en première période.

1. *Déterminez les quantités produites par chaque firme, les profits des firmes et de chaque pays lorsque $s_1 = s_2 = 0$.*
2. *Déterminer les quantité produites par chaque firme pour s_1 et s_2 quelconques.*
3. *Écrivez le profit net des deux pays producteurs en fonction de s_1 et s_2 et déterminer les choix optimaux de chacun.*
4. *Comparez les profits des deux pays producteurs en présence et en l'absence de subventions. Expliquez.*

Correction

1. En l'absence de subvention, l'équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Cournot est : $q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$ et donc $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{9}$.
2. Pour s_1 et s_2 quelconques, l'équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Cournot est :
$$q_i = \frac{1}{3}(1 + 2s_i - s_j).$$
La subvention joue comme un coût marginal négatif.
3. Ici le profit est égal au bien-être puisque les consommateurs sont dans un troisième pays, donc
$$W_i = \frac{1}{9}(1 + 2s_i - s_j)^2 - s_i\frac{1}{3}(1 + 2s_i - s_j)$$
dont la maximisation conduit à la fonction de réaction :
$$s_1^*(s_j) = \frac{3}{4}(1 - s_2),$$
et donc à
$$s_i^* = \frac{1}{5}.$$
4. En présence de subventions, $W_i = \frac{2}{25}$. En l'absence de subventions, $W_i = \frac{1}{9} = \frac{2}{18} > \frac{2}{25}$. Il s'agit d'un dilemme des prisonniers.

3.10 Réduction des coûts**

Objectif de l'exercice : Étudier les incitations privées à réduire les coûts dans un duopole à la Cournot. Comparer avec les choix optimaux en termes de bien-être social.

Soit un duopole à la Cournot avec une fonction inverse de demande égale à $P(Q) = \max\{0\,;\,9-Q\}$ *; le coût marginal de l'entreprise* 1 *est* c_1*, celui de l'entreprise 2 est* c_2*.*

1. *Écrire les profits, notés* $\Pi_1(c_1,c_2)$ *et* $\Pi_2(c_1,c_2)$ *des entreprises à l'équilibre du jeu de concurrence à la Cournot. En déduire* $\Pi_i(0,c_j)$*,* $\Pi_i(c_i,0)$ *et* $\Pi_i(0,0)$*.*
2. *Partant de* $c_1 = c_2 = 3$*, imaginons qu'une entreprise puisse payer un coût fixe* F *afin de réduire son coût marginal de* c_i *à* 0*. Tout d'abord, seule l'entreprise 1 a la possibilité de réduire ses coûts. Que fait-elle ?*
3. *Partant toujours de* $c_1 = c_2 = 3$*, les deux entreprises choisissent simultanément de réduire ou pas leur coût marginal de production. Écrire ce jeu sous forme normale et déterminer les équilibres de Nash selon la valeur de* F*. Comparer ces choix avec ceux d'une entreprise en monopole.*
4. *Un planificateur social peut offrir l'innovation aux entreprises. Que fait-il ? (Il ne peut pas empêcher la concurrence à la Cournot, mais il peut choisir, moyennant le paiement du coût fixe, les coût marginaux des entreprises.) Comparez les choix du planificateur avec ceux du marché.*

Correction

1. Dans un duopole à la Cournot (voir l'exercice 3.1) le profit de l'entreprise i s'écrit à l'équilibre :

$$\Pi_i(c_i,c_j) = \frac{1}{9}(9-2c_i+c_j)^2.$$

D'où $\Pi_i(0,c_j) = \frac{1}{9}(9+c_j)^2 - F$, $\Pi_i(c_i,0) = \frac{1}{9}(9-2c_i)^2$, $\Pi_i(0,0) = 9-F$.

2. Si l'entreprise 1 est la seule à pouvoir réduire son coût marginal elle le fait si et seulement si $\Pi_1(0,3) - F \geq \Pi_1(3,3)$. C'est-à-dire si et seulement si $16 - F \geq 4$ soit $F \leq 12$.
3. Soit R la stratégie qui consiste à réduire ses coûts et PR celle qui correspond au statu quo. La forme normale du jeu où les entreprises choisissent simultanément entre R et PR est décrit par la table 3.1.

Si $F > 12$, le jeu n'a qu'un seul équilibre de Nash : (PR,PR) personne ne s'offre la réduction de coût. Si $12 > F > 8$, le jeu possède deux équilibres de Nash (R,PR) et (PR,R) : une seule entreprise peut réduire. Enfin, si $8 > F$, les deux entreprises réduisent.

Le choix d'un monopole est dicté par la comparaison entre $\frac{81}{4} - F$ et 9 donc il adopte si et seulement si $\frac{45}{4} = 11,25 > F$. C'est-à-dire qu'une entreprise en concurrence adopte plus fréquemment qu'un monopole (pour $12 > F > \frac{45}{4}$.

		E2	
		R	PR
E1	R	$(9-F, 9-F)$	$(16-F, 1)$
	PR	$(1, 16-F)$	$(4, 4)$

TAB. 3.1 – Choix simultanés d'adoption d'une nouvelle technologie

4. La table 3.2 présente le niveau du bien-être social dans chaque configuration (cf. l'exercice 3.1 pour l'expression générale de la fonction $W(c_1, c_2)$).

		E2	
		R	PR
E1	R	$36-2F$	$29,5-F$
	PR	$29,5-F$	16

TAB. 3.2 – Choix d'un planificateur

Si $6,5 > F$, alors le planificateur paye pour que les deux firmes aient accès à la nouvelle technologie. Si $13,5 > F > 6,5$, alors il ne paye que pour une seule firme et crée une situation asymétrique. Finalement, si $F > 13,5$ il ne souhaite pas financer la nouvelle technologie.

Le planificateur souhaite modifier les choix des entreprises lorsque $6,5 < F < 8$: dans ce cas il est préférable qu'une seule firme réduise ses coûts et non pas les deux. D'autre part, lorsque $12 < F < 13,5$ aucune entreprise n'adopte la nouvelle technologie alors qu'il serait bénéfique pour la société qu'une d'elles le fasse. Le désaccord peut donc porter sur trop ou trop peu d'innovation.

3.11 Investissement en R&D et concurrence**

Objectif de l'exercice : Étudier les dépenses pour réduire les coûts selon le degré d'engagement des firmes. Deux cas polaires sont étudiés. Tout d'abord celui où les firmes peuvent s'engager totalement sur une dépense puis celui où elles sont incapables de s'engager.

Soit $P(Q) = \max\{0\,;\,100 - Q\}$ *une fonction inverse de demande sur un marché où deux entreprises identiques* $c_1 = c_2 = 40$ *se livrent une concurrence à la Cournot. Toutefois, avant de choisir leur quantité, chaque entreprise peut investir pour réduire son coût marginal de production. Soit* $\lambda_i \leq 40$*, pour faire passer le coût marginal de 40 à* $40 - \lambda_i$*, il en coûte* λ_i^2*. En première période les entreprises choisissent simultanément leur réduction de coût marginal. Puis en seconde période elles choisissent simultanément leur quantité après avoir observé les choix de première période. Cette séparation temporelle correspond à la possibilité de s'engager de manière crédible (irréversible) sur une dépense.*

1. *Déterminer* $q_1^*(\lambda_1, \lambda_2)$ *et* $q_2^*(\lambda_1, \lambda_2)$ *les quantités choisies en seconde période.*
2. *Écrire les profits en fonction de* $q_1^*(\lambda_1, \lambda_2)$ *et* $q_2^*(\lambda_1, \lambda_2)$*. En déduire les choix* λ_1^* *et* λ_2^**.*
3. *Déterminer les choix* $\widehat{\lambda_1}$*,* $\widehat{\lambda_2}$*,* $\widehat{q_1}$ *et* $\widehat{q_2}$ *du jeu où les entreprises choisissent simultanément leur quantité et leur réduction des coûts (le choix simultané traduit l'idée que les firmes sont incapables de s'engager sur une dépense).*
4. *Comparer.*

Correction

1. Étant donnés λ_1 et λ_2 (et en supposant que $40 - \lambda_i$ est bien positif), la résolution du jeu de concurrence à la Cournot conduit à :

$$q_i^*(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{1}{3}\left(100 - 2\left(c_i - \lambda_i\right) + \left(c_j - \lambda_j\right)\right),$$

soit

$$q_i^*(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{1}{3}\left(60 + 2\lambda_i - \lambda_j\right).$$

2. La somme des quantités est égale à

$$q_i^*(\lambda_i, \lambda_j) + q_j^*(\lambda_j, \lambda_i) = \frac{1}{3}\left(120 + \lambda_i + \lambda_j\right),$$

le prix est donc égal à

$$100 - \frac{1}{3}\left(120 + \lambda_i + \lambda_j\right) = \frac{1}{3}\left(180 - \lambda_i - \lambda_j\right),$$

le profit de l'entreprise i s'écrit donc :

$$\left(P\left(Q^*\right) - c_i + \lambda_i\right) q_i^*(\lambda_i, \lambda_j) - \lambda_i^2,$$

soit
$$\frac{1}{9}\left(60+2\lambda_i-\lambda_j\right)^2-\lambda_i^2,$$
la condition du premier ordre s'écrit :
$$\frac{4}{9}\left(60+2\lambda_i-\lambda_j\right)-2\lambda_i=0,$$
d'où
$$\lambda_i^*\left(\lambda_j\right)=24-\frac{2}{5}\lambda_j.$$
Finalement, l'intersection des fonctions de meilleures réponses conduit à
$$\lambda_i^*=\frac{120}{7}<40.$$

3. Lorsque les choix sont simultanés, il faut résoudre pour trouver l'équilibre de Nash le système de quatre équations à quatre inconnues :
$$\begin{cases} \frac{\partial\pi_1(q_1,q_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial q_1} & =0 \\ \frac{\partial\pi_1(q_1,q_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1} & =0 \\ \frac{\partial\pi_2(q_1,q_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial q_2} & =0 \\ \frac{\partial\pi_2(q_1,q_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} & =0 \end{cases}$$
soit
$$\begin{cases} 60+\lambda_1-2q_1-q_2 & =0 \\ q_1-2\lambda_1 & =0 \\ 60+\lambda_1-q_1-2q_2 & =0 \\ q_2-2\lambda_2 & =0 \end{cases}$$
d'où
$$\begin{cases} \widehat{q_1} & =24 \\ \widehat{\lambda_1} & =12 \\ \widehat{q_2} & =24 \\ \widehat{\lambda_2} & =12 \end{cases}$$

4. Si les choix (quantité-coût) sont simultanés, les entreprises réduisent moins leur coût marginal que lorsque ces choix sont séquentiels ($12<120/7$) et elles produisent moins ($24<\frac{9}{7}20$). Finalement, les profits sont plus importants lorsque les choix sont séquentiels (661,24>576). Cela vient du fait que lorsque tous les choix sont simultanés, une réduction du coût marginal profite moins à la firme. En effet, cette réduction n'étant pas observée par son concurrent ce dernier ne diminue pas sa production, ce qu'il fait, au contraire, lorsque les choix sont séquentiels.

3.12 Présence sur deux marchés : force ou faiblesse ?**

Objectif de l'exercice : Comme les exercices 3.11 et 3.13 l'accent est mis sur l'effet de l'engagement sur les choix stratégiques. L'engagement se modélise par un choix séquentiel (engagement parfait) ou simultané (absence d'engagement). Ce principe est utilisé pour étudier la politique d'une firme en monopole sur un marché et en duopole sur un autre. (Voir l'exercice 4.11 pour la même question lorsque la concurrence est en prix).

Soient deux marchés : A et B pour un même bien. La fonction inverse de demande sur le marché A est $\max\{0\,;\,a - Q_A\}$*, tandis que sur le marché B elle est normalisée à* $\max\{0\,;\,1 - Q_B\}$*. Soient deux entreprises, 1 et 2. L'entreprise 1 produit sur les deux marchés, tandis que l'entreprise 2 ne produit que sur le marché B. Les coûts de production sont identiques pour les deux entreprises :* $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}q^2$*. Trois quantités sont donc à déterminer :* q_{1A} *(resp.* q_{1B}*) la quantité produite par l'entreprise 1 pour le marché A (resp. B), et* q_{2B} *la quantité produite par l'entreprise 2 pour le marché B*

1. *Déterminer l'équilibre de Nash du jeu où les trois quantités sont choisies simultanément.*
2. *Déterminer l'équilibre de Nash du jeu où l'entreprise 1 choisit d'abord* q_{1A}*, puis une fois cette quantité observée les deux entreprises choisissent simultanément* q_{1B} *et* q_{2B}*.*
3. *Comparer.*

Correction

1. La firme 1 est en monopole sur le marché A et en duopole à la Cournot sur le B. Son profit s'écrit :

$$\pi_1 = (a - q_{1A})\, q_{1A} + (1 - q_{1B} - q_{2B})\, q_{1B} - \frac{1}{2}\left(q_{1A} + q_{1B}\right)^2,$$

tandis que le profit de l'entreprise 2 est :

$$\pi_2 = (1 - q_{1B} - q_{2B})\, q_{2B} - \frac{1}{2}\left(q_{2B}\right)^2.$$

Lorsque les trois quantités sont choisies simultanément. L'équilibre de Nash est donné par la résolution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_{1A}} = 0, \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial q_{1B}} = 0, \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_{2B}} = 0, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} a - 3q_{1A} - q_{1B} = 0, \\ 1 - q_{1A} - 3q_{1B} - q_{2B} = 0, \\ 1 - q_{1B} - 3q_{2B} = 0, \end{cases}$$

dont la résolution conduit à

$$\begin{cases} \widehat{q_{1A}} = \frac{2(4a-1)}{21}, \\ \widehat{q_{1B}} = \frac{2-a}{7}, \\ \widehat{q_{2B}} = \frac{5+a}{21}. \end{cases}$$

Pour que l'entreprise 1 produise sur les deux marchés il faut que $\frac{1}{4} \leq a \leq 2$. Si a est supérieur à 2, l'entreprise 1 préfère ne produire que pour le marché A. Si a est inférieur à un quart, alors elle préfère ne produire que pour le marché B.

2. Nous devons d'abord commencer par déterminer pour toute valeur de q_{1A}, l'équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Cournot sur le marché B. C'est-à-dire résoudre le système :

$$\begin{cases} 1 - q_{1A} - 3q_{1B} - q_{2B} = 0, \\ 1 - q_{1B} - 3q_{2B} = 0, \end{cases}$$

dont la résolution conduit à

$$\begin{cases} q_{1B}^* (q_{1A}) = \frac{2-3q_{1A}}{8}, \\ q_{2B}^* (q_{1A}) = \frac{2+q_{1A}}{8}, \end{cases}$$

sous réserve que $q_{1A} \leq \frac{2}{3}$. Pour déterminer q_{1A} il faut écrire le profit π_1 en fonction de q_{1A} et le maximiser. Pour $q_{1A} \leq \frac{2}{3}$, ce profit s'écrit :

$$\pi_1 (q_{1A}) = (a - q_{1A}) q_{1A} + \frac{2 + q_{1A}}{4} \frac{2 - 3q_{1A}}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{2 + 5q_{1A}}{8} \right)^2$$

d'où (en écrivant que la dérivée est égale à zéro) :

$$q_{1A}^* = \frac{2(32a - 9)}{165},$$

valeur qui est bien inférieure à 2/3 pour a inférieur à 2. Il en découle que :

$$q_{1B}^* = \frac{8(2-a)}{55} \text{ et } q_{2B}^* = \frac{8a + 39}{165}.$$

3. Un calcul direct montre que pour tout a inférieur à 2

$$q_{1A}^* < \widehat{q_{1A}}, \; q_{1B}^* > \widehat{q_{1B}}, \text{ et que } q_{2B}^* < \widehat{q_{2B}}.$$

Enfin, la comparaison des profits montre que

$$\pi_1^* > \widehat{\pi}_1, \text{ et que } \pi_2^* > \widehat{\pi}_2.$$

L'entreprise 1 profite du fait de pouvoir choisir q_{1A} en premier et du fait que ce choix est observé par son concurrent. En effet, en réduisant un peu q_{1A}, la firme 1 "signale" (de manière crédible) à la firme 2 qu'elle va produire plus sur le marché B. La firme 2 réduit donc sa propre production ce qui est bénéfique pour la firme 1.

3.13 Double concurrence à la Cournot**

Objectif de l'exercice : Lorsque deux entreprises sont en concurrence sur deux marchés d'un même bien, comparer le choix simultané des quantités avec un choix séquentiel.

Deux entreprises (1 et 2) vendent simultanément le même bien sur deux marchés A et B. La fonction inverse de demande sur le marché A est $\max\{0\,;\,a - Q_A\}$, *tandis que sur le marché B elle est égale à* $\max\{0\,;\,b - Q_B\}$. *On suppose que* $9b/32 \leq a \leq 32b/9$. *Les coûts de production sont identiques pour les deux entreprises :* $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}q^2$.

1. *Déterminer le choix simultané des quatre quantités.*
2. *Résoudre le jeu suivant : choix simultané des deux quantités du marché A, puis choix simultané des deux quantités du marché B (après l'observation des quantités proposées sur le marché A).*
3. *Résoudre le jeu suivant : choix simultané des deux quantités du marché B, puis choix simultané des deux quantités du marché A (après l'observation des quantités proposées sur le marché B).*
4. *Comparer les résultats.*

Correction

1. Choix simultané des quatre quantités. Il faut résoudre le système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_{1A}} = 0, \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial q_{2A}} = 0, \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial q_{1B}} = 0, \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_{2B}} = 0, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} a - q_{2A} - 2q_{1A} - q_{1A} - q_{1B} = 0, \\ a - q_{1A} - 2q_{2A} - q_{2A} - q_{2B} = 0, \\ b - q_{2B} - 2q_{1B} - q_{1A} - q_{1B} = 0, \\ b - q_{1B} - 2q_{2B} - q_{2A} - q_{2B} = 0, \end{cases}$$

ce qui conduit aux solutions :

$$\begin{cases} \widehat{q_{1A}} = \widehat{q_{2A}} = \frac{1}{15}\left(4a - b\right), \\ \widehat{q_{1B}} = \widehat{q_{2B}} = \frac{1}{15}\left(4b - a\right), \end{cases}$$

Il s'agit bien de quantités positives car $\frac{b}{4} < \frac{9b}{32} \leq a \leq \frac{32b}{9} < 4$. De plus les profits s'établissent à :

$$\widehat{\pi_1} = \widehat{\pi_2} = \frac{1}{450}\left(43a^2 - 14ab + 43b^2\right).$$

2. Commençons par résoudre pour q_{1A} et q_{2A} fixés, le jeu de concurrence à la Cournot sur le marché B. Il s'agit de résoudre le système suivant, où les inconnues sont q_{1B} et q_{2B} :

$$\left\{ \begin{array}{l} b - q_{2B} - 2q_{1B} - q_{1A} - q_{1B} = 0, \\ b - q_{1B} - 2q_{2B} - q_{2A} - q_{2B} = 0, \end{array} \right.$$

ce qui conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{1B}^{*}\left(q_{1A}, q_{2A}\right) = \frac{1}{8}\left(2b - 3q_{1A} + q_{2A}\right), \\ q_{2B}^{*}\left(q_{1A}, q_{2A}\right) = \frac{1}{8}\left(2b + q_{1A} - 3q_{2A}\right). \end{array} \right.$$

Le profit de la firme 1 s'écrit donc en fonction de q_{1A} et q_{2A} sous la forme :

$$\pi\left(q_{1A}, q_{2A}\right) = \left(a - q_{1A} - q_{2A}\right) q_{1A} + \frac{1}{128}\left(12\, b^2 - 37\, {q_{1A}}^2 - 18\, q_{1A}\, q_{2A} + 3\, {q_{2A}}^2 + 12\, b\, \left(-3\, q_{1A} + q_{2A}\right)\right)$$

la condition du premier ordre donne la fonction de réaction :

$$q_{1A}^{*}\left(q_{2A}\right) = \frac{1}{165}\left(64a - 18b - 73q_{2A}\right),$$

la fonction de réaction de la firme 2 s'obtient par symétrie et leurs intersections conduisent à :

$$q_{1A}^{*} = q_{2A}^{*} = \frac{1}{119}\left(32a - 9b\right),$$

ces quantité sont positives puisque $a \geq \frac{9b}{32}$ par hypothèse. Il en découle que :

$$q_{1B}^{*} = q_{2B}^{*} = \frac{8}{119}\left(4b - a\right).$$

Enfin,

$$\pi_1^{*} = \pi_2^{*} = \frac{3}{4046}\left(128a^2 - 38ab + 127b^2\right)$$

3. Si les quantités sont d'abord choisies sur le marché B, puis sur le marché A les résultats s'obtiennent par symétrie en changeant a en b et b en a.

$$\widetilde{q_{1A}} = \widetilde{q_{2A}} = \frac{1}{119}\left(32b - 9a\right),$$

$$\widetilde{q_{1B}} = \widetilde{q_{2B}} = \frac{8}{119}\left(4a - b\right).$$

Enfin,

$$\widetilde{\pi_1} = \widetilde{\pi_2} = \frac{3}{4046}\left(127a^2 - 38ab + 128b^2\right)$$

4. Il est facile de vérifier que pour $9b/32 \leq a \leq 32b/9$:

$$q_{1A}^{*} < \widehat{q_{1A}}, \text{ et que } q_{1B}^{*} > \widehat{q_{1B}}.$$

La comparaison des profits montre tout d'abord que

$$\pi_1^* > \widetilde{\pi}_1 \Leftrightarrow \frac{3}{4046}\left(a^2 - b^2\right) > 0 \Leftrightarrow a > b$$

il est préférable de choisir en premier les quantités sur le marché le plus grand.

$$\begin{cases} \pi_1^* < \widehat{\pi}_1 \quad \text{si } \frac{9b}{32} < a < \frac{316b}{589} \\ \\ \pi_1^* > \widehat{\pi}_1 \quad \text{si } \frac{316b}{589} < a < \frac{32b}{9} < 4b \end{cases}$$

Lorsque a est petit, il est préférable de choisir simultanément les quantités sur les deux marchés. En revanche si a est plus élevé (notons que le seuil est inférieur à 1), le choix séquentiel permet aux firmes d'augmenter leur profit. Elles y arrivent en limitant la quantité choisie sur le premier marché afin d'être en meilleure position sur le second.

Toutefois, lorsqu'il est préférable de choisir simultanément les quantité plutôt que de s'engager sur les productions pour le marché A, il est encore plus profitable de s'engager sur les production du marché B[6]. En fait, si les firmes peuvent se coordonner sur l'identité du marché, le choix séquentiel domine toujours le choix simultané.

[6]Par symétrie, $\widetilde{\pi_1} > \widehat{\pi_1}$ si $\frac{316a}{589} < b < \frac{32a}{9}$. Or, $pi_1^* < \widehat{\pi_1} \Rightarrow \frac{9b}{32} < a < \frac{316b}{589} \Rightarrow \frac{316a}{589} < b < \frac{32a}{9}$.

3.14 Duopole à la Stackelberg et cadre linéaire***

Objectif de l'exercice : Étudier le modèle de von Stackelberg (1934) qui reprend le cadre d'une concurrence à la Cournot mais donne la possibilité à une firme de choisir sa quantité avant celle de son concurrent. Cette exercice suit la même démarche que l'exercice 3.1.

Deux entreprises se font concurrence sur le marché d'un bien homogène. Le coût marginal constant de production de l'entreprise 1 (resp. 2) est noté c_1 (resp. c_2). La quantité produite par l'entreprise 1 (resp. 2) est notée q_1 (resp. q_2). Soit Q la quantité totale produite, $Q = q_1 + q_2$, la fonction inverse de demande est notée $P(Q)$, elle est supposée linéaire, c'est-à-dire qu'il existe a et b deux nombres positifs, tels que $P(Q) = \max\{0\,; a - bQ\}$. La concurrence se déroule à la Stackelberg c'est-à-dire que l'entreprise 1 choisit en premier et de manière irréversible la quantité q_1, l'entreprise 2 l'observe et choisit la quantité q_2.

1. *Écrire le profit de l'entreprise 2 en fonction des quantités q_1 et q_2 et de son coût marginal c_2. En déduire la fonction de meilleure réponse $q_2^*(q_1)$ (Indication : ne pas oublier que la meilleure réponse peut être 0).*
2. *Déterminer les quantités q_1^* et q_2^* qui forment un équilibre de Nash de ce jeu. (Indication : pour quelles valeurs de c_1 et de c_2 une entreprise produit-elle ou pas à l'équilibre ?)*
3. *Représenter dans le plan c_1, c_2 les différents équilibres.*
4. *Pour chaque équilibre calculer les profits des entreprises, le surplus des consommateurs ainsi que le niveau de la fonction de bien-être social.*
5. *Pour c_1 fixé compris entre $\frac{7a}{38}$ et $\frac{a}{2}$, tracer la fonction de bien-être social lorsque c_2 varie de 0 à l'infini lorsque la concurrence est à la Stackelberg et lorsque la concurrence est à la Cournot.*

Correction

1. Exactement comme dans le cas de la concurrence à la Cournot, le profit de l'entreprise 2 s'écrit :

$$\Pi_2(q_1, q_2) = (a - c_2 - bq_1 - bq_2)\, q_2,$$

il s'agit d'une parabole dont le maximum est atteint au milieu des deux racines, d'où la fonction de meilleures réponses :

$$q_2^*(q_1) = \begin{cases} \frac{1}{2b}(a - c_2 - bq_1) & \text{si } q_1 \leq (a - c_2)/b \\ 0 & \text{si } q_1 \geq (a - c_2)/b \end{cases}$$

2. L'entreprise 1 choisit q_1 afin de maximiser $\Pi_1(q_1, q_2^*(q_1))$ (c'est-à-dire qu'elle raisonne par *récurrence arrière*, ou encore que nous résolvons ce jeu en cherchant uniquement les équilibres sous-jeux parfaits) soit :

$$\Pi_1(q_1, q_2^*(q_1)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a - 2c_1 + c_2 - bq_1)\, q_1 & \text{si } q_1 \leq \frac{1}{b}(a - c_2) \\ (a - c_1 - bq_1)\, q_1 & \text{si } q_1 \geq \frac{1}{b}(a - c_2) \end{cases}$$

Or, justement ces deux courbes se croisent pour $q_1 = \frac{1}{b}(a - c_2)$. Si $c_1 > c_2$, alors la deuxième expression conduirait à un profit négatif pour les q_1 considérés et donc le maximum correspond à celui de la première expression. En revanche, pour $c_1 < c_2$, et si (comme le montre un calcul élémentaire) $0 > a + 2c_1 - 3c_2$ il vient que le maximum global de la première expression dépasse la borne $\frac{1}{b}(a - c_2)$. Finalement quatre cas apparaissent après un examen attentif. Un cas 0 où le leader ne peut pas faire de profit, et trois autres cas représentés sur la figure 3.10. Le cas 1 arrive lorsque $2c_1 - a \leq$

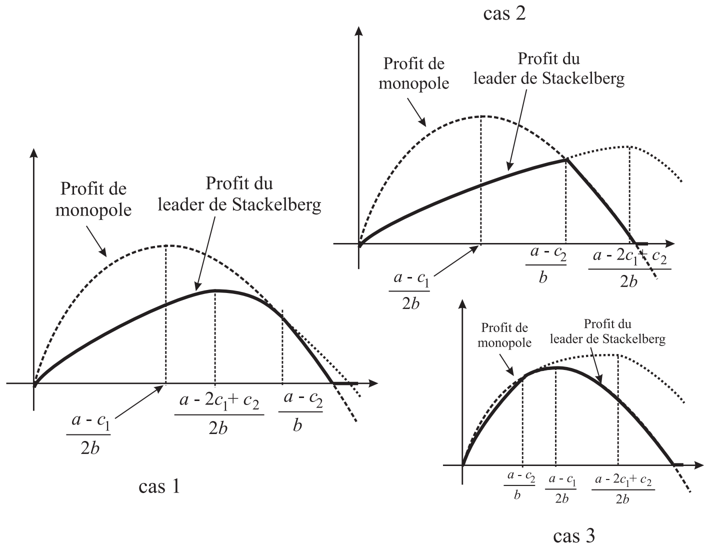


FIG. 3.10 – Courbes de profit de l'entreprise 1 pour différentes valeurs de c_2.

$c_2 \leq \frac{1}{3}(a + 2c_1)$. Le cas 2 survient quand $\frac{1}{3}(a + 2c_1) \leq c_2 \leq \frac{1}{2}(a + c_1)$ et enfin le cas 3 pour $\frac{1}{2}(a + c_1) \leq c_2$.

$$q_1^* = \begin{cases} 0 & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{1}{2b}(a - 2c_1 + c_2) & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{3}(a + 2c_1) \\ \frac{1}{b}(a - c_2) & \text{si } \frac{1}{3}(a + 2c_1) \leq c_2 \leq \frac{1}{2}(a + c_1) \\ \frac{1}{2b}(a - c_1) & \text{si } \frac{1}{2}(a + c_1) \leq c_2 \end{cases}$$

et donc en utilisant $q_2^* = q_2^*(q_1^*)$ il vient que

$$q_2^* = \begin{cases} \frac{1}{2b}(a - c_2) & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{1}{4b}(a + 2c_1 - 3c_2) & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{3}(a + 2c_1) \\ 0 & \text{si } \frac{1}{3}(a + 2c_1) \leq c_2 \leq \frac{1}{2}(a + c_1) \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}(a + c_1) \leq c_2 \end{cases}$$

Si la concurrence avait été à la Cournot (choix simultanés des quantités) l'entreprise 1 aurait produit (cf. exercice 3.1) :

$$q_1^C = \begin{cases} 0 & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{1}{3b}(a - 2c_1 + c_2) & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{2}(a + c_1) \\ \frac{1}{2b}(a - c_1) & \text{si } \frac{1}{2}(a + c_1) \leq c_2 \end{cases}$$

et pour l'entreprise 2 :

$$q_2^C = \begin{cases} \frac{1}{2b}(a - c_2) & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{1}{3b}(a + c_1 - 2c_2) & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{2}(a + c_1) \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}(a + c_1) \leq c_2 \end{cases}$$

Il en résulte que l'entreprise 1 produit toujours plus en Stackelberg qu'en Cournot tandis que c'est l'inverse pour l'entreprise 2. On remarque qu'une entreprise 1 inefficace ne peut pas s'imposer grâce au privilège de jouer en premier : si elle est éliminée dans un jeu simultané elle l'est aussi dans le jeu séquentiel. En revanche, une entreprise 2 "insuffisamment efficace" est sortie du marché lorsque la concurrence est à la Stackelberg alors qu'elle réussirait à se maintenir si la concurrence était à la Cournot. Pour cela l'entreprise 1 pratique "un prix limite" au sens où elle produit plus qu'en monopole afin d'exclure son concurrent du marché.

3. Le graphique de gauche de la figure 3.11 présente dans le plan (c_1, c_2) les conditions d'existence déterminées à la question précédente, tandis que le graphique de droite rappelle les conditions lorsque la concurrence est à la Cournot.

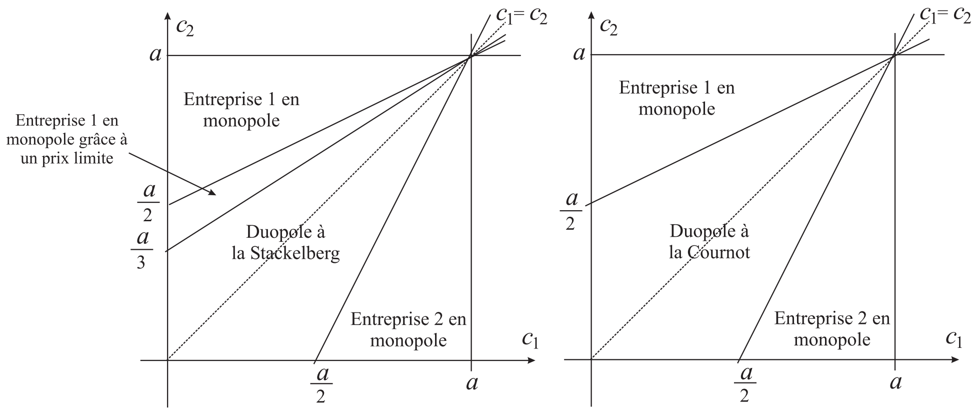


FIG. 3.11 – Équilibres dans le plan c_1, c_2 : à gauche Stackelberg, à droite Cournot

4. La quantité totale produite s'établit à

$$Q^* = \begin{cases} \frac{1}{2b}(a - c_2) & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{3}{4b}\left(a - \frac{2c_1 + c_2}{3}\right) & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{3}(a + 2c_1) \\ \frac{1}{b}(a - c_2) & \text{si } \frac{1}{3}(a + 2c_1) \leq c_2 \leq \frac{1}{2}(a + c_1) \\ \frac{1}{2b}(a - c_1) & \text{si } \frac{1}{2}(a + c_1) \leq c_2 \end{cases}$$

Le prix d'équilibre s'en déduit puisque $p^* = a - bQ^*$. Le surplus des consommateurs est égal à :

$$S^* = \frac{b}{2}(Q^*)^2 = \begin{cases} \frac{1}{8b}(a - c_2)^2 & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{9}{32b}\left(a - \frac{2c_1 + c_2}{3}\right)^2 & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{3}(a + 2c_1) \\ \frac{1}{2b}(a - c_2)^2 & \text{si } \frac{1}{3}(a + 2c_1) \leq c_2 \leq \frac{1}{2}(a + c_1) \\ \frac{1}{8b}(a - c_1)^2 & \text{si } \frac{1}{2}(a + c_1) \leq c_2 \end{cases}$$

ce surplus est-il supérieur ou inférieur au surplus $S^C = \frac{2}{9b}\left(a - \frac{c_1+c_2}{2}\right)^2$ obtenu lorsque la concurrence est à la Cournot ? Le calcul de la différence conduit à :

$$Q^* - Q^C = \begin{cases} 0 & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{1}{12b}\left(a - 2c_1 + c_2\right) & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{3}\left(a + 2c_1\right) \\ \frac{1}{3b}\left(a + c_1 - 2c_2\right) & \text{si } \frac{1}{3}\left(a + 2c_1\right) \leq c_2 \leq \frac{1}{2}\left(a + c_1\right) \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}\left(a + c_1\right) \leq c_2 \end{cases}$$

Cette différence est donc toujours positive. Les profits des entreprises s'élèvent à :

$$\Pi_1^* = \begin{cases} 0 & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{1}{8b}\left(a - 2c_1 + c_2\right)^2 & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{3}\left(a + 2c_1\right) \\ \frac{1}{b}\left(a - c_2\right)\left(c_2 - c_1\right) & \text{si } \frac{1}{3}\left(a + 2c_1\right) \leq c_2 \leq \frac{1}{2}\left(a + c_1\right) \\ \frac{1}{4b}\left(a - c_1\right)^2 & \text{si } \frac{1}{2}\left(a + c_1\right) \leq c_2 \end{cases}$$

et

$$\Pi_2^* = \begin{cases} \frac{1}{4b}\left(a - c_2\right)^2 & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{1}{16b}\left(a + 2c_1 - 3c_2\right)^2 & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{3}\left(a + 2c_1\right) \\ 0 & \text{si } \frac{1}{3}\left(a + 2c_1\right) \leq c_2 \leq \frac{1}{2}\left(a + c_1\right) \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}\left(a + c_1\right) \leq c_2 \end{cases}$$

Il est immédiat que le profit de l'entreprise 1 augmente par rapport au jeu simultané tandis que celui de la firme 2 diminue (la comparaison est similaire à celle des quantités).

Finalement, le bien-être social s'écrit :

$$W^* = \begin{cases} \frac{3}{8b}\left(a - c_2\right)^2 & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{1}{32b}\left(15a^2 + 28c_1^2 - 20ac_1 + 23c_2\left(c_2 - \frac{2(5a+18c_1)}{23}\right)\right) & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{3}\left(a + 2c_1\right) \\ \frac{1}{2b}\left(a - c_2\right)\left(a - 2c_1 + c_2\right) & \text{si } \frac{1}{3}\left(a + 2c_1\right) \leq c_2 \leq \frac{1}{2}\left(a + c\right. \\ \frac{3}{8b}\left(a - c_1\right)^2 & \text{si } \frac{1}{2}\left(a + c_1\right) \leq c_2 \end{cases}$$

Après quelques lignes de calcul, la comparaison du bien-être social de Stackelberg avec celui de Cournot conduit à :

$$W^* - W^C = \begin{cases} 0 & \text{si } c_2 \leq 2c_1 - a \\ \frac{1}{288b}\left(a - 2c_1 + c_2\right)\left(7a - 38c_1 + 31c_2\right) & \text{si } 2c_1 - a \leq c_2 \leq \frac{1}{3}\left(a + 2c_1\right) \\ \frac{1}{18b}\left(a + c_1 - 2c_2\right)\left(a - 11c_1 + 10c_2\right) & \text{si } \frac{1}{3}\left(a + 2c_1\right) \leq c_2 \leq \frac{1}{2}\left(a + c_1\right) \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}\left(a + c_1\right) \leq c_2 \end{cases}$$

La figure 3.12 compare dans le plan (c_1, c_2) le bien-être social d'un duopole à la Stackelberg avec le cas où la concurrence est à la Cournot ($\Delta W = W^* - W^C$).

5. La figure 3.13 présente l'évolution du bien-être social lorsque c_2 augmente à c_1 fixé, dans le cas où $\frac{7a}{38} < c_1 < \frac{a}{2}$.
   Lorsque c_2 augmente l'intuition est que le bien-être social doit diminuer : une entreprise est moins efficace, éventuellement une situation de monopole est crée. Toutefois, sur l'intervalle $\frac{5a+18c_1}{23} < c_2 < \frac{a+2c_1}{3}$ un accroissement de c_2 augmente le bien-être social. Un phénomène aussi présent lorsque la

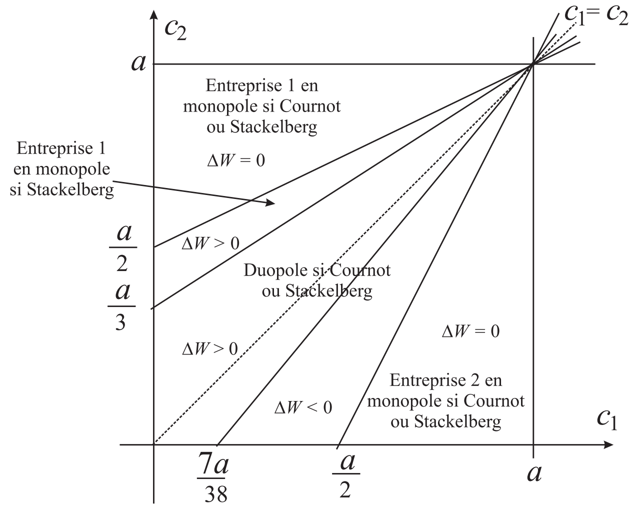


FIG. 3.12 – Bien-être de Stackelberg vs Cournot

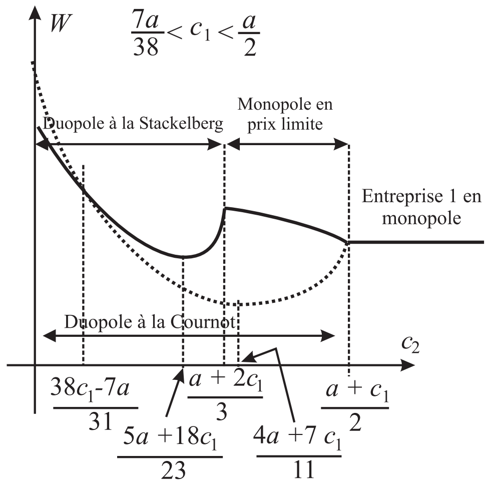


FIG. 3.13 – Variation du bien-être social avec c_2

concurrence est à la Cournot mais sur un intervalle différent. L'explication est que pour ces valeurs de coûts marginaux, une pénalisation de l'entreprise 2 (qui est déjà la moins efficace) permet de faire plus produire l'entreprise 1 qui a un coût marginal suffisamment inférieur pour que l'effet sur le bien-être social soit positif. Finalement si c_2 augmente trop, une situation de monopole apparaît.

3.15 Stackelberg et deux périodes de production**

Objectif de l'exercice : Analyser précisément le choix du leader dans le modèle de Stackelberg (voir l'exercice 3.14) en lui laissant la liberté de produire avant l'autre (pour s'engager) et en même temps que l'autre (pour ne pas s'engager).

Soient deux entreprises produisant avec un coût marginal constant noté c et faisant face à une fonction inverse de demande $P(Q) = \max\{0\,;\, a - bQ\}$, où Q est la quantité totale produite par les deux entreprises, $a \geq 0$, $b \geq 0$ et le marché est rentable : $a > c$. L'entreprise 1 (le leader) a la possibilité de produire une quantité q_1 en première période (mais cette quantité ne sera vendue qu'en fin de seconde période). L'entreprise 2 observe parfaitement la quantité q_1. En seconde période, l'entreprise 1 comme l'entreprise 2 produisent. Soit x_1 (resp. x_2) la quantité produite par la firme 1 (resp. firme 2) en seconde période. Le prix final est $P(q_1 + x_1 + x_2)$.

1. *Déterminer à q_1 fixé les meilleures réponses $x_1^*(q_1, x_2)$ et $x_2^*(q_1, x_1)$ dans le sous-jeu de seconde période.*
2. *Déterminer selon les valeurs de q_1 l'équilibre de Nash du jeu de quantité de seconde période.*
3. *En calculant la valeur de q_1 qui permet au leader de maximiser son profit, déterminer l'équilibre de Nash sous-jeu parfait de ce jeu de concurrence à la Stackelberg.*

Correction

1. Soit $q_1 \geq 0$ fixé. Supposons $q_1 < a/b$, sinon toute production en seconde période conduirait à un prix nul. Les profits des entreprises s'écrivent :

$$\pi_1(q_1, x_1, x_2) = (a - c - bq_1 - bx_1 - bx_2)(x_1 + q_1)$$

et pour l'entreprise 2 :

$$\pi_2(q_1, x_1, x_2) = (a - c - bq_1 - bx_1 - bx_2)\, x_2$$

Les maxima de ces deux paraboles (le milieu des deux racines car la parabole est concave) sont atteints en :

$$x_1^*(q_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{a - c - bq_1 - bx_2}{b} - q_1\right) = \frac{1}{2b}(a - c - 2bq_1 - bx_2)$$

et

$$x_2^*(q_1, x_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{a - c - bq_1 - bx_1}{b} + 0\right) = \frac{1}{2b}(a - c - bq_1 - bx_1)$$

toutefois, cette expression ne correspond à la fonction de meilleures réponses que si $x_2^* \geq 0$. La fonction de meilleure réponse de l'entreprise 2 correctement exprimée s'écrit donc :

$$x_2^*(q_1, x_1) = \max\left\{\frac{1}{2b}(a - c - bq_1 - bx_1)\ ;\ 0\right\}.$$

Pour l'entreprise 1 il faut aussi faire preuve de prudence puisque $a - c - 2bq_1 - bx_2$ peut être négatif :

$$x_1^*(q_1, x_2) = \max\left\{\frac{1}{2b}(a - c - 2bq_1 - bx_2)\ ;\ 0\right\}.$$

2. En oubliant momentanément les contraintes de positivité, les fonctions de meilleures réponses se croisent pour :

$$x_1 = \frac{a - c - 3bq_1}{3b} \text{ et } x_2 = \frac{a-c}{3b}.$$

À l'équilibre l'entreprise 2 choisirait exactement la quantité de Cournot ? Il faut faire attention au signe de $x_1 = \frac{a-c-3bq_1}{3b}$, s'il est positif on a bien caractérisé l'équilibre de Nash dans le sous-jeu mais s'il est négatif, il faut remplacer x_1 par 0 et calculer x_2^* à partir de la fonction de meilleure réponse. Il vient donc :

$$x_1^*(q_1) = \begin{cases} \frac{a-c-3bq_1}{3b} & \text{si } q_1 < \frac{a-c}{3b} \\ 0 & \text{si } q_1 \geq \frac{a-c}{3b} \end{cases} \text{ et } x_2^*(q_1) = \begin{cases} \frac{a-c}{3b} & \text{si } q_1 < \frac{a-c}{3b} \\ \frac{a-c-bq_1}{2b} & \text{si } q_1 \geq \frac{a-c}{3b} \end{cases}$$

L'interprétation de ce résultat est simple : si l'entreprise 1 a produit moins que la quantité de Cournot ($\frac{a-c}{3b}$), le sous-jeu de seconde période est ramené (en quelque sorte) à une concurrence à la Cournot : à l'équilibre, l'entreprise 1 complète sa production de première période afin d'arriver exactement à la quantité de Cournot, tandis que l'entreprise 2 produit la quantité de Cournot. Dans ce cas, l'entreprise 1 n'a aucun avantage à avoir produit en premier : $q_1 = \frac{a-c}{3b}$ est équivalent à $q_1 = 0$. En revanche si l'entreprise 1 a produit plus en première période que cette quantité de Cournot, alors l'entreprise 2 s'adapte en produisant moins que la quantité de Cournot. Dans ce cas, (quel que soit $q_1 > \frac{a-c}{3b}$) l'entreprise 1 ne produit plus en seconde période. En fait, elle souhaiterait réduire sa production (produire une quantité x_1 négative) si cela était possible.

3. Le profit du leader s'écrit :

$$\pi_1(q_1, x_1^*(q_1), x_2^*(q_1)) = \begin{cases} \left(\frac{a-c}{3b}\right) q_1 & \text{si } q_1 < \frac{a-c}{3b} \\ \left(\frac{a-c-bq_1}{2}\right) q_1 & \text{si } q_1 \geq \frac{a-c}{3b} \end{cases}$$

dont la maximisation conduit[7] (demi-somme des deux racines) à

$$q_1^* = \frac{a-c}{2b}$$

[7] Clairement le maximum ne se trouve pas pour $q_1 < \frac{a-c}{3b}$ puisque dans cette zone le profit est strictement croissant en q_1.

d'où se déduit

$$x_1^* = 0 \text{ et } x_2^* = \frac{a-c}{4b}$$

soit le résultat de Stackelberg habituel. Cependant, la résolution (plus complète) du sous-jeu de seconde période a mis en évidence une discontinuité dans l'effet d'engagement : la production de première période ne permet au leader d'augmenter son profit que si elle dépasse $\frac{a-c}{3b}$ la quantité de Cournot.

3.16 Double Stackelberg**

Objectif de l'exercice : Étendre le modèle de von Stackelberg à trois firmes avec trois périodes de choix et donc un leader, un leader partiel et un suiveur.

Soient trois entreprises en concurrence sur un marché où la fonction inverse de demande est $P(Q) = \max\{0\,;\, a - Q\}$, avec $Q = q_1 + q_2 + q_3$. Les coûts marginaux sont normalisés à zéro : $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Résoudre le jeu de concurrence à la Stackelberg-Stackelberg où la firme 1 choisit sa quantité en premier, la firme 2 en second et la firme 3 en troisième.

Correction

Pour résoudre ce jeu, nous procédons par *récurrence arrière* c'est-à-dire que pour tout couple (q_1, q_2) nous déterminons la quantité $q_3^*(q_1, q_2)$ que choisit la firme 3 afin de maximiser son profit. Cette quantité est simplement sa meilleure réponse dans un jeu de concurrence à la Cournot traditionnel. Soit :

$$q_3^*(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(1 - q_1 - q_2).$$

Ensuite nous déterminons pour tout q_1 la quantité qui maximise le profit de l'entreprise 2 qui anticipe que la firme 3 choisira $q_3^*(q_1, q_2)$. Soit la quantité qui maximise le profit :

$$\pi_2(q_1, q_2, q_3^*(q_1, q_2)) = q_2\left(1 - q_1 - q_2 - \frac{1}{2}(1 - q_1 - q_2)\right)$$

d'où

$$q_2^*(q_1) = \frac{1}{2}(1 - q_1).$$

Finalement, il faut déterminer le choix de l'entreprise 1, c'est-à-dire la quantité q_1 qui maximise :

$$\pi_1(q_1, q_2^*(q_1), q_3^*(q_1, q_2^*(q_1))) = \frac{1}{8}q_1(1 - q_1),$$

soit :

$$q_1^* = \frac{1}{2},$$

et donc

$$q_2^* = \frac{1}{4}, \text{ et } q_3^* = \frac{1}{8}.$$

3.17 Choix endogène du leader**

Objectif de l'exercice : Le modèle de von Stackelberg impose une asymétrie *a priori* entre les firmes. Or le profit de la firme qui choisit en premier étant supérieur à celui de celle qui joue en second, les deux firmes désirent être le leader. Toutefois si les deux firmes veulent jouer au leader le résultat peut être défavorable. (Voir l'exercice 4.10 pour la même question lorsque la concurrence est en prix).

Soit un marché où la fonction inverse de demande est exprimée par $P(q_1 + q_2) = \max\{0\,;\,1 - q_1 - q_2\}$, *où* q_1 *(resp.* q_2*) est la quantité choisie par l'entreprise 1 (resp. 2). Les coûts marginaux de production sont supposés constants et sont normalisés à zéro.*

1. *Déterminer les valeurs des profits de 1 et de 2 pour une concurrence à la Cournot puis pour une concurrence à la Cournot-Stackelberg avec 1 ou 2 comme leader.*
2. *Écrire sous forme normale la première étape du jeu où les entreprises choisissent simultanément d'être soit un leader (L) soit un follower (F). Si les deux entreprises font le même choix (L, L) ou (F, F), alors la concurrence est à la Cournot, sinon à la Cournot-Stackelberg. Trouver les équilibres de Nash de ce jeu.*

Correction

1. Lorsque la concurrence est à la Cournot (cf. l'exercice 3.1) les profits s'établissent à $\pi_1^C = \pi_2^C = \frac{1}{9}$. Lorsque la firme 1 est le leader de Stackelberg (cf. l'exercice 3.14) il vient : $\pi_1^S = \frac{1}{8}$ et $\pi_2^S = \frac{1}{16}$.
2. La table 3.3 présente les profits dans chaque configuration (en particulier, lorsque les deux firmes cherchent simultanément à être le leader elles produisent toutes les deux la quantité $\frac{1}{2}$ ce qui conduit à un prix nul).

		E2	
		L	F
E1	L	$(0,0)$	$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$
	F	$\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$

Tab. 3.3 – Choix du leadership

Ce jeu possède deux équilibres de Nash en stratégies pures : (L,F) et (F,L) : une des entreprises devient le leader.

Chapitre 4

Concurrence en prix

Joseph Bertrand (1822-1900) est un mathématicien français[1], il est l'auteur d'un article en 1883 dans le *Journal des savants* où il critique le livre de Cournot (ainsi que celui de Walras sur l'équilibre général[2]). Sa critique de «la concurrence à la Cournot» repose sur le fait simple que les entreprises choisissent des prix simultanément et que les consommateurs achètent là où le prix est le plus bas[3]. Il prouve ainsi que le prix doit être égal au coût marginal (supposé constant) de production. La concurrence en prix (dite à la Bertrand) fournit donc un point de référence qui est très différent de celui produit par la concurrence à la Cournot. Cependant, le modèle de Bertrand repose sur des hypothèses très particulières : absence de contraintes de capacité de production, concurrence limitée à une période, homogénéité parfaite des produits, et enfin information parfaite. Si ces hypothèses sont levées, le prix d'équilibre s'établit (comme chez Cournot) à un niveau strictement supérieur au coût marginal (constant).

Rappel de cours

Dans un modèle de concurrence en prix, la variable stratégique est le prix. L'entreprise i, $i = 1$ à n, choisit le prix p_i auquel elle souhaite vendre sa production. La quantité que peut vendre une firme est limitée par la demande des consommateurs. Du fait de la substituabilité (ou de complémentarité) entre les n produits, la demande, D_i qui s'adresse à la firme i dépend des prix de toutes les autres firmes. Posons $p_{-i} = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n)$, on a :

$$D_i = D_i\left(p_i, p_{-i}\right).$$

[1] Voici sa courte biographie fournie par l'Académie française : Né à Paris, le 11 mars 1822. Entré le premier à l'École normale en 1839, mathématicien, membre de l'Académie des Sciences en 1856, il en devint secrétaire perpétuel en 1874 ; professeur de physique générale et de mathématiques au Collège de France, il a publié divers ouvrages et mémoires scientifiques, et *L'histoire de L'Académie des Sciences et les académiciens de 1666 à 1793*. Élu à l'Académie française le 4 décembre 1884 en remplacement de Jean-Baptiste Dumas, et reçu le 10 décembre 1885 par Louis Pasteur. Mort le 3 avril 1900.

[2] *Théorie mathématique de la richesse sociale.*

[3] Sur le débat entre Bertrand et Cournot voir les références dans la note de bas de page 3 du chapitre 3.

La demande de l'entreprise i décroît avec son prix :

$$\frac{\partial D_i\left(p_i, p_{-i}\right)}{\partial p_i} \leq 0.$$

Si la firme i et la firme j produisent des biens substituables, alors

$$\frac{\partial D_i\left(p_i, p_{-i}\right)}{\partial p_j} \geq 0.$$

En revanche, si la firme i et la firme j produisent des biens complémentaires, alors

$$\frac{\partial D_i\left(p_i, p_{-i}\right)}{\partial p_j} \leq 0.$$

Le profit de la firme i s'écrit :

$$\pi_i\left(p_i, p_{-i}\right) = p_i D_i\left(p_i, p_{-i}\right) - C_i\left(D_i\left(p_i, p_{-i}\right)\right) ,$$

où $C_i\left(.\right)$ est la fonction de coût de l'entreprise i. En général, il est supposé que le coût marginal de production est positif et croissant : soit x une quantité,

$$C_i'\left(x\right) \geq 0, \text{ et } C_i''\left(x\right) \geq 0 \,.$$

Sous l'hypothèse que la fonction π_i est strictement concave en p_i, le prix, $p_i^*\left(p_{-i}\right)$, qui maximise le profit est donné par la condition du premier ordre :

$$D_i\left(p_i, p_{-i}\right) + p_i \frac{\partial D_i\left(p_i, p_{-i}\right)}{\partial p_i} - \frac{\partial D_i\left(p_i, p_{-i}\right)}{\partial p_i} C_i'\left(D_i\left(p_i, p_{-i}\right)\right) = 0 \,.$$

Cette condition se réécrit sous la forme habituelle :

$$\frac{p_i - C_i'\left(D_i\left(p_i, p_{-i}\right)\right)}{p_i} = -\frac{D_i\left(p_i, p_{-i}\right)}{p_i D_i'\left(p_i, p_{-i}\right)} = \frac{1}{\varepsilon_i\left(D_i\right)}$$

où $\varepsilon_i\left(D_i\right)$ l'élasticité prix (par rapport au prix p_i) de la fonction D_i.

Un équilibre de Nash d'un jeu de concurrence en prix est, par définition, un vecteur de prix

$$\left(p_1^*, \, p_2^*, \, \ldots, \, p_i^*, \, \ldots, \, p_n^*\right)$$

tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_1\left(p_1, p_{-1}\right) + p_1 \frac{\partial D_1\left(p_1, p_{-1}\right)}{\partial p_1} & = & \frac{\partial D_1\left(p_1, p_{-1}\right)}{\partial p_1} C_1'\left(D_1\left(p_1, p_{-1}\right)\right) \\ & \vdots & \\ D_i\left(p_i, p_{-i}\right) + p_i \frac{\partial D_i\left(p_i, p_{-i}\right)}{\partial p_i} & = & \frac{\partial D_i\left(p_i, p_{-i}\right)}{\partial p_i} C_i'\left(D_i\left(p_i, p_{-i}\right)\right) \\ & \vdots & \\ D_n\left(p_n, p_{-n}\right) + p_n \frac{\partial D_n\left(p_n, p_{-n}\right)}{\partial p_n} & = & \frac{\partial D_n\left(p_n, p_{-n}\right)}{\partial p_n} C_n'\left(D_n\left(p_n, p_{-n}\right)\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} p_1 = p_1^*\left(p_{-1}\right) \\ \vdots \\ p_i = p_i^*\left(p_{-i}\right) \\ \vdots \\ p_n = p_n^*\left(p_{-n}\right) \end{array}\right.$$

Concurrence à la Bertrand :

Soient n entreprises qui vendent exactement le même bien. Soit $D(p)$ la demande pour ce bien. On note

$$\underline{p_i} = \min\{p_j,\ j = 1 \text{ à } n,\ j \neq i\}.$$

Il est fait l'hypothèse que la fonction de demande de l'entreprise i s'écrit :

$$D_i(p_i, p_{-i}) = \begin{cases} D(p_i) & \text{si } p_i < \underline{p_i} \\ \frac{1}{m} D(p_i) & \text{si } p_i = \underline{p_i} \\ 0 & \text{si } p_i > \underline{p_i} \end{cases}$$

où m correspond au nombre de firmes pratiquant le prix minimum.

À partir de ces fonctions de demandes, on peut déterminer l'équilibre de Nash. Sa caractérisation dépend des coûts marginaux des entreprises (voir l'exercice 4.1).

Les exercices de ce chapitre sont organisés de la manière suivante. Le principe de la concurrence en prix étant très simple. L'exercice 4.1 permet de revoir l'équilibre de Bertrand-Nash dans des configurations élémentaires. L'exercice 4.2 étudie un type de concurrence en prix particulier reposant sur des anticipations du comportement des concurrents différentes de celles de Nash. Dans l'exercice 4.3 des contraintes de capacité sont introduites. L'exercice 4.4 montre que lorsque les consommateurs encourent un coût pour connaître les prix, alors le paradoxe de Bertrand tombe. Les exercices 4.5 à 4.7 explorent le modèle de produits différenciés reposant sur une utilité quadratique des consommateurs. Les exercices 4.8 à 4.12 s'intéressent à l'effet d'engagement en présence de concurrence en prix à travers des modèles à deux périodes.

4.1 Modèle de base*

Objectif de l'exercice : Déterminer l'équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Bertrand entre deux firmes dont les coût marginaux de production sont constants (éventuellement différents). Étudier les conséquences d'un coût fixe de production.

Soit le marché d'un bien homogène, où la demande est donnée par $D(p) = \max\{1-p\ ;\ 0\}$*. Le marché est servi par deux entreprises produisant aux coûts marginaux constants* c_1 *et* c_2*. Déterminer l'issue de la concurrence à la Bertrand (les prix et les profits des entreprises) dans les cas suivants :*

1. $c_1 = c_2 = c \in [0, 1]$ *et sans coût fixe.*
2. $c_1 = 0$, $c_2 = c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *et sans coût fixe.*
3. $c_1 = 0$, $c_2 = c \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ *et sans coût fixe.*
4. $c_1 = c_2 = 0$ *et avec un coût fixe de production* f *pour chaque entreprise qui produit. (On considérera un jeu en deux étapes : premièrement choix simultané de produire ou pas (coûte* f *ou 0), deuxièmement choix simultané de prix.)*

Correction

1. Lorsque les coûts marginaux sont identiques, il s'agit d'un modèle de concurrence à la Bertrand classique. La demande qui s'adresse à la firme 1 en fonction de son prix p_1 et du prix de son concurrent p_2 s'écrit :

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_1) & \text{si } p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}D(p_1) & \text{si } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 \end{cases}$$

L'unique équilibre de Nash du jeu où les firmes choisissent simultanément leur prix est : $p_1^* = p_2^* = c$.

En effet, les consommateurs achètent là où le prix est le moins cher, il est donc immédiat qu'à l'équilibre les prix des deux firmes doivent être égaux (sinon l'entreprise qui a le prix le plus bas augmente son prix ou l'entreprise qui a le prix le plus élevé baisse le sien). Toutefois si les firmes jouaient $p_1 = p_2 = p > c$, elles auraient chacune comme profit : $\frac{1}{2}(p-c)D(p)$. L'un des concurrents augmenterait (doublerait) alors son profit en jouant $p - \varepsilon$ déviation qui suffit à attirer toute la demande. Plus formellement, comme :

$$D_1(p-\varepsilon, p) = D(p-\varepsilon)$$

il vient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \pi_1(p-\varepsilon, p) = \lim_{\varepsilon\to 0}[(p-\varepsilon-c)D(p-\varepsilon, p)] = (p-c)D(p) > \frac{1}{2}(p-c)D(p)$$

ce qui prouve qu'il existe une déviation unilatérale profitable lorsque $p_1 = p_2 = p > c$.
La seule situation sans déviation profitable de la sorte est $p_1^* = p_2^* = c$ puisque dans ce cas une diminution du prix implique que la firme vend à perte.

2. Lorsqu'une entreprise a un avantage de coût marginal et que la concurrence est à la Bertrand, elle peut s'accaparer tout le marché. Pour cela, elle pratique un prix légèrement inférieur au coût marginal de son concurrent. Ici $p_1^* = c - \varepsilon$ avec ε aussi petit qu'on veut et $p_2^* = c$. Le profit de l'entreprise 1 est croissant avec c : $\pi_1^* = c\,(1-c)$ (car $c \leq \frac{1}{2}$), l'entreprise 2 ne fait pas de profit.
3. Lorsque $c \geq \frac{1}{2}$, le même raisonnement s'applique sauf qu'il n'est plus intéressant pour l'entreprise 1 de pratiquer un prix aussi élevé que c. En effet, le prix de monopole de l'entreprise 1 est égal à $\frac{1}{2} < c$. En affichant $p_1^* = \frac{1}{2}$ la firme la plus efficace attire toute la demande et maximise son profit.
4. Lorsqu'il existe un coût fixe de production $0 < f \leq \frac{1}{4}$, une seule entreprise peut produire. En effet, si les deux payent f, le sous-jeu qui suit n'a qu'un seul équilibre : $p_1^* = p_2^* = 0$ et donc cela entraîne un profit de $-f$ pour chaque entreprise. Ce jeu possède donc deux équilibres de Nash en stratégies pures : l'entreprise 1 (resp. 2) paye f, l'entreprise 2 (resp. 1) ne paye pas, puis l'entreprise qui peut produire affiche son prix de monopole. Si $f > \frac{1}{4}$, aucune entreprise ne produit.

4.2 Courbe de demande coudée*

Objectif de l'exercice : Étudier l'équilibre de Nash d'un jeu de concurrence avec demande coudée. Il s'agit d'un modèle très particulier car la fonction de demande prend en compte la réaction de l'autre firme, mais cette réaction n'est pas issue d'un choix stratégique explicite.

Soit un duopole sur un marché où la demande pour un prix p est mesurée par une fonction $D(p)$. Soit $\overline{p}$, un prix particulier tel que chaque entreprise tienne le raisonnement suivant : afficher un prix supérieur à $\overline{p}$ ne changera pas l'attitude du concurrent. En revanche, baisser le prix en dessous de $\overline{p}$ entraînera une baisse similaire du prix de l'autre firme.

1. *Déterminer l'équilibre de Nash de ce jeu.*
2. *Comme illustration, soit la fonction de demande suivante ($\overline{p} = 50$) :*

$$D(p) = \begin{cases} 100 - p & si\ p \leq 50 \\ 0 & si\ p > 50 \end{cases}$$

Déterminer le prix qui maximise le profit d'une entreprise qui fait face à cette demande alors qu'elle a un coût marginal constant de production égal à 0. Calculer de nouveau ce prix lorsque le coût marginal passe à 10.

3. *D'une manière légèrement plus générale, soit la fonction de demande coudée suivante :*

$$D(p) = \begin{cases} \frac{5}{8}(90 - p) & si\ p \leq 50 \\ 75 - p & si\ 75 \geq p \geq 50 \\ 0 & si\ p \geq 75 \end{cases}$$

Représenter dans le plan (quantité, prix) la fonction inverse de demande, le revenu marginal et le coût marginal. Déterminer le prix qui maximise le profit en fonction de c le coût marginal constant de production.

Correction

1. Il résulte des hypothèses faites que si une entreprise augmente son prix au dessus de $\overline{p}$, elle obtient une demande nulle, tandis que si elle affiche un prix $p \leq \overline{p}$, alors elle a une demande $\frac{1}{2}D(p)$. Une justification derrière ces hypothèses peut être la suivante : les entreprises souhaitent préserver leurs parts de marché. Elles imitent donc toute baisse de prix de la concurrence mais restent indifférentes à une hausse.

Chaque entreprise résout le programme de maximisation suivant :

$$\begin{cases} \max_p (p - c) \frac{D(p)}{2} \\ \text{sous contrainte } p \leq \overline{p} \end{cases}$$

dont la solution est $p = \overline{p}$ si $\overline{p} \leq p^m$ et $p = p^m$ si $p^m \leq \overline{p}$. Le prix de monopole est, bien entendu, le prix focal qui permet aux entreprises de réaliser le profit maximal (exactement la moitié du profit de monopole). Le paradoxe de Bertrand est donc levé avec cette approche.

2. Le profit pour $p \leq 50$ s'écrit $p\,(100 - p)$, donc le prix qui le maximise est $p^m = 50$. Lorsque le coût marginal passe à 10, le prix qui maximise la fonction $(p - 10)\,(100 - p)$ est 55. Cependant cette fonction correspond au profit seulement si le prix est inférieur à 50. Donc le prix qui maximise le profit reste 50. Cela illustre le fait que dans un contexte de demande coudée, le prix peut présenter une rigidité à la hausse en cas de choc sur les coûts de production.
3. La figure 4.1 répond à la question. Tout d'abord, il est immédiat que si c

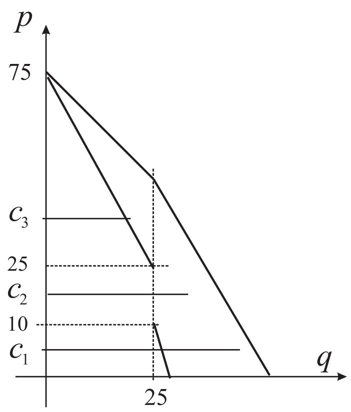


FIG. 4.1 – Une demande coudée entraîne un revenu marginal discontinu

est inférieur à 10 (c_1 sur la figure 4.1) le prix optimal est $\frac{90+c}{2}$, tandis que si c est supérieur à 25 (c_13 sur la figure 4.1), alors le prix optimal est $\frac{75+c}{2}$. En revanche pour $10 < c < 25$ le prix optimal est indéterminé mais compris entre 10 et 25. En supposant que l'indétermination est levée en choisissant le prix le plus faible, le prix reste "bloqué" à 50 tant que le coût marginal est compris entre 10 et 25.

4.3 Capacités de production**

Objectif de l'exercice : Analyser l'impact des capacité de production sur l'équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Bertrand. Montrer que le jeu à deux étapes : choix simultané de capacité puis choix simultané de prix s'interprète comme un jeu de concurrence à la Cournot[4].

Soit le jeu en deux étapes suivant : deux entreprises choisissent simultanément leurs capacités de production notées k_1 et k_2, puis après l'observation de ces capacités fixent simultanément leur prix de vente (respectivement) p_1 et p_2. Une firme avec une capacité k_i ne peut pas produire plus que la quantité k_i. Les consommateurs (qui achètent au maximum une unité) sont caractérisés par leur évaluation pour le bien $v \in \left[0, \frac{a}{b}\right]$ et une fonction d'utilité prenant la valeur $bv-p$ s'ils achètent et zéro sinon.

1. *Montrer que la fonction de demande pour un prix p s'écrit $D(p) = \max\left\{0\,;\, \frac{1}{b}(a-p)\right\}$.*
2. *Lorsque les entreprises affichent des prix différents, tous les consommateurs désirent acheter là où le prix est le plus bas. S'ils ne peuvent pas tous acheter à ce prix (car les capacités de production sont insuffisantes) on dit que les consommateurs sont "rationnés". En supposant que les consommateurs avec les v les plus faibles sont rationnés[5], déterminer et tracer la fonction de demande $D_1(p_1, p_2)$ pour p_2, k_1 et k_2 fixés.*
3. *Une fois les capacités de production installées, les entreprises ont un coût marginal constant de production normalisé à zéro. En supposant que $k_i \leq \frac{a}{3b}$, c'est-à-dire que les entreprises n'ont pas installé trop de capacités, montrer que le couple (p^*, p^*) avec $p^* = a - b(k_i + k_j)$ forme un équilibre de Nash du jeu de concurrence en prix.*
4. *En utilisant le résultat précédent, déterminer les choix de capacités de première étape. Le coût d'installation des capacités de production est noté c_0.*

Correction

1. Un consommateur ne souhaite acheter que si son utilité en achetant est positive ou nulle, c'est-à-dire si $v \geq \widetilde{v} = \frac{p}{b}$. Comme chaque consommateur n'achète au plus qu'une unité, la fonction de demande est donc

$$D(p) = \int_{\frac{p}{b}}^{\frac{a}{b}} dv = \frac{a}{b} - \frac{p}{b},$$

pour tout $0 \leq p \leq a$ et $D(p) = 0$ pour $p > a$.

[4]Cet exercice s'inspire de la section 5.3 du livre de Jean Tirole *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press, 1988. Voir aussi Kreps and Scheinkman "Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes", 1983, *Bell Journal of Economics*, 14, pp. 111-122.

[5]Il s'agit de la règle de rationnement dite efficace. En effet, les consommateurs servis sont ceux qui ont l'utilité la plus élevée pour le bien, cela maximise donc le surplus.

2. La demande qui s'adresse à l'entreprise 1 dépend de p_1, p_2, k_2 mais pas de k_1. La demande qu'elle pourra effectivement servir sera évidemment bornée par k_1.

   Le cas le plus simple survient lorsque $p_1 < p_2$, tous les consommateurs souhaitant acheter à l'entreprise 1 il vient que $D_1(p_1, p_2) = D(p_1)$.

   En revanche, si $p_1 > p_2$ tous les consommateurs préfèrent acheter à l'entreprise 2. Cependant si k_2 n'est pas suffisant, certains ne pourront pas le faire. Définissons $\frac{\overline{p_2}}{b}$ comme l'évaluation la plus basse parmi tous les consommateurs qui sont servis par l'entreprise 2. Il est immédiat que $\overline{p_2} = \max\{p_2, a - bk_2\}$. Si p_1 est supérieur à $\overline{p_2}$, la demande résiduelle de la firme 1 est nulle. Si $p_2 < p_1 \leq \overline{p_2}$, la demande résiduelle est donnée par $\int_{\frac{p_1}{b}}^{\frac{\overline{p_2}}{b}} dv = \frac{1}{b}(\overline{p_2} - p_1)$.

   Enfin, si $p_1 = p_2$, les consommateurs se répartissent de manière équiprobable entre les deux firmes et deux cas de figure se présentent. Premièrement, si $k_2 \geq \frac{1}{2}D(p_1)$, alors $D_1(p_1, p_2) = \frac{1}{2}D(p_1)$. Deuxièmement, si $k_2 < \frac{1}{2}D(p_1)$, alors $D_1(p_1, p_2) = D(p_1) - k_2$.

   En résumé,

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_1) & \text{si } p_1 < p_2 \\ \max\left\{\frac{1}{2}D(p_1)\ ;\ D(p_1) - k_2\right\} & \text{si } p_1 = p_2 \\ \max\left\{0\ ;\ \frac{\overline{p_2} - p_1}{b}\right\} & \text{si } p_1 > p_2 \end{cases}$$

   La figure 4.2 illustre cette fonction de demande.

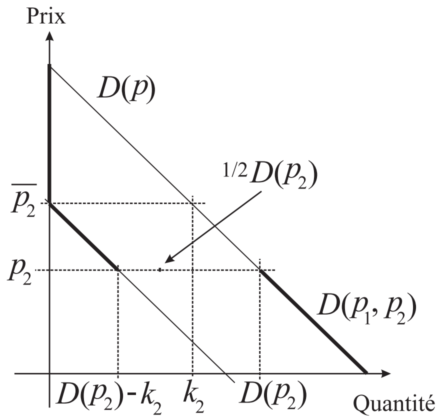


FIG. 4.2 – Fonction de demande avec rationnement efficace

3. Tout d'abord, il est clair que la fonction inverse de demande étant $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$, il est inutile de dévier vers un prix inférieur : lorsque les deux firmes vendent à p^* la demande totale est $k_i + k_j$ et donc chaque firme produit à pleine capacité, baisser le prix crée juste une demande impossible à satisfaire.

   Supposons plutôt qu'une entreprise dévie vers un prix plus élevé. Soit la situation $p_i = p > p^* = p_j$, l'entreprise j produit à pleine capacité et l'entreprise i fait face à la demande résiduelle $q_i = \frac{1}{b}(a - bk_j - p)$, puisque que la firme j sert les consommateurs ayant les valuations les plus élevées[6]. Le

[6] Notons l'analogie avec le modèle de Stackelberg : si la firme j vend k_j, la firme i fait face à un prix $p = a - bk_j - bq_i$ lorsqu'elle choisit une quantité q_i d'où $q_i = \frac{1}{b}(a - bk_j - p)$.

profit de l'entreprise i s'écrit donc

$$p\frac{1}{b}\left(a - bk_j - p\right),$$

il est maximum pour

$$p = \frac{a - bk_j}{2}.$$

Or,

$$\frac{a - bk_j}{2} \leq p^* \Leftrightarrow 0 \leq a - 2bk_i - bk_j$$

en utilisant le fait que $k_i \leq \frac{a}{3b}$ il vient bien que cette condition est vérifiée. La firme i n'a donc pas intérêt à dévier vers un prix $p > p^*$, ce qui termine notre démonstration sur l'équilibre de Nash du sous-jeu commençant en seconde période.

4. Nous pouvons maintenant résoudre le jeu de première période (choix de capacité).
   Le profit de la firme i s'écrit :

   $$\left(a - b\left(k_1 + k_2\right)\right)k_i - c_0 k_i,$$

   soit encore

   $$\left(a - c_0 - b\left(k_i + k_j\right)\right)k_i,$$

   où nous reconnaissons une fonction de profit de type Cournot et donc les capacités d'équilibres sont

   $$k_i = k_j = \frac{a - c_0}{3b}.$$

   Elles sont bien inférieures à $\frac{a}{3b}$ et les profits d'équilibres sont les profits de Cournot

   $$\Pi_i = \Pi_j = \frac{1}{9b}\left(a - c_0\right)^2 > 0.$$

   Ce résultat (qui peut s'obtenir sans hypothèse limitant les k_i *a priori* ainsi que pour des fonctions de demande et de coût plus générales mais au prix de complications qui nous feraient sortir du cadre de cet exercice) est très important car il donne une fondation au modèle de Cournot et permet d'interpréter les choix de quantités comme des choix de capacité. Le modèle de Cournot est souvent perçu en économie industrielle comme une forme réduite d'un jeu en deux étapes : choix de capacités puis choix de prix.

4.4 Paradoxe de Diamond**

Objectif de l'exercice : Lorsque les consommateurs subissent un coût pour connaître le prix pratiqué par une entreprise, la concurrence est moins vive qu'en information parfaite. En effet, si les consommateurs ne sont pas informés parfaitement de tous les prix, une baisse de prix par une firme ne va pas attirer vers elle toute la demande comme dans la concurrence à la Bertrand.

En général les consommateurs ignorent les prix des biens avant d'être dans le magasin. Normalisons à zéro le coût d'aller à l'un des deux magasins et supposons que pour se rendre ensuite au second, un consommateur doit payer un coût $\delta > 0$. Soit $D(p)$ la demande. Lorsqu'un consommateur connaît les deux prix, il achète au magasin le plus compétitif.

1. *Dans ce contexte supposons qu'il existe un équilibre de Nash de la forme : $p_1^* = p_2^* = p \geq c$. À l'équilibre comment se répartit la demande entre les deux magasins ? Existe-t-il des consommateurs qui payent le coût δ ?*
2. *Supposons toujours qu'il existe un équilibre de Nash de la forme : $p_1^* = p_2^* = p \geq c$. Une déviation unilatérale vers $p - \varepsilon$ est-elle profitable ? Une déviation unilatérale vers $p + \varepsilon$ est-elle profitable ?*
3. *Déterminer les prix d'équilibre.*

Correction

1. Lorsque les prix sont égaux, il est usuel de supposer que chaque firme reçoit la moitié de la demande. Comme l'équilibre de Nash est connaissance commune, les consommateurs "connaissent" le prix d'équilibre et sont indifférent entre aller à l'un ou à l'autre magasin donc ils n'ont aucun intérêt à payer le coût δ.
2. Tout d'abord, une déviation vers un prix inférieur à p n'est pas profitable. En effet, comme par hypothèse aucun consommateur ne peut l'observer (avant d'être au magasin), les consommateurs continuent à choisir aléatoirement leur magasin. Ceux qui arrivent au magasin qui a baissé son prix, apprennent la bonne nouvelle tandis que ceux qui ont choisi l'autre magasin ne le suspectent pas et n'ont aucune raison de changer de magasin. Une déviation vers un prix inférieur au prix auquel s'attendent les consommateurs crée une perte sur les consommateurs déjà présents et n'attire aucun nouveau consommateur. Supposons maintenant que la firme 1 dévie vers $p+\varepsilon$, avec $0 < \varepsilon \leq \delta$. Cette déviation ne pousse aucun consommateur à aller acheter à l'autre entreprise où il s'attend[7] à ce que le prix soit p. Il s'agit donc d'une déviation profitable si $p + \varepsilon \leq p^m$ puisqu'elle permet à la firme 1 de "monopoliser" sa demande[8].

[7]Dans la logique de l'équilibre de Nash, seules les déviations unilatérales sont testées.

[8]En effet le profit $\frac{1}{2}(p-c)D(p)$ est maximum pour p^m.

3. Si $p_1^* = p_2^* = p^m$, une hausse de prix n'est plus profitable (même si elle ne pousse aucun consommateur vers l'autre magasin) et il s'agit d'un équilibre de Nash. La preuve se déroule à l'inverse de celle du paradoxe de Bertrand. Une firme a intérêt à dévier vers le haut ! Il s'agit du paradoxe de Diamond du nom d'un économiste américain[9].

[9]Peter Diamond, "A model of price adjustment", *Journal of Economic Theory*, 1971, pp. 156-68.

4.5 Produits différenciés et concurrence en prix**

Objectif de l'exercice : Étudier la concurrence en prix entre les producteurs de deux biens différenciés. Le cadre est celui d'un consommateur représentatif avec une fonction d'utilité quadratique dont l'avantage est de conduire à des fonctions de demande affines par rapport aux prix.

Soient deux entreprises en concurrence sur un marché, où les consommateurs (dont la masse totale est normalisée à 1) ont tous une fonction d'utilité du type

$$U \equiv a\left(q_1+q_2\right)-\sigma q_1 q_2-\frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2\right)+M$$

où $M = R - p_1q_1 - p_2q_2$, avec $a > 0$, et $-1 < \sigma < 1$ (de telle sorte que la fonction U soit concave). Cette fonction n'est définie que sur les couples (q_1, q_2) où elle est croissante en q_1 et en q_2.

1. *Montrer que la fonction de demande de chaque entreprise est de la forme*

$$q_i=\frac{a}{1+\sigma}-\frac{1}{1-\sigma^2} p_i+\frac{\sigma}{1-\sigma^2} p_j$$

   $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$ dans le cas où les deux demandes sont strictement positives.

2. *L'entreprise i produit avec un coût marginal constant noté c_i. Déterminer et tracer les fonctions de meilleures réponses de chaque firme.*
3. *Calculer les prix, les quantités et les profits à l'équilibre. Étudier en particulier si les deux entreprises ont intérêt à produire ou pas.*

Correction

1. Un consommateur qui maximise U résout le système des conditions du premier ordre (solutions intérieures $q_1 > 0$ et $q_2 > 0$) :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial q_1}=a-\sigma q_2-q_1-p_1=0 \\ \\ \dfrac{\partial U}{\partial q_2}=a-\sigma q_1-q_2-p_2=0\end{cases}$$

   qui conduit à

$$q_i=\frac{a}{1+\sigma}-\frac{1}{1-\sigma^2} p_i+\frac{\sigma}{1-\sigma^2} p_j$$

   $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$. La quantité q_i que peut vendre l'entreprise i dépend (négativement) de son prix p_i et positivement (ou négativement selon le signe de σ) du prix de son concurrent. Le cas $\sigma > 0$ correspond à des biens substituts (consommer plus de bien 1 pousse à moins consommer de bien 2), tandis que $\sigma < 0$ signifie que les biens sont complémentaires (consommer plus de bien 1 pousse à consommer plus de bien 2)[10].

[10] La dérivée croisée $\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} = -\sigma$.

2. Avec des coûts marginaux constants le profit de l'entreprise i s'écrit :

$$\Pi_i = (p_i - c_i)\left(\frac{a}{1+\sigma} - \frac{1}{1-\sigma^2}p_i + \frac{\sigma}{1-\sigma^2}p_j\right)$$

La fonction de meilleures réponses s'obtient directement, en utilisant la demi somme des deux racines,

$$p_i^*(p_j) = \frac{1}{2}\left(c_i + a(1-\sigma) + \sigma p_j\right).$$

Elles sont représentées sur la figure 4.3 dans le cas de biens substituts ($\sigma > 0$).

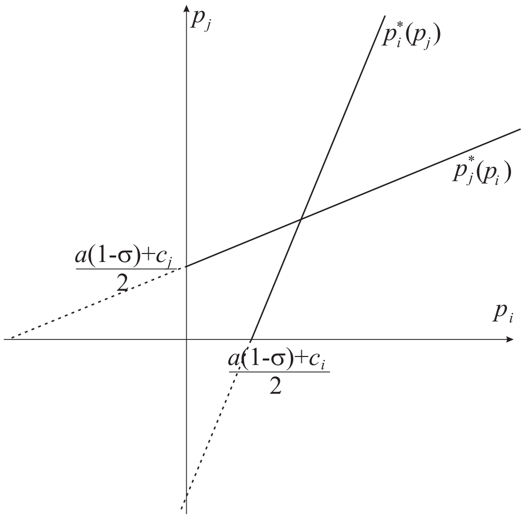


FIG. 4.3 – Fonctions de réactions en prix

3. Pour obtenir les prix d'équilibre, il faut résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} p_i = \frac{1}{2}\left(c_i + a(1-\sigma) + \sigma p_j\right) \\ p_j = \frac{1}{2}\left(c_j + a(1-\sigma) + \sigma p_i\right) \end{cases}$$

d'où il découle immédiatement que

$$p_i^* = \frac{a(2-\sigma-\sigma^2) + 2c_i + \sigma c_j}{4-\sigma^2}.$$

La quantité d'équilibre q_i^* s'en déduit

$$q_i^* = \frac{a(2-\sigma-\sigma^2) - (2-\sigma^2)c_i + \sigma c_j}{(4-\sigma^2)(1-\sigma^2)}$$

puis la valeur du profit à l'équilibre (lorsque les deux firmes produisent) :

$$\Pi_i^* = \frac{\left(a(2-\sigma-\sigma^2) - (2-\sigma^2)c_i + \sigma c_j\right)^2}{(4-\sigma^2)^2(1-\sigma^2)}$$

Les profits et les prix vérifient les propriétés naturelles comme : le profit d'une entreprise décroît avec son coût marginal et croît avec le coût marginal de son concurrent.

Enfin, une entreprise n'a pas intérêt à produire lorsque sa marge est négative à l'équilibre :

$$p_i^* - c_i < 0 \Leftrightarrow c_i > a\frac{(1-\sigma)(2+\sigma)}{2-\sigma^2} + \frac{\sigma}{2-\sigma^2}c_j$$

La figure 4.4 présente dans le plan c_i, c_j les zones dans lesquelles il y un duopole ou un monopole à l'équilibre.

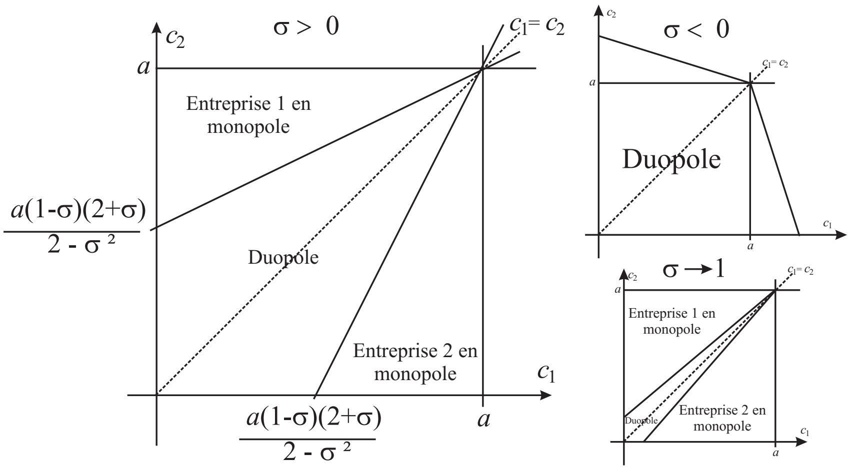


FIG. 4.4 – Type d'équilibre selon les coûts marginaux

Dans le cas de biens substituts ($\sigma > 0$), il faut que les entreprises aient des coûts marginaux proches pour qu'un duopole se maintienne. Plus σ se rapproche de 1 ($\sigma = 1$ est vu comme une concurrence à la Bertrand) et plus les coûts marginaux doivent être proche pour que les deux entreprises produisent. En revanche pour $\sigma < 0$ (biens complémentaires), une entreprise dont le coût marginal dépasse 1 (et qui donc ne pourrait pas produire si elle était seule) peut éventuellement produire si son concurrent est efficace.

4.6 Maximisation en prix ou en quantité**

Objectif de l'exercice : D'un point de vue formel, la concurrence à la Cournot suppose que les firmes choisissent des quantités, alors que la concurrence à la Bertrand repose sur des choix de prix. Toutefois, les biens sont homogènes dans les deux cas. On étudie ici les choix de prix ou de quantités avec des biens différenciés.

Soient deux entreprises qui se livrent une concurrence (en prix ou en quantité) et dont les fonctions de demande sont

$$q_i = \max\left\{0\,;\ \frac{a}{1+\sigma} - \frac{1}{1-\sigma^2}p_i + \frac{\sigma}{1-\sigma^2}p_j\right\}$$

$i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$. *Les entreprises ont des coûts marginaux de production identiques* $c_1 = c_2 = c$.

1. *Déterminer les prix* p_i^* *d'équilibre lorsque les entreprises choisissent simultanément leur prix. En déduire les quantités* q_i^* *vendues à l'équilibre ainsi que les profits.*
2. *Déterminer les fonctions inverses de demande, et écrire les profits en fonction des quantités. Représenter graphiquement les fonctions de réactions du jeu de concurrence en prix et celles du jeu de concurrence en quantité.*
3. *Déterminer l'équilibre de Nash du jeu où les firmes choisissent simultanément leur quantité.*
4. *Comparer "l'équilibre en quantité" avec "l'équilibre en prix"*

Correction

1. Donnons rapidement (voir l'exercice 4.5) les valeurs des différentes grandeurs à l'équilibre de Nash

$$p_i^* = \frac{a+c-a\sigma}{2-\sigma}, \qquad q_i^* = \frac{a-c}{2+\sigma-\sigma^2}$$

et le profit

$$\Pi_i^* = \frac{(1-\sigma)(a-c)^2}{(1+\sigma)(2-\sigma)^2}.$$

2. En inversant le système de fonctions de demandes nous obtenons les équations des fonctions de demandes inverses :

$$\begin{cases} p_i = a - q_i - \sigma q_j \\ p_j = a - \sigma q_i - q_j \end{cases}$$

Fonctions inverses de demande qui ont une saveur de Cournot. Le profit de la firme i s'écrit donc "en quantité"

$$(p_i - c)\,q_i = (a - c - q_i - \sigma q_j)\,q_i$$

ce qui conduit à des fonctions de réactions en quantité[11]

$$\widehat{q}_i\left(q_j\right) = \frac{1}{2}\left(a - c - \sigma q_j\right).$$

Les figures 4.5 et 4.6 mettent en parallèle les fonctions de réactions du jeu en prix et en quantité selon le signe de σ.

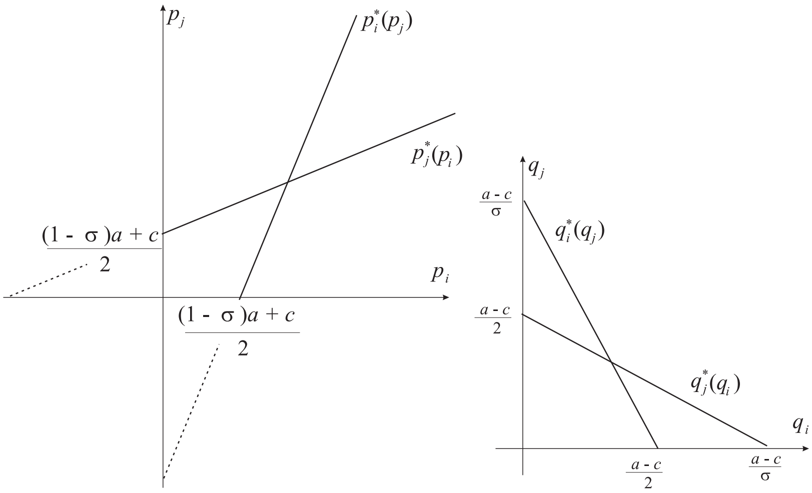


FIG. 4.5 – Fonctions de réactions pour $\sigma > 0$

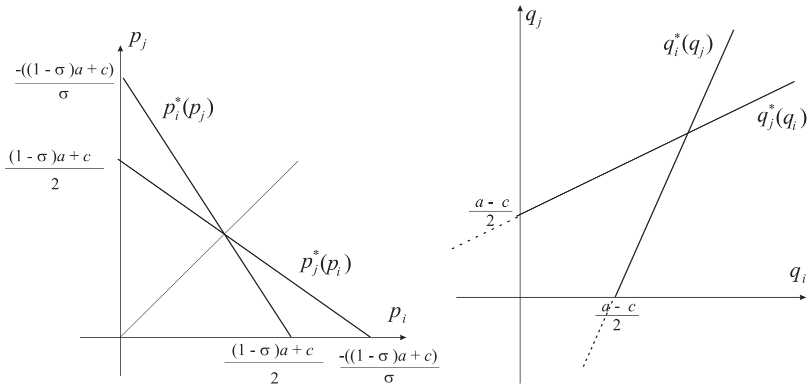


FIG. 4.6 – Fonctions de réactions pour $\sigma < 0$

3. L'équilibre de Nash du jeu de concurrence en quantité est donc caractérisé par les grandeurs

$$\widehat{q}_i = \frac{a - c}{2 + \sigma},$$

et donc le prix de la firme i s'établit à

$$\widehat{p}_i = \frac{a + c + c\sigma}{2 + \sigma}$$

et le profit de l'entreprise i prend la valeur

$$\widehat{\Pi}_i = \left(\frac{a - c}{2 + \sigma}\right)^2.$$

[11]Toujours le milieu des deux racines !

4. Un calcul élémentaire montre que

$$\widehat{p_i} - p_i^* > 0 \Leftrightarrow \sigma^2 (a - c) > 0,$$

c'est-à-dire que le prix est toujours plus élevé lorsque la concurrence est en prix plutôt qu'en quantité. De manière similaire,

$$q_i^* > \widehat{q_i}.$$

Qu'en est-il des profits ? Il apparaît que

$$\widehat{\Pi}_i > \Pi_i^* \Leftrightarrow 2\sigma (1 + \sigma) > 0,$$

c'est-à-dire que l'entreprise préfère la concurrence en quantité lorsque $\sigma > 0$ mais la concurrence en prix si $\sigma < 0$. Le profit est plus élevé lorsque les fonctions de réactions sont décroissantes.

4.7 Variation des coûts**

Objectif de l'exercice : Étudier l'impact d'une variation du coût marginal de production sur le profit d'une firme lorsque la concurrence est en prix (cet exercice est à mettre en parallèle avec l'exercice 3.10 où la concurrence est à la Cournot).

Soient deux entreprises qui se livrent une concurrence en prix et dont les fonctions de demande sont

$$q_i = \max\left\{0\,;\ \frac{a}{1+\sigma} - \frac{1}{1-\sigma^2}p_i + \frac{\sigma}{1-\sigma^2}p_j\right\}$$

$i \neq j$, $i,j \in \{1,2\}$. *Les entreprises ont des coûts marginaux de production identiques* $c_1 = c_2 = c$.

1. *Supposons que le coût marginal de la firme i diminue de c à* $c - \widehat{\varepsilon}$ *avec* $\widehat{\varepsilon} > 0$. *Tracer les fonctions de réactions avant et après cette réduction. Déterminer l'impact de cette variation de coût sur l'équilibre.*
2. *Même question si le coût marginal de la firme i augmente de c à* $c + \widetilde{\varepsilon}$ *avec* $\widetilde{\varepsilon} > 0$.
3. *Selon les valeurs de* $\widehat{\varepsilon}$ *et de* $\widetilde{\varepsilon}$, *déterminer si une entreprise préfère voir son coût marginal diminuer ou bien le coût marginal de son concurrent augmenter.*

Correction

1. Avant la réduction du coût marginal, la fonction de réaction, $p_i^*(p_j)$, de l'entreprise i s'écrit : $\frac{1}{2}((1-\sigma)a + c + \sigma p_j)$. Après la réduction, cette fonction devient $\widehat{p_i}(p_j) = p_i^*(p_j) - \frac{\widehat{\varepsilon}}{2}$. Comme le montre le graphique 4.7, les prix d'équilibres diminuent tous les deux pour des biens substituts, tandis que pour des compléments p_i diminue mais p_j augmente. Un calcul élémentaire montre que le prix de l'entreprise i est davantage réduit que celui de son concurrent.
$$\widehat{p_i} = p_i^* - \frac{2}{4-\sigma^2}\widehat{\varepsilon}, \quad \widehat{p_j} = p_j^* - \frac{\sigma}{4-\sigma^2}\widehat{\varepsilon}.$$
en utilisant la formule
$$\widehat{q_i} = \frac{a}{1+\sigma} - \frac{1}{1-\sigma^2}\widehat{p_i} + \frac{\sigma}{1-\sigma^2}\widehat{p_j},$$
et la formule symétrique pour j, il vient que
$$\widehat{q_i} = q_i^* + \frac{2-\sigma^2}{(1-\sigma^2)(4-\sigma^2)}\varepsilon, \quad \widehat{q_j} = q_j^* - \frac{\sigma}{(1-\sigma^2)(4-\sigma^2)}\varepsilon$$
La quantité vendue par i augmente tandis que celle écoulée par j diminue si $\sigma > 0$ et augmente si $\sigma < 0$. Pour les variations de profits, il est facile de

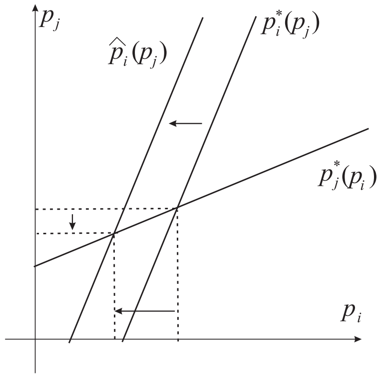


FIG. 4.7 – Réduction de c_i (biens substituts : $\sigma > 0$)

vérifier que le profit de la firme i dont le coût diminue augmente toujours. Le profit de la firme j son concurrent diminue lorsque les biens sont substituts ($\sigma > 0$) et augmente s'ils sont compléments ($\sigma < 0$). En effet :

$$\widehat{\Pi}_i = \left(1-\sigma^2\right)\left(\widehat{q}_i\right)^2 > \left(1-\sigma^2\right)\left(q_i^*\right)^2 = \Pi_i^*$$

et le même raisonnement s'applique pour la firme j.

Sur le plan du bien-être, comme $2-\sigma^2 > \sigma$, il est clair que même lorsque $\sigma > 0$, la somme des profits augmente suite à la réduction des coûts. Pour le surplus des consommateurs, si les biens sont substituts, les deux prix baissent donc le surplus augmente. Il en résulte que le bien-être augmente.

2. Les calculs sont identiques à ceux de la question précédente. Il suffit de remplacer $\widehat{\varepsilon}$ par $-\widetilde{\varepsilon}$. Les prix des deux entreprises augmentent donc, la quantité et le profit de l'entreprise i diminuent. La quantité et le profit de la firme j augmentent (resp. diminuent) si $\sigma > 0$ (resp. $\sigma < 0$).

3. Dans le cas de biens substituts, le profit de l'entreprise i augmente de manière similaire lorsque le coût marginal de son concurrent augmente (en revanche les prix d'équilibres augmentent tous les deux). Imaginons que c_j passe à $c_j + \widetilde{\varepsilon}$. Par symétrie avec les calculs que nous venons d'effectuer l'entreprise i préfère voir diminuer ses coûts plutôt que de voir les coûts de son rival augmenter si
$$\frac{\widehat{\varepsilon}}{\widetilde{\varepsilon}} > \frac{\sigma}{2-\sigma^2}.$$
En particulier, si $\widehat{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}$, alors la firme préfère voir son coût marginal diminuer plutôt que de voir celui de son concurrent augmenter.

4.8 Choix de prix non simultané**

Objectif de l'exercice : La différence entre le modèle de concurrence à la Stackelberg et à la Cournot est que dans le second les firmes choisissent simultanément leur quantité alors que dans le premier ces choix sont séquentiels. On étend ici cette distinction aux choix de prix[12].

Soient deux entreprises qui se livrent une concurrence en prix et dont les fonctions de demande sont

$$q_i = \max\left\{0\,;\, \frac{a}{1+\sigma} - \frac{1}{1-\sigma^2}p_i + \frac{\sigma}{1-\sigma^2}p_j\right\}$$

$i \neq j$, $i,j \in \{1,2\}$. *Les entreprises ont des coûts marginaux de production identiques* $c_1 = c_2 = c$. *On suppose que l'entreprise* i *choisit son prix la première. L'entreprise* j *observe ce prix et détermine le sien.*

1. *À* p_i *fixé, déterminer la valeur de* p_j *qui maximise le profit de l'entreprise* j.
2. *Déterminer l'équilibre de Nash sous-jeux parfait de ce jeu à deux étapes. Comparer avec l'équilibre d'un jeu simultané.*
3. *L'entreprise* i *a-t-elle intérêt à jouer en premier ?*

Correction

1. Il s'agit exactement de la définition de la fonction de meilleure réponse.

$$p_j^*(p_i) = \frac{1}{2}\left((1-\sigma)a + c + \sigma p_i\right).$$

2. La valeur de p_i qui maximise le profit de l'entreprise i s'obtient sachant que $p_j = p_j^*(p_i)$. Soit

$$\max_{p_i} \frac{(p_i - c)}{2(1-\sigma^2)}\left(a\left(2-\sigma-\sigma^2\right) + \sigma c - \left(2-\sigma^2\right)p_i\right).$$

Le milieu des deux racines nous conduit à

$$p_i^S = \frac{a(2-\sigma-\sigma^2) + c(2+\sigma-\sigma^2)}{2(2-\sigma^2)}.$$

Montrons que ce prix est supérieur au prix d'équilibre lors d'un choix simultané, $p_i^* = \frac{a(1-\sigma)+c}{2-\sigma}$. En effet,

$$p_i^S - p_i^* = \frac{(a-c)(1-\sigma)\sigma^2}{2(2-\sigma)(2-\sigma^2)} > 0$$

[12]Sur ce thème voir l'article “First Mover and Second Mover Advantages” d'Esther Gal-Or dans *the International Economic Review*, Vol. 26, No. 3. (Oct., 1985), pp. 649-653.

Comme la fonction $p_j^*(p_i)$ est strictement croissante en p_i (lorsque $\sigma > 0$), il en résulte aussi que

$$p_j^S = p_j^*\left(p_i^S\right) > p_j^*\left(p_i^*\right) = p_j^*,$$

tandis que l'inverse est vrai si $\sigma < 0$.
Le calcul des profits conduit à

$$\Pi_i^S = \frac{\left(2-\sigma-\sigma^2\right)\left(2+\sigma\right)\left(a-c\right)^2}{8\left(1+\sigma\right)\left(2-\sigma^2\right)},$$

et à

$$\Pi_j^S = \frac{\left(a-c\right)^2\left(1-\sigma\right)\left(4+2\,\sigma-\sigma^2\right)^2}{16\,\left(1+\sigma\right)\,\left(2-\sigma^2\right)^2},$$

que nous pouvons comparer aux profits $\Pi_i^* = \Pi_j^* = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\left(\frac{a-c}{2-\sigma}\right)^2$. Tout d'abord

$$\frac{\Pi_i^S}{\Pi_i^*} = \frac{\left(4-\sigma^2\right)^2}{8\,\left(2-\sigma^2\right)} > 1,$$

le profit du leader augmente (quel que soit le signe de σ). Ensuite

$$\frac{\Pi_j^S}{\Pi_j^*} = \frac{\left(8-4\,\sigma^2+\sigma^3\right)^2}{16\left(2-\sigma^2\right)^2},$$

or, $8-4\sigma^2+\sigma^3 > 8-4\sigma^2 \Leftrightarrow \sigma > 0$. Donc le profit du follower augmente dans le cas de biens substituts et diminue dans le cas de biens complémentaires. Le premier résultat diffère du modèle de Cournot-Stackelberg dans lequel le follower voit son profit diminuer.

3. Dans le cas $\sigma > 0$. Nous avons

$$\frac{\Pi_i^S}{\Pi_j^S} = \frac{2\left(2+\sigma\right)^2\,\left(2-\sigma^2\right)}{\left(4+2\,\sigma-\sigma^2\right)^2} < 1$$

en effet, $\left(4+2\sigma-\sigma^2\right)^2 - 2\left(2+\sigma\right)^2\left(2-\sigma^2\right)$ se simplifie en $\sigma^3\left(4+3\sigma\right)$ qui est bien toujours positif pour $\sigma \in [0,1[$. Il en résulte que si les deux firmes gagnent à la présence d'un leader, le follower gagne davantage que le leader. Cela pose un problème de choix de leader inverse de celui qui apparaît dans le modèle de Cournot-Stackelberg bien entendu.

4.9 Incitation à réduire les coûts**

Objectif de l'exercice : La concurrence à la Bertrand entre deux firmes identiques conduit à des profits nuls (en présence de coûts marginaux constants). En revanche si une firme possède un avantage en termes de coût marginal, elle réalise un profit strictement positif. Clairement les firmes ont une forte incitation à réduire (unilatéralement) leur coût marginal de production.

Soit le marché d'un bien homogène servi pour deux entreprises a priori identiques produisant au coût marginal constant $0 < c < \frac{1}{2}$ *et sans coût fixe. La demande est donnée par* $D(p) = \max\{0\,;\,1-p\}$.

1. *Rappeler le résultat d'une concurrence à la Bertrand sur un tel marché. Quelles sont les hypothèses sur lesquelles reposent ce résultat ?*
2. *Une innovation technologique fait son apparition sur ce marché, elle permet de réduire le coût marginal à* 0. *En* $t = 0$, *chaque entreprise peut acquérir (choix simultané) cette nouvelle technique de production moyennant un coût fixe* $f > 0$. *En* $t = 1$, *les entreprises (qui sont maintenant éventuellement asymétriques) se livrent une concurrence à la Bertrand. En notant "A" la stratégie qui consiste à acquérir la nouvelle technologie et "G" celle de garder la vieille technologie et en utilisant la* récurrence arrière, *représenter la première étape de ce jeu sous forme normale.*
3. *En fonction de la valeur du paramètre* f, *déterminer les équilibres de Nash de ce jeu.*
4. *Comparer les équilibres obtenus à la question précédente avec les choix d'investissement optimaux du point de vue du bien-être social.*

Correction

1. L'unique équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Bertrand est $p_1^* = p_2^* = c$. Le modèle de Bertrand repose sur au moins quatre hypothèses :
   (a) Les entreprises peuvent toujours servir la demande qui s'adresse à elles. En d'autres termes, elles n'ont pas de contraintes de capacités.
   (b) Le jeu est statique : les entreprises se font concurrence sur une période puis tout s'arrête. Dans la réalité les entreprises se font concurrence sur une longue période de temps, donc sur plusieurs périodes.
   (c) Le bien est homogène et donc les consommateurs sont indifférents entre les deux fournisseurs.
   (d) L'information est parfaite : tous les consommateurs connaissent tous les prix et les entreprises connaissent la demande et les coûts de leurs concurrents.
2. Commençons par résoudre les différents sous-jeux possibles. Notons $\pi_i\,(c_i, c_j)$ le profit de l'entreprise i dont le coût marginal est c_i tandis que celui de son concurrent est c_j. Si les deux entreprises achètent la nouvelle technologie,le

résultat de Bertrand prévaut et donc $\pi_i(0,0) = 0 - f$. Si une seule entreprise acquière la technologie, elle pratique un prix légèrement inférieur à c et elle obtient toute la demande, on a donc $\pi_i(0,c) = c(1-c) - f$ (rappelons que $c < \frac{1}{2}$). Finalement, si aucune firme n'achète la nouvelle technologie on a : $\pi_i(c,c) = 0$.

Ce jeu se ramène donc à un jeu en une seule étape, décrit dans la table 4.1.

		E2	
		A	G
E1	A	$(-f,-f)$	$(c(1-c)-f, 0)$
	G	$(0, c(1-c)-f)$	$(0,0)$

Tab. 4.1 – Réduire ou pas les coûts

3. Si $f > c(1-c)$ l'unique équilibre de Nash est G, G : personne n'adopte la nouvelle technologie qui est trop chère. Si $f < c(1-c)$, il existe deux équilibres de Nash en stratégies pures : A, G et G, A (plus un équilibre en stratégie mixte).
4. Déterminons le bien-être social dans chaque cas possible. Notons $W(c_i, c_j)$ le bien-être social lorsque l'entreprise i a un coût marginal égal à c_i et que son concurrent a un coût marginal c_j. Tout d'abord, $W(c,c) = \frac{1}{2}(1-c)^2$. Ensuite, $W(0,c) = c(1-c) - f + \frac{1}{2}(1-c)^2$, soit encore $W(0,c) = \frac{1}{2}(1-c^2) - f$. Enfin, $W(0,0) = \frac{1}{2} - 2f$. Comme le montre la figure 4.8, il est préférable que les deux firmes adoptent la nouvelle technologie lorsque $0 \leq f \leq \frac{1}{2}c^2$, qu'une seule paye l'innovation si $\frac{1}{2}c^2 \leq f \leq c(1-c)$ et enfin qu'aucune ne le fasse au-delà de $c(1-c)$.

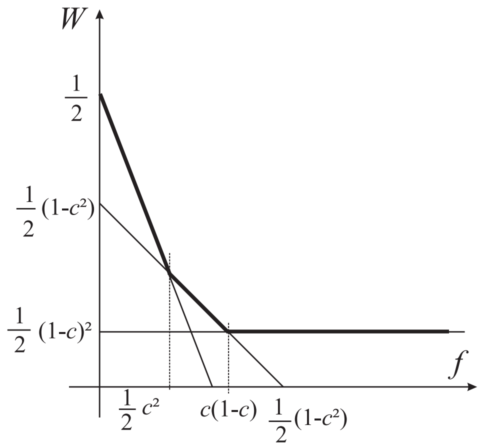


Fig. 4.8 – Maximisation du bien-être social

Les choix privés des entreprises peuvent donc être en conflit avec la maximisation du bien-être social. En particulier, lorsque $0 \leq f \leq \frac{1}{2}c^2$, une seule entreprise adopte, alors qu'il serait préférable que les deux le fassent.

4.10 Choix endogène d'un leader en prix*

Objectif de l'exercice : Étudier l'issue du jeu où les firmes peuvent devenir leader en prix sur leur marché. Les résultats sont à contraster avec ceux de l'exercice 3.17 où la concurrence est à la Cournot.

Soit le système de fonctions de demande $q_i = \max\{0\,;\,1 - p_i + \sigma p_j\}$ *avec* $\sigma = \frac{1}{2}$. *Les coûts marginaux de production des firmes sont supposés constants et sont normalisés à zéro :* $c_i = c_j = 0$.

1. *Déterminer les valeurs des profits de i et de j pour une concurrence en prix simultanée puis pour une concurrence en prix à la Stackelberg avec i ou j comme leader.*
2. *Écrire sous forme normale la première étape du jeu où les entreprises choisissent simultanément d'être soit un leader (L) soit un follower (F). Si les deux entreprises font le même choix (L, L) ou (F, F), alors la concurrence est simultanée en prix, sinon en prix et à la Stackelberg. Trouver les équilibres de Nash de ce jeu.*

Correction

1. Que les choix de prix soient simultanés ou séquentiels, le profit de l'entreprise j s'écrit :
$$\pi_j = p_j\left(1 + \sigma p_i - p_j\right),$$
donc sa fonction de meilleure réponse est (milieu des deux racines) $p_j^*\left(p_i\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sigma p_i\right)$. Pour trouver l'équilibre de Nash du jeu où les prix sont choisis simultanément, il suffit de résoudre le système de deux équations à deux inconnues : $p_i = p_i^*\left(p_j\right)$ et $p_j = p_j^*\left(p_i\right)$. Ce qui conduit à
$$p_i^{Sim} = p_j^{Sim} = \frac{1}{2-\sigma} = \frac{2}{3}$$
et donc aux profits :
$$\pi_i^{Sim} = \pi_j^{Sim} = \left(\frac{1}{2-\sigma}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$
Lorsque le jeu est séquentiel avec l'entreprise i qui choisit son prix en premier, l'entreprise j jouant en second affiche sa meilleure réponse au choix de i soit $p_j^*\left(p_i\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sigma p_i\right)$. Anticipant cela, l'entreprise i maximise en p_i le profit
$$\pi_i\left(p_i, p_j^*\left(p_i\right)\right) = \frac{1}{2}p_i\left(2 + \sigma - \left(2 - \sigma^2\right)p_i\right)$$
ce qui la conduit au prix
$$p_i^{Seq} = \frac{2+\sigma}{4-2\sigma^2} = \frac{5}{7},$$

et donc

$$p_j^{Seq} = \frac{19}{28}$$

puis finalement,

$$\pi_i^{Seq} = \frac{(2+\sigma)^2}{8\,(2-\sigma^2)} = \frac{25}{56},$$

et

$$\pi_j^{Seq} = \left(\frac{4+2\sigma-\sigma^2}{4\,(2-\sigma^2)}\right)^2 = \frac{361}{784}.$$

2. Le jeu qui consiste à prendre ou pas une position de leader se ramène donc à un jeu en une seule étape, décrit dans la table 4.2.

		E2	
		L	F
E1	L	(4/9, 4/9)	(25/36, 361/784)
	F	(361/784, 25/36)	(4/9, 4/9)

Tab. 4.2 – Leader en prix

En remarquant que

$$\frac{361}{784} \simeq 0,460 > 0,446 \simeq \frac{25}{36} > \frac{4}{9} \simeq 0,444,$$

il apparaît que ce jeu possède deux équilibres de Nash en stratégies pures : (F,L) et (L,F) (plus un équilibre de Nash en stratégies mixtes). *Contrairement à la concurrence à la Cournot, il n'est pas intéressant d'être le leader.* En revanche, les deux firmes gagnent à ce qu'il existe un leader.

4.11 Conquête d'un nouveau marché**

Objectif de l'exercice : Étudier les avantages et les inconvénients à vendre sur un second marché pour une firme déjà en concurrence (en prix) sur un premier marché. (Voir l'exercice 3.12 pour la concurrence en quantité).

Deux entreprises se font concurrence en prix avec des produits différenciés. Les fonctions de demandes sont $\max\left\{0\,;\, q_i = 1 - p_i + \frac{1}{2}p_j\right\}$. *Les coûts de production sont* $C_1(q_1) = \frac{1}{2}q_1^2$ *et* $C_2(q_2) = \frac{1}{2}q_2^2$.

1. *Calculer l'équilibre : prix et profits.*
2. *Supposons à nouveau que l'entreprise 1 a accès à un second marché sur lequel elle jouit d'une situation de monopole. Sur ce marché la demande est* $P(x) = a - x$. *Calculer le nouvel équilibre (la firme 1 choisit simultanément* p_1 *et* x*).*

Correction

1. Le profit de l'entreprise i s'écrit : $\pi_i(p_i, p_j) = p_i\left(1 - p_i + \frac{1}{2}p_j\right) - \frac{1}{2}\left(1 - p_i + \frac{1}{2}p_j\right)^2$ soit en factorisant :
$$\pi_i(p_i, p_j) = \frac{3}{2}\left(1 - p_i + \frac{1}{2}p_j\right)\left(p_i - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}p_j\right).$$
La fonction de réaction de i à tout prix p_j s'en déduit :
$$p_i^*(p_j) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}p_j\right).$$
L'équilibre de Nash se trouve à l'intersection des fonctions de réactions soit :
$$p_i^* = p_j^* = 1,$$
et les profits s'en déduisent :
$$\pi_i^* = \pi_j^* = \frac{3}{8}.$$
2. En présence d'un second marché, la fonction de profit de l'entreprise 1 se modifie en :
$$\pi_1(x, p_1, p_2) = p_1 q_1 + (a - x)\,x - \frac{1}{2}(q_1 + x)^2,$$
tandis que la fonction de profit de l'entreprise 2 reste inchangée. Il est facile de vérifier que la fonction de profit de l'entreprise 1 est strictement concave en (x, p_1) (sur l'ensemble où les quantités et les prix sont strictement positifs). Les conditions du premier ordre s'écrivent donc :
$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 2 + x + p_2 - 3p_1 = 0 \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial x} = a - 1 + p_1 - \frac{1}{2}p_2 - 3x = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 2 + p_1 - 3p_2 = 0 \end{cases}$$

qui se résout en :

$$\widehat{p_1} = \frac{2}{43}(20+3a), \quad \widehat{x} = \frac{8}{43}(2a-1), \quad \widehat{p_2} = \frac{2}{43}(21+a).$$

Remarquons que $\widehat{x}$ n'est positif que si $a \geq \frac{1}{2}$, en dessous le marché de monopole doit être ignoré. D'où les profits :

$$\widehat{\pi_1} = \frac{1}{3698}\left(1536 - 640a + 683a^2\right) \text{ et } \widehat{\pi_2} = \frac{3}{3698}(21+a)^2.$$

Remarquons de plus que la quantité $\widehat{q_1} = \frac{1}{43}(24-5a)$ est positive tant que a est inférieur à $\frac{24}{5}$, au-delà il est préférable pour l'entreprise 1 de ne rien vendre sur le marché duopolistique et de se concentrer uniquement sur son marché de monopole. Donc si le nouveau marché est trop petit ($a \leq 1/2$) il est préférable de l'ignorer. Si la taille du nouveau marché est intermédiaire ($1/2 \leq a \leq 24/5$), la firme 1 est présente sur les deux marchés. Enfin, si le nouveau marché est très prometteur ($a \geq 24/5$), il est préférable d'abandonner le vieux marché à la firme 2.

4.12 Taxer ou subventionner**

Objectif de l'exercice : De l'intérêt de subventionner ou de taxer une firme exportatrice en concurrence en prix sur le marché de destination. (Voir l'exercice 3.9 pour la concurrence en quantité).

Soient deux pays cherchant chacun à subventionner leur entreprise. Les deux firmes se livrent une concurrence en prix (avec produits différenciés) sur le marché d'un troisième pays. Soit $D_i(p_i, p_j) = \max\{0\,;\, 1 - p_i + \sigma p_j\}$ la fonction de demande. Supposons que $c_1 = c_2 = 0$. Notons s_1 et s_2 le niveau des subventions choisis en première période.

1. *Déterminez les prix de chaque firme, les profits des firmes et de chaque pays lorsque $s_1 = s_2 = 0$.*
2. *Déterminer les prix de chaque firme pour s_1 et s_2 quelconques.*
3. *Écrivez le profit net de chaque pays (comme le bien est exporté, le bien-être d'un pays se confond avec le profit de son entreprise) en fonction de s_1 et s_2 et déterminer les choix optimaux de chaque pays.*
4. *Comparez les profits de chaque pays en présence et en l'absence de subventions. Expliquez.*

Correction

1. Le profit de l'entreprise 1 s'écrit $p_1(1 - p_1 + \sigma p_2)$, sa fonction de réaction est donc :
$$p_1^*(p_2) = \frac{1 + \sigma p_2}{2}.$$
La fonction de réaction de l'entreprise 2 se déduit par symétrie. Il en résulte que les prix d'équilibres sont :
$$\widehat{p_1} = \widehat{p_2} = \frac{1}{2 - \sigma}.$$
Il en découle que $q_1 = q_2 = \frac{1}{2-\sigma}$ et donc que les profits sans subvention s'établissent à :
$$\widehat{\pi_1} = \widehat{\pi_2} = \left(\frac{1}{2 - \sigma}\right)^2.$$
Les bien-être de chaque pays (confondus avec le profit de leur entreprise) s'établit à :
$$\widehat{W_1} = \widehat{W_2} = \left(\frac{1}{2 - \sigma}\right)^2.$$

2. Soient s_1 et s_2 quelconques. Le profit de l'entreprise 1 s'écrit $(p_1 + s_1)(1 - p_1 + \sigma p_2)$, sa fonction de réaction est donc :
$$p_1^*(p_2) = \frac{1 - s_1 + \sigma p_2}{2}.$$

La fonction de réaction de l'entreprise 2 se déduit par symétrie. Il en résulte qu'à l'équilibre de Nash du sous-jeu, l'entreprise 1 choisit le prix :

$$p_1^*(s_1, s_2) = \frac{1}{2-\sigma} - \frac{2s_1 + \sigma s_2}{4-\sigma^2},$$

par symétrie, le prix de l'entreprise 2 est :

$$p_2^*(s_1, s_2) = \frac{1}{2-\sigma} - \frac{2s_2 + \sigma s_1}{4-\sigma^2}.$$

3. Pour s_1 et s_2 donnés, le bien-être du pays 1 s'écrit :

$$(p_1^*(s_1, s_2) + s_1)(1 - p_1^*(s_1, s_2) + \sigma p_2^*(s_1, s_2)) - s_1(1 - p_1^*(s_1, s_2) + \sigma p_2^*(s_1, s_2)),$$

soit

$$W_1 = p_1^*(s_1, s_2)(1 - p_1^*(s_1, s_2) + \sigma p_2^*(s_1, s_2)),$$

soit après avoir simplifié q_1^*,

$$W_1 = \left(\frac{1}{2-\sigma} - \frac{2s_1 + \sigma s_2}{4-\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{2-\sigma} + \frac{(2-\sigma^2)s_1 - \sigma s_2}{4-\sigma^2}\right).$$

Il s'agit d'une parabole concave en s_1 dont les racines sont :

$$\frac{4-\sigma^2}{2(2-\sigma)} - \frac{\sigma}{2}s_2 \text{ et } \frac{-(4-\sigma^2)}{(2-\sigma)(2-\sigma^2)} + \frac{\sigma}{2-\sigma^2}s_2,$$

d'où la fonction de réaction :

$$s_1^*(s_2) = \frac{\sigma^2}{4(2-\sigma^2)}(\sigma s_2 - (2+\sigma)),$$

la fonction de réaction $s_2^*(s_1)$ se déduit par symétrie. Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} s_1 = & \sigma\beta s_2 - (2+\sigma)\beta \\ s_2 = & \sigma\beta s_1 - (2+\sigma)\beta \end{cases}$$

où $\beta = \frac{\sigma^2}{4(2-\sigma^2)}$. Les calculs montrent que

$$s_1^* = s_2^* = \frac{-\sigma^2}{4-2\sigma-\sigma^2} < 0.$$

Il s'agit donc de taxes ! Les gouvernements taxent les firmes de telle sorte à limiter la concurrence en prix.

4. Le calcul des biens-être de chaque pays conduit à

$$W_1^* = W_2^* = \frac{2(2-\sigma^2)}{(4-2\sigma-\sigma^2)^2},$$

grandeur qui est supérieure à $\left(\frac{1}{2-\sigma}\right)^2$.

Chapitre 5

Différenciation et localisation

Ce chapitre explore les nombreuses analyses possibles construites autour du modèle, pourtant élémentaire, de la ville linéaire introduit par Hotelling en 1929[1]. Nous nous sommes appuyés sur le livre d'Anderson, de Palma et Thisse *Discrete Choice Theory of Product Differentiation* (MIT press, 1992) dont nous recommandons la lecture ainsi que sur le chapitre 7 du Tirole (*The Theory of Industrial Organization*, 1988, MIT Press), ouvrages qui peuvent servir de support de cours. Le modèle de la ville linéaire a toujours trois interprétations. Tout d'abord la géographique : où se localisent les firmes, étant données les localisations des consommateurs ? Comment les prix sont-ils affectés lorsque les localisations sont différentes ? Ensuite vient l'interprétation en termes de différenciation des produits : les consommateurs ont des préférences hétérogènes pour certaines caractéristiques d'un produit. Par exemple, la couleur : certains préfèrent le bleu, d'autres le rouge. Par leurs choix de caractéristiques, les entreprises rendent leurs produits différents les uns des autres. Comment cette différenciation affecte-t-elle la concurrence ? Enfin, la troisième interprétation est en termes d'économie politique : les firmes sont vues comme des partis politiques, les localisations comme des choix de plateformes électorales et les consommateurs sont des électeurs qui votent pour un parti ou l'autre (qui achètent à un magasin ou à un autre).

Les exercices de ce chapitre peuvent être résolus sans rappel de cours. Les exercices 5.1 à 5.5 étudient le modèle de Hotelling lorsque le prix de vente est fixe (c'est-à-dire que le prix n'est pas une variable de choix des entreprises). Les exercices 5.6 à 5.10 s'intéressent au cas où les entreprises déterminent librement leur prix de vente soit à localisations fixes soit après avoir choisi une localisation. Les exercices 5.11 et 5.12 introduisent la possibilité d'une discrimination en prix entre les consommateurs. Enfin l'exercice 5.13 étudie un modèle proche de celui d'Hotelling, le modèle de Salop où les consommateurs sont localisés le long d'un cercle.

[1] H. Hotelling "Stability in Competition", *Economic Journal*, 39, 1929, pp. 41-57.

5.1 Prix fixes**

Objectif de l'exercice : Déterminer les localisations d'équilibres deux deux firmes lorsqu'elles vendent au même prix et que ce prix est fixe. Ce modèle s'interprète (du fait que les prix sont fixes) en termes de choix de plates-formes électorales par deux partis politiques.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0, 1]$. *Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Deux points de vente (magasins, entreprises) sont localisés sur le segment, le premier, noté* E, *en* e *et le second, noté* F, *en* f. *La figure 5.1 illustre cette situation : un consommateur localisé en* x *ou en* x' *choisit entre acheter en* e *ou en* f. *Les coûts marginaux de production sont sup-*

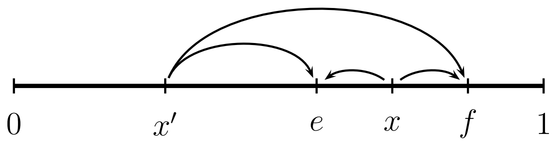


Fig. 5.1 – Ville linéaire

posés identiques et constants pour les deux entreprises. Par ailleurs, il est supposé ici que les deux firmes vendent au même prix p. *Les consommateurs supportent un coût de transport croissant avec la distance parcourue : un consommateur qui se déplace de* x *à* e *subit un coût* $T(\mid e - x \mid)$ *où* T *est une fonction positive croissante. La fonction d'utilité d'un consommateur est de la forme* $v - p - T$. *Le prix* p *est supposé suffisamment inférieur à* v *afin que tous les consommateurs achètent.*

1. *Écrire précisément l'utilité d'un consommateur localisé en* x *selon qu'il achète en* e, f *ou qu'il n'achète pas.*
2. *Déterminer la demande de l'entreprise* E *en fonction de* e *et* f *(par convention, si un groupe de consommateurs est indifférent entre acheter en* e *ou en* f, *il se partage équitablement entre les deux). Tracer cette fonction pour* $f < \frac{1}{2}$, $f = \frac{1}{2}$ *et* $f > \frac{1}{2}$.
3. *En déduire l'équilibre de Nash du jeu de localisation simultané où* E *choisit* e *et* F *détermine* f.
4. *Écrire le bien-être social de cette économie en fonction de* e *et* f. *Déterminer les localisations qui le maximisent.*

Correction

1. La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en x s'écrit :

$$\begin{cases} v - p - T(\mid e - x \mid) & \text{s'il achète en } E \\ v - p - T(\mid f - x \mid) & \text{s'il achète en } F \\ 0 & \text{s'il n'achète pas.} \end{cases}$$

2. Une notion clef des modèles avec une «ville linéaire» est celle de *consommateur indifférent*. C'est-à-dire le consommateur qui obtient la même utilité s'il achète à E ou à F. Ici l'équation qui définit le consommateur indifférent est simplement $T(x-e) = T(f-x)$ soit $\widetilde{x} = \frac{e+f}{2}$ puisque T est strictement croissante. Si $e < f$, la part de marché de l'entreprise E est donc $G(e,f) = \frac{e+f}{2}$. Celle de l'entreprise F est (toujours sous réserve que $e < f$) : $D = 1 - G = \frac{2-e-f}{2}$.
   La fonction de demande d'une entreprise localisée en $e \in [0,1]$ et dont le concurrent est localisé en f s'écrit donc[2] :

$$D_E(e,f) = \begin{cases} \frac{e+f}{2} & \text{si } e < f, \\ 1/2 & \text{si } e = f, \\ \frac{2-e-f}{2} & \text{si } e > f. \end{cases}$$

   Par symétrie, la fonction de demande de l'entreprise F s'écrit $D_F = 1 - D_E$. Noter que ces fonctions de demande présentent une discontinuité en $e = f$. La figure 5.2 représente cette fonction de demande lorsque e varie et pour différentes valeurs de f.

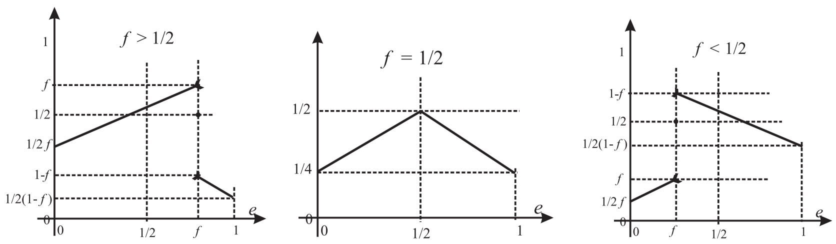


FIG. 5.2 – Demande $D_E(e)$ selon trois valeurs de f

3. Puisque le prix p est fixe, la maximisation du profit se confond avec celle de la demande. Un équilibre de Nash de ce jeu de localisation à prix fixe est donc un couple e^*, f^* tel que pour tout e,

$$D_E(e, f^*) \leq D_E(e^*, f^*),$$

   et pour tout f,

$$D_F(e^*, f) \leq D_F(e^*, f^*).$$

   Il existe un unique équilibre de Nash de ce jeu de localisation à prix fixe : $e^* = f^* = \frac{1}{2}$. La démonstration repose d'abord sur l'observation que chaque entreprise peut se garantir une demande égale à $\frac{1}{2}$ en se localisant au même point que son concurrent. À l'équilibre les firmes doivent donc être localisées au même point. À partir de là il est facile de voir que le milieu est l'unique localisation d'équilibre car pour tout autre localisation une firme a intérêt à dévier en se déplaçant "vers le milieu". Il intéressant de remarquer que ce résultat ne dépend pas de la fonction de coût de transport des consommateurs.

[2] Il est important de noter ici que s'il était utile de faire l'hypothèse $e < f$ pour trouver les fonctions G et F, il est maintenant important d'écrire la fonction de demande de la firme E pour tout e car pour trouver l'équilibre de Nash il faut tester toute les déviations.

Il s'agit d'un résultat simple mais important connu sous le nom de *principe de différenciation minimale* : (en l'absence de force concurrentielle[3]) les entreprises tendent à se localiser au même point (au centre, là où il est le plus facile de servir le maximum de demande).

4. Le bien-être social s'écrit comme la somme du surplus des consommateurs et des profits des entreprises. Le surplus des consommateurs est la somme des surplus individuels, c'est-à-dire de l'utilité des consommateurs. Or, l'utilité d'un consommateur localisé en x et qui consomme une unité achetée en e est :
$$u(x,e) = v - p - T(|e-x|),$$
comme les consommateurs localisés en $x < \frac{e+f}{2}$ achètent en e et ceux localisés en $x > \frac{e+f}{2}$ achètent en f, il vient que
$$S = \int_0^1 u(x)\,dx = \int_0^{\frac{e+f}{2}} [v - p - T(|e-x|)]\,dx + \int_{\frac{e+f}{2}}^1 [v - p - T(|f-x|)]\,dx,$$
soit encore
$$S = v - p - \int_0^{\frac{e+f}{2}} T(|e-x|)\,dx - \int_{\frac{e+f}{2}}^1 T(|f-x|)\,dx,$$
d'autre part, la somme des profits est égale à $1 \times (p-c) = p - c$ puisque les entreprises vendent au prix p à tous les consommateurs dont la masse est égale à 1. Il en résulte que le bien-être social s'écrit :
$$W(e,f) = v - c - \int_0^{\frac{e+f}{2}} T(|e-x|)\,dx - \int_{\frac{e+f}{2}}^1 T(|f-x|)\,dx,$$
donc la maximisation de W revient à minimiser la somme, ST, des coûts de transport :
$$\min_{e,f}\left[\int_0^{\frac{e+f}{2}} T(|e-x|)\,dx + \int_{\frac{e+f}{2}}^1 T(|f-x|)\,dx\right].$$
Soit Γ, la primitive de T telle que $\Gamma(0) = 0$, il vient que
$$ST(e,f) = [-\Gamma(e-x)]_0^e + [\Gamma(x-e)]_e^{\frac{e+f}{2}} + [-\Gamma(f-x)]_{\frac{e+f}{2}}^f + [\Gamma(f-e)]_f^1$$
c'est-à-dire
$$ST(e,f) = \Gamma(e) + 2\Gamma\left(\frac{f-e}{2}\right) + \Gamma(1-f).$$
Il est possible de chercher les valeurs de e et f qui minimisent ST à l'aide des conditions du premier ordre car T strictement croissante implique que ST est strictement convexe.
$$\begin{cases} \frac{\partial ST}{\partial e} = T(e) - T\left(\frac{f-e}{2}\right) = 0 \\ \frac{\partial ST}{\partial f} = T\left(\frac{f-e}{2}\right) - T(1-f) = 0 \end{cases}$$

[3]Ou si les entreprises n'anticipent pas que les localisations vont influencer la concurrence en prix.

c'est-à-dire

$$e = 1 - f = \frac{f - e}{2}$$

soit

$$e^{**} = \frac{1}{4} \text{ et } f^{**} = \frac{3}{4}.$$

Les localisations optimales sont très intuitives. Chaque entreprise sert la moitié de la demande et se place au milieu de sa demande. Il en résulte que les localisations de l'équilibre de Nash ne sont pas optimales. À nouveau, il est intéressant de noter que ces localisations sont indépendantes de la fonction de coût de transport (positive et strictement croissante). En revanche, ces localisations dépendent de la distribution uniforme des consommateurs. Avec une distribution quelconque G, de densité g, des consommateurs, les firmes continuent à se localiser au milieu c'est-à-dire à la médiane de la distribution : le même argument que précédemment indique qu'à l'équilibre $e^* = f^*$ et que les demandes sont égales à $\frac{1}{2}$ donc pour éviter toute déviation profitable il faut que $\int_0^{e^*} g(x)\, dx = \frac{1}{2} = \int_{e^*}^1 g(x)\, dx$ ce qui définit bien la médiane. Les localisations optimales ne sont pas forcément les quartiles de la distribution mais l'agglomération n'est en tout cas jamais optimale.

5.2 Oligopole à prix fixe**

Objectif de l'exercice : Analyser le problème de la localisation simultanée le long d'une ville linéaire en l'absence de concurrence en prix mais avec plus que deux firmes. Le modèle s'interprète en termes de choix de plates-formes électorales par des partis politiques.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0,1]$. Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Il est supposé que n firmes vendent au même prix p un même bien homogène. Les consommateurs supportent un coût de transport croissant avec la distance parcourue : un consommateur qui se déplace de x à e subit un coût $T(\mid e-x\mid)$ où T est une fonction positive croissante. La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en x s'écrit donc : $v-p-T(\mid e-x\mid)$ s'il achète en e et 0 s'il n'achète pas. Le prix p est supposé suffisamment inférieur à v pour que tous les consommateurs achètent à l'équilibre.

1. *Considérer le cas $n=3$. Montrer qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures du jeu où les trois firmes choisissent simultanément leur localisation.*
2. *Pour $n=4$, il existe un unique équilibre de Nash du jeu de localisations simultanées. Déterminer cet équilibre et comparer avec les localisation optimales.*

Correction

1. Pour montrer l'inexistence, il suffit de passer en revue toutes les configurations possibles. Tout d'abord, si les trois firmes sont localisées au même point x, elles se partagent la demande et leur part de marché est donc égale à $\frac{1}{3}$. En déviant vers $x+\varepsilon$ une firme obtient une part de marché égale à $1-x$ ou alors en déviant vers $x-\varepsilon$ une part de marché égale à x. Or, soit $x>\frac{1}{3}$ soit $x<\frac{1}{3}$ ce qui signifie qu'il existe toujours une déviation strictement profitable.

   Supposons maintenant que deux firmes soient localisées au même point x et que la troisième se trouve en y. Si $y<x$, alors une déviation de y vers $x-\varepsilon$ augmente strictement la part de marché de la firme isolée. Tandis que si $y>x$, une déviation de y vers $x+\varepsilon$ est profitable.

   Enfin, si les trois firmes sont isolées, une firme a toujours intérêt à dévier pour se rapprocher d'une autre car ainsi elle augmente sa part de marché.
2. Si les quatre firmes sont isolées, il est immédiat qu'une firme localisée à «l'extérieur» (sans voisin à gauche ou sans voisin à droite) à intérêt à se rapprocher de son concurrent le plus proche. En effet, notons $0\leq x_1<x_2<x_3<x_4\leq 1$ les localisations, la part de marché de l'entreprise 1 est $s_1=x_1+\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{x_2+x_1}{2}$ tant que $x_1<x_2$, et cette expression est strictement croissante avec x_1.

   Supposons maintenant des localisations d'équilibre du type $0\leq x_1<x_2=x_3<x_4\leq 1$. Malheureusement, la part de marché de l'entreprise 1 est

toujours $s_1 = x_1 + \frac{x_2-x_1}{2} = \frac{x_2+x_1}{2}$ tant que $x_1 < x_2$, et cette expression est strictement croissante avec x_1.

Une autre configuration possible est $0 \leq x_1 = x_2 < x_3 = x_4 \leq 1$. Les parts de marchés s'écrivent : $s_1 = s_2 = \frac{x_1+x_3}{4}$ et $s_3 = s_4 = \frac{1}{2} - \frac{x_1+x_3}{4}$. Si l'entreprise 1 dévie pour une localisation x entre x_1 et x_3 sa part de marché devient : $\frac{x-x_1}{2} + \frac{x_3-x}{2} = \frac{x_3-x_1}{2}$, cette déviation n'est pas profitable si et seulement si $\frac{x_3-x_1}{2} \leq \frac{x_1+x_3}{4}$ soit $x_3 \leq 3x_1$. Ensuite, l'entreprise 1 ne doit être attirée par une déviation au-delà de x_3. Le mieux serait alors de choisir $x_3+\varepsilon$ qui donne une part de marché égale à $1 - x_3$. D'où la condition : $1 - x_3 \leq \frac{x_1+x_3}{4}$ soit $x_3 \geq \frac{4-x_1}{5}$. De même une déviation vers $x_1-\varepsilon$ ne doit pas être profitable ce qui conduit à $x_3 \geq 3x_1$. Cette dernière condition combinée avec $x_3 \leq 3x_1$ impose $x_3 = 3x_1$. En utilisant la symétrie du modèle, il vient que les déviations d'une firme localisée en x_3 ne sont pas profitables si $1-x_1 = 3(1-x_3)$ d'où $x_1 = \frac{1}{4}$ et $x_3 = \frac{3}{4}$.

Il est immédiat que toute configuration où une firme est isolée et les trois autres agglomérées n'est pas un équilibre ni une configuration où les quatre sont localisées au même point. Nous avons donc déterminé l'unique équilibre de Nash :

$$x_1^* = x_2^* = \frac{1}{4} \text{ et } x_3^* = x_4^* = \frac{3}{4}.$$

Malheureusement, cette configuration d'équilibre n'est pas optimale d'un point de vue social. Il serait préférable que les entreprises se localisent en $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{8}$. Chaque firme a une part de marché égale à $\frac{1}{4}$ et se trouve au centre de son marché.

5.3 Libre entrée simultanée**

Objectif de l'exercice : Compléter l'analyse des choix simultanés de localisation le long d'une ville linéaire (exercices 5.1 et 5.2) en se plaçant dans le cadre de la libre entrée simultanée (l'entrée séquentielle est étudiée dans l'exercice 5.5). Le modèle s'interprète en termes de choix de plates-formes électorales par des partis politiques.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0,1]$. Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Il est supposé que les n firmes vendent au même prix $p = 1$ et que leurs coûts de production sont nuls. Les consommateurs supportent un coût de transport croissant avec la distance parcourue : un consommateur qui se déplace de x à e subit un coût $T(\mid e - x\mid)$ où T est une fonction positive croissante. La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en x s'écrit donc : $v-p-T(\mid e-x\mid)$ s'il achète en e et 0 s'il n'achète pas. Le prix p (égal à 1) est supposé suffisamment inférieur à v pour que tous les consommateurs achètent à l'équilibre. Une entreprise doit payer un coût fixe $0 < K < \frac{1}{6}$ pour s'installer. Un équilibre de libre entrée possède deux propriétés :

a) *Aucune firme ne peut réaliser un profit positif en entrant et toutes les firmes en place ont un profit positif.*

b) *Aucune firme en place ne souhaite changer (unilatéralement) de localisation.*

1. *Montrer qu'à l'équilibre la distance maximale entre deux localisations est égale à $2K$.*
2. *Montrer qu'il ne peut y avoir trois firmes agglomérées, qu'il y a toujours deux firmes en périphérie et qu'une paire périphérique ne doit pas être à plus de K du bord.*
3. *Montrer qu'à l'équilibre la première paire se trouve en K, que la seconde localisation se trouve en $3K$ et de manière symétrique que la dernière paire se trouve en $1-K$ et que l'avant dernière localisation se trouve en $1-3K$.*
4. *En supposant que $K = \frac{1}{2n}$, caractériser les équilibres avec un nombre maximal de firmes et ceux avec un nombre minimal de firmes.*

Correction

1. Avec $p = 1$, le profit d'une firme est exactement égal à sa part de marché moins K et donc K représente la part de marché minimale pour réaliser un profit positif. Soient x et y deux localisations, une entreprise qui se localiserait en e entre x et y posséderait une part de marché égale à $\frac{y+e}{2} - \frac{x+e}{2} = \frac{y-x}{2}$ pour que cette intrusion ne soit pas rentable il faut que $\frac{y-x}{2} \leq K$.
2. Imaginons que trois firmes soient localisées en b et que les localisations les plus proches soient en $a < b$ et en $c > b$ (le cas d'une localisation périphérique s'analyse de manière similaire). La part de marché totale des firmes localisées en b est $\frac{c-a}{2}$, donc chaque firme a une part de marché de $\frac{c-a}{6}$. Pour qu'une

déviation vers c ne soient pas profitable, il faut que $\frac{c-a}{6} \geq \frac{c-b}{2}$ et pour qu'une déviation vers a ne soient pas rentable il faut que $\frac{c-a}{6} \geq \frac{b-a}{2}$, il suffit de sommer ces deux conditions pour obtenir une contradiction.

S'il ne se trouvait qu'une seule firme en périphérie, elle aurait intérêt à dévier vers la seconde localisation pour accroître sa part de marché. Enfin, il est clair qu'une paire périphérique ne doit pas être à plus de K du bord sinon une firme peut entrer et s'installer légèrement au-delà de K et réaliser un profit strictement positif.

3. On a vu que la paire de gauche ne peut pas être localisée au-delà de K mais que la part de marché d'une firme de la paire doit être au moins égale à K. Soit e_1 la localisation de cette paire et soit e_2 la deuxième localisation (où le nombre de firmes n'est pas important). La part de marché d'une firme de la première paire est : $\frac{e_1+e_2}{4}$. D'où les conditions : $e_1 \leq K$ et $\frac{e_1+e_2}{4} \geq K$ et enfin on a que $e_2 - e_1 \leq 2K$. Ces trois conditions conduisent bien à une seule possibilité : $e_1 = K$ et $e_2 = 3K$. Le bord de droite s'analyse de la même manière.
4. Au maximum, il y a $2n$ entreprises. Comme il est possible de localiser deux entreprises en chaque $(2k-1)\,K$ avec $k = 1$ à $k = n$ ce qui correspond à $2n$ firmes qui réalisent toutes un profit nul, il s'agit bien de l'équilibre avec le plus grand nombre de firmes.

   Au minimum, il est possible de localiser 2 firmes en K et 2 firmes en $1-K$ (c'est-à-dire en $(2n-1)\,K$) mais seulement 1 firme en chaque $(2k-1)\,K$ avec $k = 2$ à $k = n-1$, les firmes isolées réalisent alors un profit égal à K avec au total $n+2$ firmes.

   La figure 5.3 illustre ces deux possibilités.

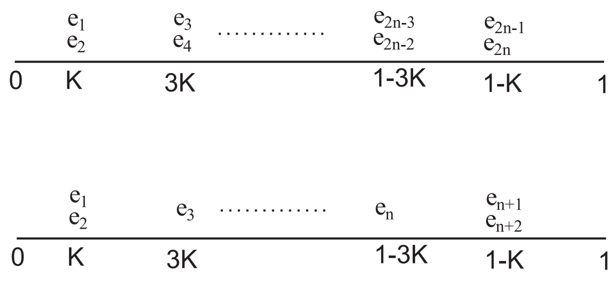


FIG. 5.3 – Entrée maximale et minimale

5.4 Prix fixe et entrée séquentielle**

Objectif de l'exercice : Les exercices 5.1 et 5.2 ont étudié le choix simultané de localisation (2, 3 ou 4 firmes). On s'intéresse ici au choix séquentiel, les firmes se localisant les unes après les autres. Le modèle s'interprète en termes de choix de plates-formes électorales par des partis politiques.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0,1]$. *Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Il est supposé que les n firmes vendent au même prix* $p = 1$. *Les consommateurs supportent un coût de transport croissant avec la distance parcourue : un consommateur qui se déplace de x à e subit un coût* $T(\mid e-x \mid)$ *où* T *est une fonction positive croissante. La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en x s'écrit donc :* $v - p - T(\mid e-x \mid)$ *s'il achète en e et 0 s'il n'achète pas. Le prix p (égal à 1) est supposé suffisamment inférieur à v pour que tous les consommateurs achètent à l'équilibre. Les entreprises dont le nombre est prédéterminé (de manière arbitraire ici) entrent l'une après l'autre. Par exemple : la firme 1 s'installe, la firme 2 observe ce choix, détermine le sien. Une fois une entreprise localisée il ne lui est plus possible de modifier son choix.*

1. *Supposons* $n = 2$. *Déterminer l'équilibre de Nash sous-jeu parfait de ce jeu de localisation séquentiel.*
2. *Résoudre le cas* $n = 3$.

Correction

1. Dans la logique de l'équilibre de Nash sous-jeux parfait, il faut d'abord déterminer la meilleure localisation du deuxième entrant pour une localisation fixée du premier. Soit $e_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ la localisation de la première firme (par symétrie il est possible de limiter e_1 à cet intervalle). Il est clair que $e_2^*(e_1) = e_1^+$ où $e_1^+ = e_1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut. Il en résulte que la part de marché de l'entreprise 1 est juste égale à e_1 et qu'elle la maximise en choisissant $e_1^* = \frac{1}{2}$. Comme dans le jeu simultanée, $e_1^* = e_2^* = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une différenciation minimale.
2. Soient e_1 et e_2 les localisations des deux premières firmes (supposons, sans perte de généralité, que $e_1 \leq e_2$). Quel est le meilleur choix de la troisième entreprise ? En fait, elle doit comparer les parts de marchés obtenues en e_1^- (où $e_1^- = e_1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut), e_2^+ ou n'importe où entre e_1 et e_2. C'est-à-dire choisir la plus grande part de marché entre e_1, e_2 et $\frac{e_2-e_1}{2}$. En cas d'indifférence entre toutes les localisations d'un segment, nous faisons l'hypothèse qu'une firme se localise au centre. Il est facile de déterminer $e_3^*(e_1, e_2)$. Sans détailler l'expression de e_3^*, il apparaît que le deuxième entrant n'a pas intérêt à laisser le troisième entrer à sa droite. En effet, si $e_3^* = e_2^+$, alors s_2 la part de marché de E_2 passe à $\frac{e_2-e_1}{2}$ part de marché qu'aurait pu choisir le troisième entrant et qui est donc inférieure à $1 - e_2$. Il

en résulte qu'après le choix optimal de E_2, E_3 choisira soit e_1^- soit $\frac{e_1+e_2}{2}$ mais sans détailler $e_2^*(e_1)$ il est clair que de la même manière que E_2 empêche toujours une installation à sa droite, E_1 a toujours intérêt à empêcher une localisation à sa gauche. Finalement, nous avons deux contraintes :

$$\begin{cases} e_1^* \leq \frac{e_2^*-e_1^*}{2}, \\ 1-e_2^* \leq \frac{e_2^*-e_1^*}{2} \end{cases}$$

Il est immédiat que ces inégalités doivent être des égalités puisque sinon les profits des firmes extérieures pourraient augmenter. Il suffit de résoudre :

$$\begin{cases} e_1^* = \frac{e_2^*-e_1^*}{2}, \\ 1-e_2^* = \frac{e_2^*-e_1^*}{2} \end{cases}$$

qui conduit à

$$e_1^* = \frac{1}{4},\ e_2^* = \frac{3}{4},\ e_3^* = \frac{1}{2}.$$

Contrairement au jeu simultané, il existe un équilibre en stratégie pure pour le jeu séquentiel. Par symétrie les rôles de 1 et 2 peuvent être interchangés mais 3 doit rester au centre.

5.5 Libre entrée séquentielle**

Objectif de l'exercice : Comme dans l'exercice 5.3 le problème de la libre entrée est étudier. Ici les firmes entrent les unes après les autres et non simultanément. Le modèle s'interprète en termes de choix de plates-formes électorales par des partis politiques.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0, 1]$. *Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Il est supposé que les* n *firmes vendent au même prix* $p = 1$. *Les consommateurs supportent un coût de transport croissant avec la distance parcourue : un consommateur qui se déplace de* x *à* e *subit un coût* $T(\mid e - x \mid)$ *où* T *est une fonction positive croissante. La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en* x *s'écrit donc :* $v - p - T(\mid e - x \mid)$ *s'il achète en* e *et 0 s'il n'achète pas. Le prix* p *(égal à 1) est supposé suffisamment inférieur à* v *pour que tous les consommateurs achètent à l'équilibre. Une entreprise doit payer un coût fixe* K *pour s'installer. L'entrée est séquentielle et les choix de localisation sont irrévocables. Par exemple : la firme 1 s'installe, la firme 2 observe ce choix, détermine le sien. Une fois une entreprise localisée il ne lui est plus possible de modifier son choix. Un équilibre de libre entrée est tel qu'aucune firme ne peut réaliser un profit positif en entrant.*

1. *Déterminer l'équilibre pour* $K \geq \frac{1}{2}$ *et pour* $\frac{1}{2} \geq K \geq \frac{1}{4}$.
2. *Généraliser pour* K *inférieur.*

Correction

1. Le problème est ici celui de la limitation de l'entrée : les premières entreprises qui entrent sur le marché choisissent leur localisation de telle sorte à maximiser leurs profits en empêchant pour cela l'installation des entrants potentiels suivants. Elles peuvent le faire car elles connaissent le coût d'entrée, K. Évidemment, si $K > 1$ aucune entreprise n'entre. Si $1 \geq K \geq \frac{1}{2}$, alors il n'y a qu'un seul entrant localisé en $\frac{1}{2}$.
   Si $\frac{1}{2} \geq K \geq \frac{1}{4}$, alors deux entreprises entrent avec $e_1^* = K$ et $e_2^* = 1 - K$ les entreprises se localisent aussi près que possible du centre mais sans permettre l'entrée sur les bords. En effet, si (par exemple) l'entreprise 2 cherchait à augmenter son profit en se localisant en $K + \varepsilon$, une troisième firme trouverait rentable d'entrer en s'installant en $1 - K$.
2. Pour K plus petit, la même logique s'applique, d'abord $e_1^* = K$ et $e_2^* = 1 - K$, ensuite les firmes s'installent à une distance $2K$ les unes des autres, jusqu'à ce que cela ne soit plus possible (intervalle vide inférieur à $4K$) et alors une dernière firme s'installe au milieu de l'intervalle restant. Par exemple, pour $\frac{1}{4} \geq K \geq \frac{1}{6}$, alors trois entreprises entrent et bloquent l'entrée d'une quatrième en se localisant en $e_1^* = K$, $e_2^* = 1 - K$ et $e_3^* = \frac{1}{2}$.

5.6 Choix du prix à localisation fixes**

Objectif de l'exercice : Analyser la concurrence en prix (voir chapitre 4) entre deux firmes localisées le long d'une ville linéaire. Les localisations sont supposées extrêmes, leur caractère endogène est étudié dans les exercices 5.7 et 5.8.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0,1]$. *L'entreprise* E *est localisée en 0, tandis que la firme* F *est installée en 1. Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Les consommateurs supportent un coût de transport croissant avec la distance parcourue : un consommateur qui se déplace de* x *à* e *subit un coût* $T(\mid e-x \mid) = t \mid e-x \mid$ *où* $t > 0$. *Soit* c_E *le coût marginal de production de l'entreprise* E *et soit* c_F *celui de l'entreprise* F. *La firme* E *détermine son prix* p_E *et simultanément la firme* F *détermine son prix* p_F. *La fonction d'utilité d'un consommateur est de la forme* $v - p - T$. *À l'équilibre, les prix sont supposés suffisamment inférieurs à* v *pour que tous les consommateurs achètent.*

1. *Écrire la fonction d'utilité d'un consommateur localisé en* x *selon son choix d'achat.*
2. *Il est supposé que* $|c_E - c_F| \leq t$, *expliquer pourquoi.*
3. *Tracer sur un même graphique les fonctions de coût généralisées* $p_E + tx$ *et* $p_F + t(1-x)$. *Montrer qu'il faut distinguer trois cas.*
4. *En déduire l'expression du profit de chaque firme en fonction des deux prix.*
5. *Déterminer l'équilibre de Nash du jeu de concurrence en prix (choix simultanés).*

Correction

1. La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en x s'écrit :

$$\begin{cases} v - p_E - tx & \text{s'il achète en } E \\ v - p_F - t(1-x) & \text{s'il achète en } F \\ 0 & \text{s'il n'achète pas.} \end{cases}$$

2. L'hypothèse $|c_E - c_F| \leq t$ assure qu'à l'équilibre les deux firmes produisent. En effet, même si une firme vend à un prix très proche de son coût marginal, cette condition implique que son concurrent peut attirer à lui une demande non nulle avec un prix strictement supérieur à son coût marginal.
3. La figure 5.4 montre qu'il faut distinguer trois cas pour déterminer la fonction de demande d'une entreprise. Si le prix de la firme E est trop élevé, tous les consommateurs achètent en F. Pour des prix p_E et p_F relativement proches, il existe un consommateur indifférent strictement compris entre 0 et 1. Enfin si le prix p_E est suffisamment faible, l'entreprise E peut attirer à elle toute la demande.

4. La fonction de profit de l'entreprise E s'écrit donc :

$$\pi_E(p_E, p_F) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_E \geq p_F + t \\ (p_E - c_E)\left(\frac{1}{2} + \frac{p_F - p_E}{2t}\right) & \text{si } p_F + t \geq p_E \geq p_F - t \\ p_E - c_E & \text{si } p_F - t \geq p_E \end{cases}$$

Le profit de l'entreprise F s'écrit de manière analogue :

$$\pi_F(p_E, p_F) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_F \geq p_E + t \\ (p_F - c_F)\left(\frac{1}{2} + \frac{p_E - p_F}{2t}\right) & \text{si } p_E + t \geq p_F \geq p_E - t \\ p_F - c_F & \text{si } p_E - t \geq p_F \end{cases}$$

5. Pour déterminer l'équilibre de Nash, il faut commencer par écrire les fonctions de meilleures réponses. Il est facile de voir qu'il ne peut pas exister d'équilibre de Nash avec $|p_E^* - p_F^*| > t$ car alors l'une des deux firmes réaliserait un profit nul, alors qu'en pratiquant un prix légèrement supérieur à son coût marginal elle peut avoir un profit strictement positif. Il est donc raisonnable de chercher un équilibre de Nash dans la zone de prix où le consommateur indifférent existe. Dans cette zone, les fonctions de meilleures réponses s'écrivent :

$$\begin{cases} p_E^*(p_F) = \frac{1}{2}(c_E + t + p_F) \\ \\ p_F^*(p_E) = \frac{1}{2}(c_F + t + p_E) \end{cases}$$

Ces fonctions de meilleures réponses ont pour intersection :

$$\begin{cases} p_E^* = t + \frac{1}{3}(2c_E + c_F) \\ \\ p_F^* = t + \frac{1}{3}(2c_F + c_E) \end{cases}$$

Les firmes pratiquent des prix différents à l'équilibre, ils sont tous les deux supérieurs au coût de transport t. Le prix le plus bas est affiché par la firme avec le coût marginal le plus bas. De plus, l'inégalité $|p_E^* - p_F^*| \leq t$ est bien vérifiée.

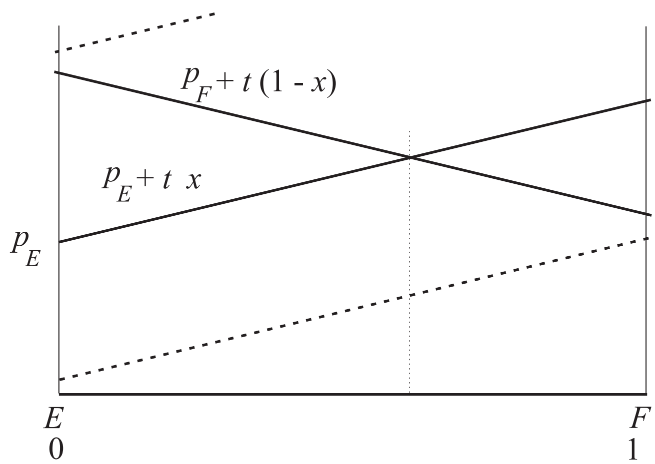


FIG. 5.4 – Prix totaux et demandes

5.7 Coûts linéaires, localisation et prix***

Objectif de l'exercice : Étudier le jeu initialement proposé par Hotelling (1929). Choix simultané de localisation suivi par un choix simultané de prix.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0, 1]$. *L'entreprise* E *est localisée en* e, *tandis que la firme* F *est installée en* f. *Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Les consommateurs supportent un coût de transport croissant avec la distance parcourue : un consommateur qui se déplace de* x *à* e *subit un coût* $T(\mid e - x \mid) = t \mid e - x \mid$ *où* $t > 0$. *La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en* x *s'écrit donc :*

$$\begin{cases} v - p_E - t \mid e - x \mid & \text{s'il achète en } E \\ v - p_F - t \mid f - x \mid & \text{s'il achète en } F \\ 0 & \text{s'il n'achète pas.} \end{cases}$$

À l'équilibre, les prix sont supposés suffisamment inférieurs à v *pour que tous les consommateurs achètent. Soit* c *le coût marginal de production commun aux deux entreprises. Les entreprises déterminent simultanément leur localisation, les observent, puis choisissent simultanément leur prix.*

1. *Déterminer le consommateur indifférent entre acheter en* E *ou en* F. *En déduire les fonctions de profits pour tous prix et localisations.*
2. *Quel est le candidat équilibre (localisation et prix) s'il est supposé que* $|p_E - p_F| \leq t(f - e)$ *?*
3. *Montrer que le candidat équilibre n'est pas, en fait, un équilibre.*

Correction

1. Soit e la localisation de l'entreprise E et f celle de l'entreprise f, avec comme convention que $e \leq f$. Notons $\widetilde{x}$ la coordonnée du consommateur indifférent entre acheter en E ou en F. Tous les consommateurs localisés en $x < \widetilde{x}$ achètent en E et tous ceux tels que $x > \widetilde{x}$ achètent en F. Pour déterminer le consommateur indifférent il faut distinguer trois cas : tous les consommateurs achètent en E, les consommateurs se répartissent entre E et F et enfin tous les consommateurs achètent en F. Dans le cas intermédiaire on a $e \leq \widetilde{x} \leq f$ et donc

   $$v - p_E - t(\widetilde{x} - e) = v - p_F - t(f - \widetilde{x}),$$

   d'où

   $$\widetilde{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } p_E > p_F + t(f - e) \\ \frac{e+f}{2} + \frac{p_F - p_E}{2t} & \text{si } |p_E - p_F| \leq t(f - e) \\ 1 & \text{si } p_E < p_F - t(f - e) \end{cases}$$

Il est alors facile de voir que le profit de l'entreprise E s'écrit :

$$\pi_E(p_E, p_F, e, f) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_E > p_F + t(f-e) \\ (p_E - c)\left(\frac{e+f}{2} + \frac{p_F - p_E}{2t}\right) & \text{si } |p_E - p_F| \leq t(f-e) \\ (p_E - c) & \text{si } p_E < p_F - t(f-e) \end{cases}$$

tandis que le profit de l'entreprise F est :

$$\pi_F(p_E, p_F, e, f) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_F > p_E + t(f-e) \\ (p_F - c)\left(\frac{2-e-f}{2} + \frac{p_E - p_F}{2t}\right) & \text{si } |p_E - p_F| \leq t(f-e) \\ (p_F - c) & \text{si } p_F < p_E - t(f-e) \end{cases}$$

2. Sous l'hypothèse $|p_E - p_F| \leq t(f-e)$ les fonctions de meilleures réponse du sous-jeu de concurrence en prix à localisations fixées sont :

$$\begin{cases} p_E = \frac{1}{2}(c + t(e+f) + p_F) \\ p_F = \frac{1}{2}(c + 2t - t(e+f) + p_E) \end{cases}$$

qui conduit à

$$\begin{cases} p_E = c + \frac{t}{3}(2+e+f) \\ p_F = c + \frac{t}{3}(4-e-f) \end{cases}$$

Si maintenant, ces grandeurs sont injectées dans les fonctions de profits, il vient :

$$\begin{cases} \pi_E(e,f) = \frac{t}{18}(2+e+f)^2 \\ \pi_F(e,f) = \frac{t}{18}(4-e-f)^2 \end{cases}$$

dont la maximisation conduirait à

$$e = f = \frac{1}{2}$$

car π_E est croissant en e et π_F est décroissant avec f.

3. Le candidat “équilibre en prix” que nous avons exhibé pour le sous-jeu, n'est bien qu'un candidat équilibre : s'il existe un équilibre en stratégies pures au sous-jeu en prix, alors il s'agit du candidat caractérisé. Toutefois, il se peut qu'il n'existe pas d'équilibre. Lorsque $p_F = c + \frac{t}{3}(4-e-f)$ et lorsque $f-e$ est petit, il est tentant pour la firme E de dévier vers $p_F - t(f-e) - \varepsilon$ de telle sorte à attirer toute la demande. En effet, la fonction de profit en prix n'est pas continue et surtout elle n'est pas quasi-concave lorsque e et f sont proches comme le montre la figure 5.5. La fonction de meilleure réponse utilisée ne donne qu'un maximum local, c'est-à-dire pour p_E compris entre $p_F - t(f-e)$ et $p_F + t(f-e)$. Ce maximum local peut conduire à un profit inférieur à celui obtenu en $p_F - t(f-e) - \varepsilon$ comme sur la figure 5.5. Cette déviation

assure un profit, π_E^d, égal à $\frac{2t}{3}(2+e-2f)$ et donc une telle déviation est profitable si et seulement si (la deuxième ligne donne la condition pour que la firme F dévie)

$$\begin{cases} 12\,(2+e-2f) > (2+e+f)^2 \\ \\ 12\,(2+e-2f) > (4-e-f)^2 \end{cases}$$

La figure 5.6 présente la zone d'existence de l'équilibre en prix en stratégies pures. Seulement si e et f sont dans la zone au dessus des deux courbes en pointillé, il existe un équilibre en stratégies pures[4]. Il s'agit d'une excellente mise en garde contre un usage trop rapide des conditions du premier ordre. D'autant plus qu'Hotelling dans son article pionnier de 1929 a commis cette erreur. Pour plus de détails, voir l'article : "On Hotelling's "Stability in Competition" " de Claude d'Aspremont, Jean-Jaskold Gabszewicz et Jacques-François Thisse dans *Econometrica* ; 47(5), Sept. 1979, pages 1145-50.

[4]Bien entendu, si la contrainte $e \leq f$ est levée, il existe aussi une zone symétrique par rapport à la droite $e = f$, c'est-à-dire en bas à droite du graphique.

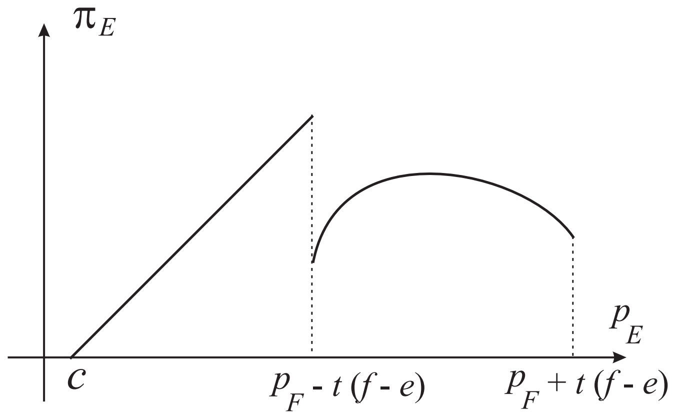


FIG. 5.5 – Fonction de profit

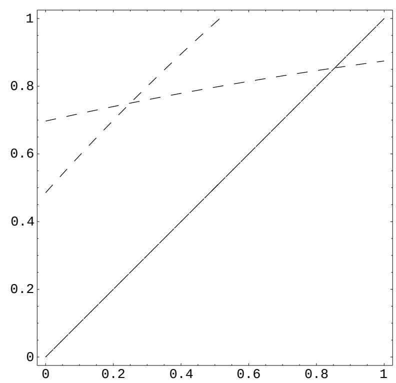


FIG. 5.6 – Existence de l'équilibre en prix

5.8 Coût quadratiques, localisations et prix**

Objectif de l'exercice : En présence de coût de transport quadratique par rapport à la distance parcourue, montrer qu'il existe toujours un équilibre (en stratégies pures) du sous-jeu de concurrence en prix à localisations fixées. Établir ensuite les localisations à l'équilibre de Nash[5].

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0, 1]$. *L'entreprise* E *est localisée en* e, *tandis que la firme* F *est installée en* f. *Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Les consommateurs supportent un coût de transport croissant avec la distance parcourue : un consommateur qui se déplace de* x *à* e *subit un coût* $T(\mid e - x \mid) = t(e - x)^2$ *où* $t > 0$. *La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en* x *s'écrit* $v - p - T$ *s'il achète et 0 sinon. À l'équilibre, les prix sont supposés suffisamment inférieurs à* v *pour que tous les consommateurs achètent. Soit* c *le coût marginal de production commun aux deux entreprises. Les entreprises déterminent simultanément leur localisation. Les observent, puis choisissent simultanément leur prix.*

1. *Écrire la fonction d'utilité du consommateur* x *en fonction du magasin où il achète.*
2. *Déterminer le consommateur indifférent entre acheter en* E *ou en* F. *En déduire qu'il varie continuement de 0 à 1 avec les prix.*
3. *Écrire les fonctions de demande à prix et localisation donnés. En déduire les fonctions de meilleures réponses dans le sous-jeu de concurrence en prix à localisations fixées, ainsi que l'équilibre en prix dans ce sous-jeu.*
4. *Trouver les localisations d'équilibre (discuter selon qu'il est possible ou pas de se localiser à l'extérieur du segment* $[0, 1]$*).*

Correction

1. La fonction d'utilité du consommateur s'écrit :
$$\begin{cases} v - p_E - t(e - x)^2 & \text{s'il achète en } E \\ v - p_F - t(f - x)^2 & \text{s'il achète en } F \\ 0 & \text{s'il n'achète pas.} \end{cases}$$
2. La coordonnée du consommateur indifférent, $\widetilde{x}$, vérifie l'équation :
$$v - p_E - t(x - e)^2 = v - p_F - t(x - f)^2$$
soit après calcul et pour $e \neq f$,
$$\widetilde{x} = \frac{e + f}{2} + \frac{p_F - p_E}{2t(f - e)}$$

[5] Ce modèle est issu de l'article "On Hotelling's "Stability in Competition" " de Claude d'Aspremont, Jean-Jaskold Gabszewicz et Jacques-François Thisse dans *Econometrica* ; 47(5), Sept. 1979, pages 1145-50.

Comme avec des coûts de transport linéaires, le consommateur indifférent est plus où moins proche du milieu de E et F, selon l'écart de prix. En particulier si par exemple $p_E < p_F$, le consommateur indifférent se trouve plus vers F que vers E.

Comme le montre le graphique 5.7 la fonction de demande ne présente plus de discontinuité et $\widetilde{x}$ varie continuement de 0 à 1.

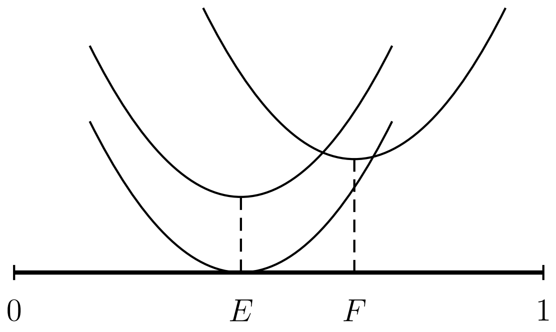


FIG. 5.7 – Coût quadratiques

3. La fonction de demande de l'entreprise E s'écrit donc

$$D_E\left(p_E, p_F\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_E < p_F - t\left(f-e\right)\left(2-e-f\right) \\ \frac{e+f}{2} + \frac{p_F - p_E}{2t(f-e)} & \text{si } p_F - t\left(f-e\right)\left(2-e-f\right) < p_E < p_F + t\left(f^2 - e^2\right) \\ 0 & \text{si } p_F + t\left(f-e\right)\left(f+e\right) < p_E \end{cases}$$

Il est alors possible de déterminer les prix à e et f fixés. L'entreprise E maximise le profit $\Pi_E = \left(p_E - c\right) D_E\left(p_E, p_F\right)$. La condition du premier ordre (pour $\widetilde{x} \in [0,1]$) nous donne la fonction de meilleures réponses pour E :

$$p_E^*\left(p_F\right) = \frac{c + p_F + t\left(e+f\right)\left(f-e\right)}{2}$$

grâce au milieu des deux racines, soit encore

$$p_E^*\left(p_F\right) = \frac{c + p_F + t\left(f^2 - e^2\right)}{2}$$

Pour obtenir la meilleure réponse de F à p_E, soit on refait le calcul en dérivant $\left(p_F - c\right)\left(1 - D_E\right)$ soit on fait le changement de variable $e \to 1 - f$ et $f \to 1 - e$. Dans les deux cas, il vient que

$$p_F^*\left(p_E\right) = \frac{c + p_E + 2t\left(f-e\right) - t\left(f^2 - e^2\right)}{2}.$$

L'équilibre de Nash s'obtient à l'intersection des fonctions de meilleures réponses :

$$p_E^* = c + \frac{2t\left(f-e\right) + t\left(f^2 - e^2\right)}{3} = c + \frac{t\left(f-e\right)}{3}\left(2+f+e\right),$$

et

$$p_F^* = c + \frac{4t(f-e) - t(f^2 - e^2)}{3} = c + \frac{t(f-e)}{3}(4 - f - e).$$

Les prix d'équilibre sont toujours supérieurs au coût marginal de production c (il s'agit bien entendu d'une condition nécessaire). Lorsque le coût de transport t tend vers 0, alors les prix tendent vers c. En effet, le modèle se confond alors avec celui de la concurrence à la Bertrand. Si $e = f$ on trouve aussi (quelque soit t) que les deux prix sont égaux à c. Si les entreprises sont localisées au même point, alors les consommateurs se décident uniquement en fonction du prix et ils achètent là où le prix est le plus bas, le résultat de Bertrand réapparaît. Un dernier cas de figure particulier surgit lorsque les firmes sont localisées de manière symétrique par rapport à $1/2$ ($f = 1 - e$) les prix étant alors égaux (symétrie du modèle).

4. Une fois l'équilibre de Nash du sous-jeu de concurrence en prix déterminé, il est possible d'écrire les profits des deux entreprises en fonction de e et de f. Il suffit pour cela de remplacer p_E et p_F par p_E^* et p_F^*. Commençons par les fonctions de demandes :

$$D_E(e,f) = \frac{1}{3} + \frac{e+f}{6} = \frac{1}{6}(2 + e + f)$$

et donc

$$D_F(e,f) = \frac{1}{3} + \frac{1 - e + 1 - f}{6} = \frac{2}{3} - \frac{e+f}{6} = \frac{1}{6}(4 - e - f).$$

Les fonctions de demandes exhibent l'effet d'agglomération mis en avant par Hotelling dans son article : D_E croît avec e et D_F décroît avec f ce qui pousse à des localisations au centre. En revanche les marges $p_E^* - c$ et $p_F^* - c$ sont décroissantes pour respectivement e compris entre 0 et f et pour f entre e et 1. Il existe donc deux forces contradictoires : une force "demande" qui pousse à l'agglomération au centre et une force "concurrence" en prix qui éloigne les entreprises l'une de l'autre.

Les fonctions de profits reflètent ces deux forces et s'écrivent :

$$\pi_E(e,f) = \frac{t(f-e)}{18}(2 + f + e)^2$$

et

$$\pi_F(e,f) = \frac{t(f-e)}{18}(4 - f - e)^2$$

La recherche des fonctions de meilleures réponses montre que si e et f doivent être entre 0 et 1, alors pour tout f la fonction π_E décroît avec e et donc $e^*(f) = 0$. Symétriquement $f^*(e) = 1$. Les firmes s'éloignent au maximum l'une de l'autre. Il s'agit du *principe de différenciation maximale*. C'est-à-dire que la force concurrence en prix domine la force demande. De plus, si les firmes sont autorisées à se localiser à l'extérieur du segment $[0,1]$ les localisations d'équilibre sont $e^* = -\frac{1}{4}$ et $f^* = \frac{5}{4}$: les entreprises préfèrent se localiser à l'extérieur de l'espace où sont les consommateurs !

Pour interpréter ce résultat on peut revenir sur les incitations des firmes lors du choix de localisation. Pour cela, considérons le profit de la firme E (avant simplifications) :

$$\pi_E\left(e,f\right)=\pi_E\left(p_E^*\left(e,f\right),p_F^*\left(e,f\right),e,f\right)$$

et dérivons le par rapport à e, il vient

$$\frac{\partial\pi_E\left(e,f\right)}{\partial e}=\frac{p_E^*}{\partial e}\frac{\partial\pi_E\left(p_E^*,p_F^*e,f\right)}{\partial p_E}+\frac{p_F^*}{\partial e}\frac{\partial\pi_E\left(p_E^*,p_F^*e,f\right)}{\partial p_F}+\frac{\partial\pi_E\left(p_E^*,p_F^*e,f\right)}{\partial e}$$

puisque par définition p_E^* maximise le profit de E lorsque $p_F=p_F^*$, on a

$$\frac{\partial\pi_E\left(p_E^*,p_F^*e,f\right)}{\partial p_E}=0$$

et donc

$$\frac{\partial\pi_E\left(e,f\right)}{\partial e}=\frac{p_F^*}{\partial e}\frac{\partial\pi_E\left(p_E^*,p_F^*e,f\right)}{\partial p_F}+\frac{\partial\pi_E\left(p_E^*,p_F^*e,f\right)}{\partial e}$$

Cette expression fait apparaître deux effets opposés liés à une augmentation de e. Tout d'abord un effet prix négatif :

$$\frac{p_F^*}{\partial e}\frac{\partial\pi_E\left(p_E^*,p_F^*e,f\right)}{\partial p_F}<0$$

car

$$\frac{p_F^*}{\partial e}<0\text{ et }\frac{\partial\pi_E\left(p_E^*,p_F^*e,f\right)}{\partial p_F}>0$$

si E se rapproche de son concurrent, il exacerbe la concurrence en prix et son profit diminue car les prix diminuent.

En revanche le deuxième effet est un effet demande et il est lui positif :

$$\frac{\partial\pi_E\left(p_E^*,p_F^*e,f\right)}{\partial e}>0$$

si E se rapproche de son concurrent, il attire plus de consommateurs ce qui à tendance à augmenter son profit.

Les calculs ont montré que l'effet prix domine l'effet demande lorsque e et f sont compris entre $-1/4$ et $5/4$.

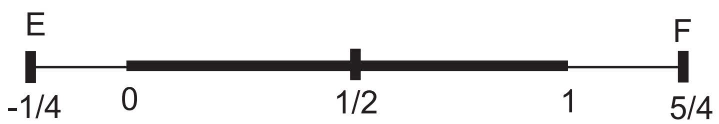


FIG. 5.8 – Localisations d'équilibre avec des coûts de transport quadratiques

5.9 Coûts quadratiques et trois firmes***

Objectif de l'exercice : Étendre l'analyse de l'exercice 5.8 à trois firmes. Montrer comment l'effet demande se combine dans ce cas avec l'effet prix.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0,1]$. *L'entreprise* E *est localisée en* e, *l'entreprise* G *en* g *tandis que la firme* F *est installée en* f. *Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Les consommateurs supportent un coût de transport croissant avec la distance parcourue : un consommateur qui se déplace de* x *à* e *subit un coût* $T(\mid e-x\mid) = t(e-x)^2$ *où* $t>0$. *La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en* x *s'écrit donc :*

$$\begin{cases} v - p_E - t(e-x)^2 & \text{s'il achète en } E \\ v - p_G - t(g-x)^2 & \text{s'il achète en } G \\ v - p_F - t(f-x)^2 & \text{s'il achète en } F \\ 0 & \text{s'il n'achète pas.} \end{cases}$$

À l'équilibre, les prix sont supposés suffisamment inférieurs à v *pour que tous les consommateurs achètent. Soit* c *le coût marginal de production commun aux entreprises, elles déterminent simultanément leur localisation, les observent, puis choisissent simultanément leur prix. Pour simplifier, on supposera toujours que* $e<g<f$ *et on se concentrera uniquement sur les cas où les trois firmes vendent.*

1. *Déterminer le consommateur indifférent entre acheter en* E *ou en* G. *Puis le consommateur indifférent entre acheter en* F *ou en* G. *En déduire les fonctions de demande à prix et localisation donnés.*
2. *À partir des fonctions de meilleures réponses dans le sous-jeu de concurrence en prix à localisations fixées, déduire l'équilibre en prix dans ce sous-jeu.*
3. *Trouver les localisations d'équilibre (écrire les conditions du premier ordre qui le définissent puis vérifier que* $e^* = \frac{1}{8}$, $g^* = \frac{1}{2}$ *et* $f^* = \frac{7}{8}$ *est bien un équilibre).*

Correction

1. Soit $\widetilde{x_1}$ le consommateur indifférent entre acheter en E ou en G et $\widetilde{x_2}$ le consommateur indifférent entre acheter en F ou en G. On a :

$$\widetilde{x_1} = \frac{e+g}{2} + \frac{p_G - p_E}{2t(g-e)}$$

et

$$\widetilde{x_2} = \frac{g+f}{2} + \frac{p_F - p_G}{2t(f-g)}.$$

Les fonctions de demandes sont : $D_E = \widetilde{x_1}$, $D_G = \widetilde{x_2} - \widetilde{x_1}$ et $D_F = \widetilde{x_2}$.

2. Les fonctions de meilleures réponses s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{r} p_E = \frac{1}{2}\left(c + p_G + t\left(g^2 - e^2\right)\right) \\ p_G = \frac{1}{2}\left(c + t\left(g - e\right)\left(f - g\right) + \frac{(g-e)p_F + (f-g)p_E}{f-e}\right) \\ p_F = \frac{1}{2}\left(c + p_G + t\left(f - g\right)\left(2 - f - g\right)\right) \end{array}\right.$$

La résolution de ce système de trois équations à trois inconnues conduit à

$$\left\{\begin{array}{r} p_E = c + \frac{g-e}{6(f-e)}\left(2\left(f - g\right) + \left(f - e\right)\left(3e + 2g + f\right)\right)t \\ p_G = c + \frac{g-e}{3(f-e)}\left(f - g\right)\left(2 - e + f\right)t \\ p_F = c + \frac{f-g}{6(f-e)}\left(f\left(6 - 3f - 2g\right) + e^2 - 2e\left(4 - f - g\right)\right)t \end{array}\right.$$

3. En remplaçant les prix par les prix d'équilibres, les fonctions de profits s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{r} \pi_E\left(e, g, f\right) = \frac{(g-e)t}{72(f-e)^2}\left(2\left(f - g\right) + \left(f - e\right)\left(3e + 2g + f\right)\right)^2 \\ \pi_G\left(e, g, f\right) = \frac{(g-e)t}{18(f-e)}\left(f - g\right)\left(2 - e + f\right)^2 \\ \pi_F\left(e, g, f\right) = \frac{(f-g)t}{72(f-e)^2}\left(f\left(6 - 3f - 2g\right) + e^2 - 2e\left(4 - f - g\right)\right)^2 \end{array}\right.$$

La résolution (un peu fastidieuse sans un logiciel de calcul formel) à l'aide des conditions du premier ordre, conduit à une unique solution :

$$e^* = \frac{1}{8},\ g^* = \frac{1}{2} \text{ et } f^* = \frac{7}{8}.$$

Ce résultat est intéressant car une lecture rapide du modèle à deux firmes (application du principe de différenciation maximale) aurait pu conduire à penser qu'avec trois entreprises l'équilibre aurait été 0, $\frac{1}{2}$ et 1. Or, ici les firmes s'agglomèrent partiellement. En effet, lorsqu'une entreprise périphérique se rapproche du centre, la firme centrale réagit en baissant son prix mais moins qu'en l'absence de la troisième firme.

5.10 Coût quadratique, duopole, entrée séquentielle**

Objectif de l'exercice : Dans la logique des modèles à la Stackelberg (voir les exercices 3.14 et 4.8 entre autres) on étudie ici l'entrée d'une firme avant l'autre. À la différence de l'exercice 5.4, les firmes anticipent la concurrence en prix.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0,1]$. *L'entreprise* E *est localisée en* e, *tandis que la firme* F *est installée en* f. *Il sera supposé que* $e \leq f$. *Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Les consommateurs supportent un coût de transport croissant avec la distance parcourue : un consommateur qui se déplace de* x *à* e *subit un coût* $T(\mid e-x \mid) = t(e-x)^2$ *où* $t>0$. *La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en* x *s'écrit donc :*

$$\begin{cases} v - p_E - t(e-x)^2 & \textit{s'il achète en } E \\ v - p_F - t(f-x)^2 & \textit{s'il achète en } F \\ 0 & \textit{s'il n'achète pas.} \end{cases}$$

À l'équilibre, les prix sont supposés suffisamment inférieurs à v *pour que tous les consommateurs achètent. Soit* c *le coût marginal de production commun aux deux entreprises. L'entreprise* E *détermine sa localisation, l'entreprise* F *l'observe et détermine la sienne (les entreprises peuvent se localiser n'importe où entre* $-\infty$ *et* $+\infty$*). Les choix de localisation observés, les entreprises fixent simultanément leur prix.*

1. *Rappeler l'équilibre en prix à localisation fixes (voir l'exercice 5.8).*
2. *Trouver les localisations d'équilibre.*

Correction

1. L'équilibre du sous-jeu de concurrence en prix s'obtient à l'intersection des fonctions de meilleures réponses˜ :

$$p_E^* = c + \frac{2t(f-e) + t(f^2-e^2)}{3} = c + \frac{t(f-e)}{3}(2+f+e),$$

et

$$p_F^* = c + \frac{4t(f-e) - t(f^2-e^2)}{3} = c + \frac{t(f-e)}{3}(4-f-e).$$

Les profits des deux entreprises en fonction de e et de f s'obtiennent en remplaçant p_E et p_F par p_E^* et p_F^* dans les fonctions de profits. Il vient

$$D_E(e,f) = \frac{1}{3} + \frac{e+f}{6} = \frac{1}{6}(2+e+f)$$

et donc

$$D_F(e,f) = \frac{1}{3} + \frac{1-e+1-f}{6} = \frac{2}{3} - \frac{e+f}{6} = \frac{1}{6}(4-e-f).$$

et donc
$$\pi_E(e,f) = \frac{t(f-e)}{18}(2+f+e)^2$$
et
$$\pi_F(e,f) = \frac{t(f-e)}{18}(4-f-e)^2$$

2. L'entreprise F détermine f à e fixé et choisit donc
$$f^*(e) = \frac{4+e}{3}.$$
L'entreprise E maximise donc
$$\pi_E(e,f^*(e)) = \frac{t(4-2e)}{486}(10+4e)^2$$
ce qui la conduit à
$$e^* = \frac{1}{2}$$
et donc à
$$f^* = \frac{3}{2}.$$
Ou alors de manière symétrique en $-\frac{1}{2}$. En particulier cela assure au leader un profit quatre fois plus important que celui du suiveur. Les prix sont différents : $P_E^* = c + \frac{4}{3}t > c + \frac{2}{3}t = P_F^*$ et le consommateur indifférent se trouve localisé en $\frac{2}{3}$.

FIG. 5.9 – Localisations d'équilibre avec entrée séquentielle

5.11 Prix discriminatoire et Bertrand**

Objectif de l'exercice : Examiner des politiques commerciales plus variées, en particulier la discrimination facilitée ici par la dispersion des consommateurs.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0,1]$. L'entreprise E est localisée en e, tandis que la firme F est installée en f. Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment, ils achètent 0 ou 1 unité de bien et leur masse totale est normalisée à 1. Les entreprises prennent à leur charge le coût de transport mais affiche un prix (port compris) différent pour différentes localisations. De fait l'ensemble des stratégies d'une firme est l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $[c,+\infty[$. Notons $p_E(x)$ la stratégie de l'entreprise E et $p_F(x)$ celle de l'entreprise F. Les consommateurs achètent à la firme la moins chère et si les prix sont égaux à la firme la plus proche. Le coût de transport pour une entreprise linéaire : l'entreprise localisée en e qui livre en x subit un coût $t|e-x|$.

1. *Écrire le profit de chaque entreprise à e, f, $p_E(x)$ et $p_F(x)$ fixés.*
2. *À e et f fixés, déterminer l'équilibre de Nash du jeu de concurrence en prix.*
3. *Déterminer les parts de marché et les profits de chaque entreprise en fonction de e et f. En déduire l'équilibre de Nash du jeu localisation.*
4. *Comparer les profits d'équilibre des firmes du jeu de localisations simultanées avec et sans discrimination par les prix (c'est-à-dire prix uniforme pour tous les consommateurs) et où les consommateurs payent eux-même le coût de transport.*

Correction

1. Le profit de l'entreprise E s'écrit :

$$\pi_E(p_E(x), p_F(x), e, f) = \int_{s_E} (p_E(x) - c - t|x-e|)\, dx + \frac{1}{2}\int_{s_{EF}} (p_E(x) - c - t|x-e|)\, dx,$$

   où s_E est la part de marché servie exclusivement par E c'est-à-dire que $s_E = \{x : p_E(x) < p_F(x) \text{ ou } (p_E(x) = p_F(x) \text{ et } |x-e| < |x-f|)\}$, tandis que s_{EF} est la part de marché partagée entre E et F c'est-à-dire $s_{EF} = \{x : p_E(x) = p_F(x) \text{ et } |x-e| = |x-f|\}$. Toutefois, s_{EF} est de mesure nulle.

2. La concurrence est à la Bertrand on s'attend donc à ce que les firmes vendent au coût marginal. Toutefois, les firmes ne sont pas symétriques sur le marché du consommateur x. En effet pour vendre à x, il en coûte à E : $c + t|e-x|$ tandis que pour F il s'agit de $c + t|f-x|$. Lorsque deux firmes asymétriques en termes de coût marginaux sont en concurrence, la firme la plus efficace remporte le marché en vendant au coût marginal de son concurrent. Il est

donc facile de voir ici que l'unique équilibre de Nash (en stratégies pures) du sous-jeu de concurrence en prix est :

$$p_E^*(x,e,f) = p_F^*(x,e,f) = c + \min\{t|e-x| \ ; \ t|f-x|\}.$$

3. Les deux firmes affichent le même prix. Dans ce cas, il a été supposé que les consommateurs achetaient à la firme la plus proche (qui est aussi celle dont le coût total de production plus de livraison est le plus bas). La part de marché de l'entreprise E est donc $\frac{e+f}{2}$ (avec la convention $e \leq f$) et celle de l'entreprise F est $1 - \frac{e+f}{2}$.
   Le profit de l'entreprise E s'écrit :

$$\int_0^{\frac{e+f}{2}} (t|f-x| - t|e-x|)\,dx = t\int_0^e (f-x-e+x)\,dx + t\int_e^{\frac{e+f}{2}} (f-x-x-e)\,dx$$

   soit

$$\pi_E(e,f) = \frac{t}{4}\left(f^2 + 2ef - 3e^2\right)$$

   de manière similaire,

$$\pi_F(e,f) = \frac{t}{4}\left(e^2 - 4e + 2ef + 4f - 3f^2\right).$$

   Les fonctions de meilleures réponses sont

$$e^*(f) = \frac{f}{3} \text{ et } f^*(e) = \frac{2+e}{3},$$

   d'où l'équilibre de Nash :

$$e^* = \frac{1}{4}, \text{ et } f^* = \frac{3}{4}.$$

4. Les profits d'équilibres sont $\pi_E^* = \pi_F^* = \frac{3t}{16}$. Si la concurrence n'était pas en prix discriminant les entreprises se localiseraient en 0 et 1 et vendraient à $c+t$, c'est-à-dire qu'elles feraient un profit $\frac{t}{2} > \frac{3t}{16}$.

5.12 Prix discriminatoire et Cournot**

Objectif de l'exercice : Comme dans l'exercice 5.11 les firmes peuvent afficher un prix différent pour chaque adresse. La concurrence, toutefois, se déroule ici en quantité.

Soit une «ville linéaire» représentée par un segment $[0,1]$. *L'entreprise* E *est localisée en* e*, tandis que la firme* F *est installée en* f. *Les consommateurs sont uniformément répartis le long de ce segment. En chaque localisation* x *se "trouve" une fonction inverse de demande* $P(Q(x))$ *avec* $Q(x) = q_E(x) + q_F(x)$. *Les entreprises prennent à leur charge le coût de transport. Le prix (port compris) est donc différent d'une localisation à l'autre. L'ensemble des stratégies d'une firme (une quantité pour chaque* x*) est l'ensemble des fonctions de* $[0,1]$ *dans* $[0,+\infty[$. *Notons* $q_E(x)$ *la stratégie de l'entreprise* E *et* $q_F(x)$ *celle de l'entreprise* F. *Le coût de transport pour une entreprise est linéaire : l'entreprise localisée en* e *qui livre en* x *subit un coût* $t|e-x|$. *Pour permettre des calculs complets, il sera supposé que* $P(Q) = a - bQ$.

1. *À* e *et* f *fixés, déterminer les fonctions* $q_E(x,e,f)$ *et* $q_F(x,e,f)$. *En déduire le prix* $p(x,e,f)$ *et tracer le pour* x *variant de 0 à 1.*
2. *Montrer comment s'obtiennent les fonctions de profits* $\pi_E(e,f)$ *et* $\pi_F(e,f)$*, et déterminer les pour* $a = b = t = 1$ *et* $c = 0$.
3. *Jusqu'à la fin de l'exercice, il est supposé que* $a = b = t = 1$ *et* $c = 0$. *Montrer que si* $f = \frac{1}{2}$, $q_E^*(x)$ *est strictement positif pour tout* x *si* $e \geq \frac{1}{4}$*, tandis que si* $e \leq \frac{1}{4}$ *l'entreprise* E *ne vend pas à tous les consommateurs.*
4. *Étudier comment varie* $\pi_E\left(e, \frac{1}{2}\right)$ *avec* e. *En utilisant la symétrie du modèle, en déduire un équilibre de Nash du jeu de localisations simultanées.*

Correction

1. En chaque localisation x les entreprises jouent un jeu de concurrence à la Cournot. La firme E a un coût marginal de production $c_E(x) = c + t|e-x|$ et celui de l'entreprise F est $c_F(x) = c + t|f-x|$. D'où (voir le chapitre sur la concurrence à la Cournot) l'équilibre de Nash :

$$q_E^*(x,e,f) = \max\left\{0 \; ; \; \frac{1}{3b}(a - c - 2t|e-x| + t|f-x|)\right\},$$

de manière symétrique

$$q_F^*(x,e,f) = \max\left\{0 \; ; \; \frac{1}{3b}(a - c - 2t|f-x| + t|e-x|)\right\}.$$

Le prix est défini en trois morceaux : $0 \leq x \leq e$, $e \leq x \leq f$ et $f \leq x \leq 1$. Pour $0 \leq x \leq e$ il vient (en supposant que les quantités sont bien positives pour tout x) :

$$p = p_0 = \frac{1}{3}(a + 2c + t(e + f - 2x)),$$

si $e \leq x \leq f$, alors

$$p = p_1 = \frac{1}{3}\left(a + 2c + t\left(f - e\right)\right),$$

c'est-à-dire que le prix est identique pour tous les consommateurs situés entre les deux firmes. Enfin, pour $f \leq x \leq 1$

$$p = p_2 = \frac{1}{3}\left(a + 2c + t\left(2x - e - f\right)\right).$$

La figure 5.10 montre comment le prix varie : il est élevé pour les consommateurs situés à la périphérie. En effet il s'agit de consommateur "captif" pour la firme la plus proche. Ce prix diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche du centre pour atteindre un prix minimum affiché pour tous les consommateurs situés entre les deux firmes et pour lesquels la concurrence est la plus vive.

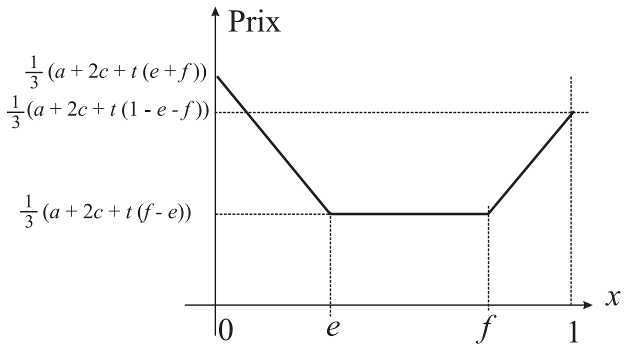


FIG. 5.10 – Prix en chaque localisation

2. En chaque localisation le profit s'écrit $\pi_E\left(x, e, f\right) = \frac{1}{9b}\left(a - c - 2t|e - x| + t|f - x|\right)^2$. Le profit total est donc

$$\pi_E\left(e, f\right) = \int_0^1 \pi_E\left(x, e, f\right) dx$$

pour le calculer il faut couper l'intégrale en trois morceaux (ou plus s'il existe des zones de monopole) afin de lever les valeurs absolues. Après les calculs il vient par exemple lorsqu'il y a duopole pour tout x,

$$\begin{aligned}\pi_E\left(e, f\right) = \frac{1}{27b}\big[&3\,a^2 + 3\,c^2 + 3\,c\,\left(1 - 4\,e + 4\,e^2 + 2\,f - 2\,f^2\right)\,t \\ &+ \left(1 + 4\,e^3 - 12\,e^2\,\left(-1 + f\right) + 3\,f + 3\,f^2 - 4\,f^3 + 6\,e\,\left(-1 - 2\,f + 2\,f^2\right)\right)\,t^2 \\ &-3\,a\,\left(2\,c + \left(1 - 4\,e + 4\,e^2 + 2\,f - 2\,f^2\right)\,t\right)\big]\end{aligned}$$

Pour $a = b = t = 1$ et $c = 0$ il vient (toujours en supposant qu'il y a duopole pour tout x)

$$\pi_E\left(e, f\right) = \frac{1 + 4\,e^3 - 3\,f - 12\,e^2\,f + 9\,f^2 - 4\,f^3 + 6\,e\,\left(1 - 2\,f + 2\,f^2\right)}{27}$$

et

$$\pi_F\,(e,f) = \frac{1 + 4\,e^3 + 6\,f - 4\,f^3 - 3\,e^2\,(-3 + 4\,f) + 3\,e\,(-1 - 4\,f + 4\,f^2)}{27}.$$

3. Lorsque $f = \frac{1}{2}$, et $e \geq \frac{1}{4}$, il est facile de voir que $q_E^*\left(e, \frac{1}{2}, x\right)$ est toujours positif.
4. Lorsque $f = \frac{1}{2}$, et $e \geq \frac{1}{4}$, on a

$$\pi_E\,(e,f) = \frac{5 + 12\,e - 24\,e^2 + 16\,e^3}{108},$$

dont la dérivée

$$\frac{(1 - 2\,e)^2}{9}$$

est strictement croissante avec e.
Si maintenant $e < \frac{1}{4}$. Le profit de l'entreprise E s'écrit

$$\int_0^{\frac{1}{2}+2e} \pi_E^*\left(e, \frac{1}{2}, x\right) dx$$

soit après calculs (il faut couper en morceaux)

$$\frac{3 + 12\,e - 32\,e^2 + 32\,e^3}{72}$$

dont il est facile de montrer qu'il s'agit d'une fonction strictement croissante pour $0 \leq e \leq \frac{1}{4}$. Il en résulte que si $f = \frac{1}{2}$, la meilleure réponse de E et de se localiser en $\frac{1}{2}$. Par symétrie, si $e = \frac{1}{2}$, la meilleure réponse de F est $f = \frac{1}{2}$. Un équilibre de Nash est donc :

$$e^* = f^* = \frac{1}{2}.$$

5.13 Salop**

Objectif de l'exercice : Afin d'étudier l'entrée, il est commode de transformer la ville linéaire en ville circulaire. Pour un nombre d'entreprises fixe et pour des localisations symétriques, on détermine un équilibre de Nash du jeu de concurrence en prix. L'entrée est ensuite étudiée, à la fois du point de vue des firmes (libre entrée) et du point de vue social (maximisation du bien-être).

Soit n firmes localisées de manière symétrique (la firme i est installée en $l_i = \frac{i-1}{n}$) sur un cercle de longueur 1 où sont uniformément répartis des consommateurs dont la masse totale est normalisée à 1. Chaque entreprise a un coût marginal constant de production égal à c. Les consommateurs achètent 1 ou 0 unité du bien. La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en x s'écrit :

$$u = \begin{cases} v - p_i - t\,|x - l_i| & \text{S'il achète au magasin } i \\ 0 & \text{S'il n'achète pas} \end{cases}$$

1. *À n fixé, chercher un équilibre symétrique du jeu de concurrence en prix (choix simultanés).*
2. *Soit $f > 0$ le coût fixe d'installation, déterminer le nombre n d'entreprises qui peuvent s'installer le long du cercle (les localisations sont pour tout n symétrique c'est-à-dire de la forme $\frac{i-1}{n}$). Comment varie l'équilibre en fonction des paramètres du modèle ?*
3. *Étant donnée la concurrence en prix, quel serait le nombre d'entreprises qui maximiserait le bien-être social dans ce modèle ?*

Correction

1. Cherchons un équilibre symétrique $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$. Il faut bien remarquer qu'une entreprise n'a en fait que deux concurrents. Soit l'entreprise localisée en 0. Supposons que toutes les autres entreprises pratiquent le prix p. Quelle est sa demande lorsqu'elle fait varier son prix ?

   Regardons ce qu'il arrive sur le segment $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ qui représente "la moitié" du marché de cette entreprise, si elle affiche le prix p_1. La demande de l'entreprise localisée en 0 est $\widetilde{x}$ où $\widetilde{x}$ est la coordonnée du consommateur indifférent entre acheter en 0 ou acheter en $\frac{1}{n}$.

   $$p_1 + t\widetilde{x} = p + t\left(\frac{1}{n} - \widetilde{x}\right)$$

   soit

   $$\widetilde{x} = \frac{1}{2n} + \frac{p - p_1}{2t}$$

   Nous travaillons ici sous l'hypothèse implicite que p_1 n'est pas assez petit pour capter toute la demande du voisin (i.e. $\widetilde{x} < \frac{1}{n}$). Si ce n'était pas le cas, cela serait contradictoire avec le fait que n entreprises sont actives. Nous

vérifierons que le prix d'équilibre ainsi obtenu est cohérent avec cette hypothèse implicite. La demande totale qui s'adresse à l'entreprise localisée en 0 qui pratique le prix p_1 est $2\widetilde{x}$.
Donc $\pi_1 = (p_1 - c)\left(\frac{1}{n} + \frac{p-p_1}{t}\right)$ qui est maximum en

$$p_1 = \frac{c + p + \frac{t}{n}}{2}$$

Pour que p soit un prix pratiqué par toutes les entreprises à l'équilibre de Nash, il faut donc qu'il respecte $p = \frac{c+p+\frac{t}{n}}{2}$ soit

$$p = c + \frac{t}{n}$$

Vérifions qu'à ce prix une entreprise ne peut pas capturer tout le marché de ses concurrents les plus proches. Pour que le consommateur localisé en $\frac{1}{n}$ préfère acheter en 0 plutôt qu'en $\frac{1}{n}$ le prix p_1 proposer en 0 doit vérifier $p_1 + \frac{t}{n} < p$ où p est le prix pratiqué en $\frac{1}{n}$. En remplaçant p par $c + \frac{t}{n}$ il vient $p_1 + \frac{t}{n} < c + \frac{t}{n}$ si et seulement si $p_1 < c$ ce qui est bien entendu impossible à l'équilibre.
Vérifions aussi que le marché est bien couvert. Le consommateur dont le coût total est le plus élevé doit préférer consommer à ne pas consommer. Il s'agit (par exemple) du consommateur localisé en $\frac{1}{2n}$. Nous devons donc avoir $v \geq c + \frac{t}{n} + \frac{t}{2n}$ soit

$$v \geq c + \frac{3t}{2n}$$

inégalité qui est supposée vérifiée.

2. Calcul de n. Le profit d'une entreprise quelconque parmi les n est donné par $\pi(n) = \left(c + \frac{t}{n} - c\right)\frac{1}{n} - f = \frac{t}{n^2} - f$, il est positif si et seulement si

$$n \leq \sqrt{\frac{t}{f}}$$

À l'équilibre, il entre donc n^c entreprises où n^c est tel que

$$n^c \leq \sqrt{\frac{t}{f}} < n^c + 1$$

Le prix d'équilibre s'établit alors à

$$p^c = c + \sqrt{tf}$$

Dans un tel modèle, les entreprises pratiquent un prix strictement supérieur au coût marginal (constant) mais ne font tout de même pas de profit (à cause de la libre entrée et du coût fixe).
Si $f \to 0$, alors n^c augmente vers l'infini et la marge diminue vers 0 comme dans Cournot. Si t augmente, alors n^c augmente et la marge augmente. Si $t \to 0$, alors $n^c \to 0$ (concurrence à la Bertrand une seule entreprise est

viable). Si f augmente, alors n^c diminue et la marge augmente. Ce point n'est pas si trivial, il rappelle que des entreprises réalisant un profit nul ne sont pas forcément en concurrence parfaite !

Par ailleurs, écrivons la contrainte de marché couvert à l'équilibre

$$v \geq c + \frac{3}{2}\sqrt{tf}$$

soit encore

$$f \leq \frac{4}{9t}(v-c)^2 .$$

3. Dans un tel modèle le prix n'affecte pas le bien-être car il n'introduit pas de distortion sur la quantité (0 ou 1) consommée.

   $W = \sum \pi + \int u = (p-c)\sum D_i - nf + \int \left(v - p - t\min_i |x - l_i|\right) dx$ or $\sum D_i = 1$

   Donc $W = p - c + v - p - t\int \min_i (|x-l_i|)\, dx = v - c - nf - t\displaystyle\int \min_i (|x-l_i|)\, dx$

   Il en résulte que maximiser W revient à minimiser $\left[nf + t\int (|x-l_i|)\, dx\right]$ c'est-à-dire à minimiser la somme des coûts fixes plus les coûts de transport des consommateurs. Il y a un arbitrage entre limiter la multiplication des coûts fixes de production et diminuer les coûts de transport des consommateurs.

   Soit le programme

$$\min_n \left[nf + 2nt\int_0^{\frac{1}{2n}} x dx\right]$$

   soit encore

$$\min_n \left[nf + \frac{t}{4n}\right]$$

   il conduit à

$$n^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{f}} = \frac{1}{2}n^c.$$

   La concurrence imparfaite combinée avec la libre entrée engendre donc un nombre trop important d'entreprises (voir aussi l'exercice 3.6 pour le cas de la libre entrée lorsque la concurrence est à la Cournot).

Chapitre 6

Collusion tacite

Les firmes ont rarement intérêt à se faire concurrence, en effet elles peuvent préférer par une "coopération" (collusion) instaurer des prix plus élevés et réaliser des profits plus importants. Les économistes distinguent deux grands types de collusion (indépendamment de son aspect légal ou illégal) : la collusion dite explicite (où les entreprises peuvent par exemple signer des contrats entre-elles pour s'imposer des contraintes) et la collusion dite tacite (où les entreprises cherchent à coopérer sans la possibilité de faire des promesses crédibles). Ce chapitre se consacre à ce deuxième type de collusion.

La modélisation de la collusion tacite repose sur l'analyse d'un jeu répété afin de prendre directement en compte les interactions des entreprises au fil du temps. Friedman (1971)[1] a formalisé en premier cette approche qui illustre, dans un cadre théorique, l'arbitrage suivant mis en avant par Chamberlin :

> "*Les conséquences ultimes de la réduction de son prix (en tenant compte de l'influence indirecte) sont pour un vendeur un facteur plus ou moins important suivant que le délai est court ou long par rapport à la période pendant laquelle il pense poursuivre ses ventes. Si le vendeur est dans les affaires de façon permanente, les gains temporaires d'une réduction de prix sont d'une influence négligeable. Le vendeur accordera tout le poids aux conséquences indirectes ou ultimes de ses actes, et ne prendra aucune initiative qui abaisserait ses ventes futures à un niveau inférieur.*"[2]

Les exercices de ce chapitre explorent l'idée de la collusion tacite dans le cadre d'un jeu répété. Ils peuvent être résolus sans rappel de cours. En revanche, ils s'appuient sur les exercices des chapitres 3 (concurrence à la Cournot) et 4 (concurrence en prix).

Les exercices 6.1 et 6.2 étudient les équilibres sous-jeux parfaits d'un jeu répété infiniment. L'exercice 6.3 montre comment une collusion peut s'établir dans un jeu répété un nombre fini de fois. L'exercice 6.4 s'intéresse à deux entreprises en concurrence l'une avec l'autre sur deux marchés. Les exercices 6.5 et 6.6 étudient

[1] J. Friedman "A Non-cooperative Equilibrium for Supergames", 1971, *Review of Economics Studies*, 38, 1-12.

[2] Chamberlin, E. (1953) : *La Théorie de la Concurrence Monopolistique*, PUF, Paris.

comment le seuil d'impatience à partir duquel la collusion tacite est soutenable varie avec le mode de concurrence. La difficulté à coordonner entre plusieurs pays la lutte contre la collusion est illustrée par l'exercice 6.7. L'exercice 6.8 étudie la forme que prend la collusion lorsque la demande fluctue dans le temps et l'exercice 6.9 montre comment la punition doit s'adapter à la possibilité que les firmes proposent des rabais secrets à leur clients.

6.1 Folk Theorem**

Objectif de l'exercice : Explorer les équilibres (sous-jeux parfaits) dits de collusion tacite d'un jeu de concurrence à la Bertrand infiniment répété.

Soient deux entreprises identiques se faisant concurrence sur un nombre infini de périodes. Les firmes produisent avec un coût marginal constant. En l'absence de collusion tacite (par exemple s'il y avait qu'une période), la concurrence est à la Bertrand. Soit $\delta \in]0,1[$ le taux d'escompte.

1. *Tracer dans le plan Π_1, Π_2 l'ensemble des couples de profits qui peuvent être obtenus par les entreprises sur une période (pas forcément à un équilibre de Nash).*
2. *Montrer que si $\delta \geq \frac{1}{2}$ alors la stratégie qui consiste à jouer le prix de monopole tant que les deux entreprises ont affiché ce prix par le passé et à jouer le coût marginal dès qu'une entreprise n'a pas affiché le prix de monopole une fois, constitue un équilibre de Nash sous-jeux parfait de ce jeu infiniment répété. Montrer que le même résultat s'applique pour tout prix $p \in [c, p^m]$.*
3. *Soient les stratégies suivantes : les entreprises jouent p^m toutes les périodes paires et jouent c toutes les périodes impaires ($t = 0$ à $+\infty$). Si l'une des entreprises dévie de ce schéma, alors les deux entreprises jouent c jusqu'à l'infini. Déterminer la valeur de δ au-delà de laquelle ces stratégies forment un équilibre sous-jeu parfait de ce jeu répété.*
4. *Considérons les stratégies suivantes : la firme 1 joue $p^m - \varepsilon$ deux fois de suite puis p^m puis répète ce schéma tant que l'entreprise 2 ne dévie pas. La firme 2 joue p^m deux fois de suite puis $p^m - \varepsilon$ et répète cette suite tant que la firme 1 ne dévie pas. Si une entreprise dévie alors les deux jouent c pour toujours. Déterminer le profit escompté de chaque firme et la condition sous laquelle il s'agit bien d'un équilibre de Nash sous-jeux parfait.*

Correction

1. Soit Π^m le profit de monopole : $\Pi^m = \max_p (p-c)\, D(p)$. Au maximum, une entreprise peut obtenir Π^m, au minimum elle peut obtenir zéro. En fait avec les stratégies mixtes, tout couple (Π_1, Π_2) avec $0 \leq \Pi_i \leq \Pi^m$ et $\Pi_1 + \Pi_2 \leq \Pi^m$ peut être obtenu. Le triangle $0, \Pi^m, \Pi^m$ de la figure 6.1 contient ces couples.

2. Si personne ne dévie, le prix de monopole est joué à chaque période et chaque firme gagne $\frac{\Pi^m}{2}$ à chaque période soit un profit total escompté égal à

$$\frac{\Pi^m}{2} + \delta\frac{\Pi^m}{2} + \delta^2\frac{\Pi^m}{2} + \ldots = \sum_{t=0}^{+\infty} \delta^t \frac{\Pi^m}{2} = \frac{1}{1-\delta}\frac{\Pi^m}{2}.$$

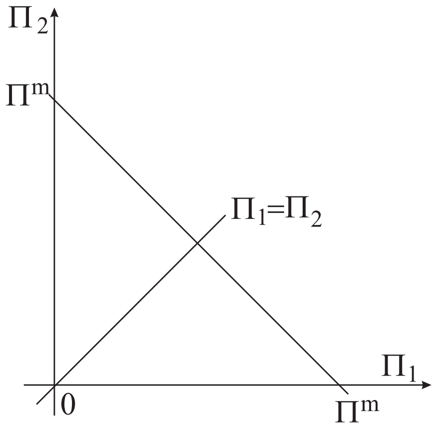


FIG. 6.1 – Profits réalisables

Si une entreprise dévie à la période T son profit est :

$$\sum_{t=0}^{T-1} \delta^t \frac{\Pi^m}{2} + \delta^T \Pi^m + 0 = \frac{1-\delta^T}{1-\delta}\frac{\Pi^m}{2} + \delta^T \Pi^m,$$

cette déviation n'est pas profitable si et seulement si

$$\frac{1-\delta^T}{1-\delta}\frac{\Pi^m}{2} + \delta^T \Pi^m \le \frac{1}{1-\delta}\frac{\Pi^m}{2} = \frac{1-\delta^T}{1-\delta}\frac{\Pi^m}{2} + \frac{\delta^T}{1-\delta}\frac{\Pi^m}{2},$$

qui se simplifie en :

$$\delta \ge \frac{1}{2}.$$

L'intuition de Chamberlin (voir le début du chapitre) est bien confirmée : la collusion est possible si les firmes valorisent suffisamment le futur. Lorsque la collusion tacite consiste pour les firmes à se coordonner sur un prix $p \in [c, p^m]$, la démonstration ci-dessus continue de s'appliquer. Il suffit de remplacer Π^m par $\Pi(p)$. La valeur seuil de δ est exactement la même.

3. Commençons par calculer le profit escompté d'une firme lorsque ces stratégies sont jouées. Notons V cette valeur. Il vient :

$$V = \frac{\Pi^m}{2} + \delta 0 + \delta^2 V$$

d'où

$$V = \frac{\Pi^m}{2(1-\delta^2)}.$$

Une déviation "optimale" consiste à jouer $p^m - \varepsilon$ au début d'une période paire. Dévier à la période $t = 0$ rapporte donc : Π^m.

Pour avoir un équilibre de Nash il faut que :

$$\Pi^m \le \frac{\Pi^m}{2(1-\delta^2)}$$

soit

$$\delta \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,707 > 0,5.$$

4. Notons V_1 (resp. V_2) le gain escompté de la firme 1 (resp. 2) lorsque les stratégies de l'énoncé sont suivies. Étant donné les stratégies, il vient que :

$$V_1 = \Pi^m + \delta\Pi^m + \delta^2 0 + \delta^3 V_1$$

d'où

$$V_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta^3}\Pi^m.$$

De la même manière,

$$V_2 = 0 + \delta 0 + \delta^2\Pi^m + \delta^3 V_2$$

d'où :

$$V_2 = \frac{\delta^2}{1-\delta^3}\Pi^m.$$

Pour avoir un équilibre, il faut qu'aucune firme n'est intérêt à dévier. Comme l'entreprise 2 est la plus mal lotie, il suffit de vérifier qu'elle n'a pas intérêt à dévier. Si elle dévie, elle a intérêt à le faire dès qu'elle doit gagner 0. Par exemple en jouant $p^m - 2\varepsilon$ dès la première période. En le faisant, elle gagne Π^m, d'où la condition :

$$\Pi^m \leq \frac{\delta^2}{1-\delta^3}\Pi^m$$

soit encore

$$\delta^2 (1-\delta) \geq 1$$

qui conduit à

$$\delta \geq 0,7548.$$

L'existence d'équilibres aussi variés est connu sous le nom de "folk theorem". D'une certaine manière il s'agit d'un résultat négatif car l'équilibre de collusion tacite le plus intuitif (se coordonner sur le partage du profit du monopole) n'est pas unique. Soient $0 \leq V_1 \leq \frac{1}{1-\delta}\pi^m$ et $0 \leq V_2 \leq \frac{1}{1-\delta}\pi^m$ avec $V_1 + V_2 \leq \frac{1}{1-\delta}\pi^m$. Il existe $0 < \widetilde{\delta} < 1$ tel que pour $\widetilde{\delta} \leq \delta \leq 1$, il existe un équilibre sous-jeu parfait du jeu infiniment répété où le paiement de la firme 1 est V_1 et celui de la firme 2 est V_2.

6.2 Coopération des prisonniers**

Objectif de l'exercice : Montrer comment la coopération peut émerger à l'équilibre (sous-jeux parfait) d'un jeu du dilemme des prisonniers infiniment répété.

Considérons un jeu du type "dilemme" des prisonniers comme celui de la table 6.1. avec $d-1 \geq c > 1$.

		J2	
		C	D
J1	C	(c,c)	$(0,d)$
	D	$(d,0)$	$(1,1)$

Tab. 6.1 – Dilemme des prisonniers

1. *Rappeler l'équilibre de Nash du jeu statique.*
2. *Soit δ le facteur d'escompte. Supposons que le jeu soit infiniment répété. Sous quelle condition sur δ les prisonniers coopèrent-ils infiniment sachant que si l'un déviait les deux joueraient D indéfiniment ?*
3. *Supposons que le joueur 2 suive la stratégie «Tit for Tat» suivante : il coopère au premier tour et ensuite joue à la période $t > 1$ ce qu'a joué le joueur 1 au tour $t-1$. Parmi les trois stratégies suivantes, laquelle est préférée par le joueur 1 ? Jouer éternellement D, jouer éternellement C ou alterner entre D et C.*

Correction

1. Le jeu statique possède un unique équilibre de Nash qui s'obtient simplement en constatant que la stratégie D de chaque joueur domine strictement la stratégie C. Il en résulte qu'à l'équilibre les deux joueurs jouent D.
2. Si les joueurs jouent indéfiniment C ils obtiennent un gain escompté égal à
$$\frac{c}{1-\delta}\ .$$
Si un joueur dévie vers D alors que l'autre joue C, il obtient à court terme d mais déclenche une perte de confiance qui fait que les deux joueurs jouent D indéfiniment. Pour que la coopération C soit plus profitable que la défection D il faut donc que
$$\frac{c}{1-\delta} \geq d + \frac{\delta}{1-\delta},$$
soit
$$\delta \geq \widetilde{\delta} = \frac{d-c}{d-1}.$$
La coopération est d'autant plus facile ($\widetilde{\delta}$ faible) que c est proche de d tandis qu'elle est plus difficile ($\widetilde{\delta}$ proche de 1) lorsque c est proche de 1.

3. J1 peut choisir de jouer D éternellement il gagne alors
$$d + \frac{\delta}{1-\delta} \ .$$
S'il joue C éternellement il gagne
$$\frac{c}{1-\delta} \ .$$
Enfin parmi d'autres stratégies il peut alterner D avec C ce qui conduit à un gain :
$$\frac{d}{1-\delta^2} \ .$$
La comparaison de ces trois gains conduit aux choix suivants.
Si $\delta \leq \frac{1}{d-1}$, alors J1 joue D éternellement.
Si $\frac{1}{d-1} \leq \delta \leq \frac{d-c}{c}$, alors il alterne D avec C.
Enfin, si $\frac{d-c}{c} \leq \delta$, il coopère éternellement.

6.3 Jeu répété un nombre fini de fois**

Objectif de l'exercice : Étudier les possibilités de coopération dans un jeu répété un nombre fini de fois.

1. *Soit le jeu de la table 6.2. Supposons que ce jeu soit répété un nombre fini*

		J2	
		C	D
J1	C	$(2, 2)$	$(0, 4)$
	D	$(4, 0)$	$(1, 1)$

Tab. 6.2 – Dilemme des prisonniers

T de fois et que le facteur d'escompte δ soit égal à 1. Montrer qu'à l'unique équilibre de Nash les deux joueurs jouent D quelle que soit la période.

2. *Soit le jeu[3] de la table 6.3.*

		K			
		k_1	k_2	k_3	k_4
B	b_1	$(0, 0)$	$(2, 4)$	$(0, 0)$	$(8, 0)$
	b_2	$(4, 2)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
	b_3	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(3, 3)$	$(0, 0)$
	b_4	$(0, 8)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(7, 7)$

Tab. 6.3 – Benoît and Krishna

Trouver les équilibres de Nash en stratégies pures du jeu statique ainsi que les équilibres sous-jeux parfaits du jeu répété deux fois (avec un facteur d'escompte unitaire). Montrer en particulier, qu'il existe un équilibre sous-jeux parfait où les joueurs choisissent $(b4, k4)$ au premier tour.

Correction

1. Puisque D domine strictement C, il est clair qu'à la période T (dernière période) chaque joueur doit jouer D. Il en résulte qu'à la période $T-1$ il n'y a rien à gagner à jouer C et ainsi de suite jusqu'à la première période.
2. Le jeu statique possède trois équilibres de Nash en stratégies pures : (b_2, k_1), (b_1, k_2) et (b_3, k_3).

   À un équilibre sous-jeu parfait du jeu est répété deux fois, les stratégies de seconde période doivent être (b_2, k_1), (b_1, k_2) ou (b_3, k_3). Il en résulte une certaine "liberté" dans le choix des paiements de seconde période. Cela permet

[3] Ce jeu vient de l'article : "Renegotiation in Finitely Repeated Games" de Jean-Pierre Benoît et Vijay Krishna publié dans *Econometrica* ; 61(2), March 1993, pages 303-23.

de “punir” un joueur qui dévie en première période. Par exemple la paire de stratégie suivante forme un équilibre de Nash sous-jeux parfait. Benoît joue : b_4 en première période. En seconde période, il joue b_3 si Krishna a joué k_4 en première période et b_2 sinon. De manière symétrique, Krishna joue k_4 en première période et k_3 après b_4 et k_2 après une autre action de Benoît. Les autres équilibres de Nash sous-jeux parfaits consistent à jouer en première période un équilibre de Nash du jeu statique et en seconde période aussi (le même ou un autre). Cela montre que la coopération (b_4, k_4) est possible bien que le jeu ne soit pas infiniment répété.

6.4 Collusion sur plusieurs marchés*

Objectif de l'exercice : Analyser si le fait que deux entreprises soient en concurrence sur plusieurs marchés facilite ou freine la collusion tacite.

1. *Soient deux entreprises (identiques) qui sont en duopole sur deux marchés distincts. Notons π_1^m le profit de monopole sur le premier marché et π_2^m celui sur le second. Sans perte de généralité, il sera supposé que $\pi_1^m > \pi_2^m$. Rappeler sous quelle condition la collusion est soutenable sur chaque marché, sachant qu'en l'absence de collusion, la concurrence est à la Bertrand. Déterminer la nouvelle condition lorsqu'une entreprise peut dévier sur un marché seulement mais entraîne une guerre des prix sur les deux marchés. Montrer qu'il existe une valeur seuil $\widetilde{\delta}$ telle que si le taux d'escompte δ est supérieur, alors la collusion tacite est possible. Montrer que cette valeur seuil est strictement inférieure à $\frac{1}{2}$, et étudier comment elle varie en fonction du rapport des profits de monopole, $\frac{\pi_2^m}{\pi_1^m}$.*
2. *Supposons que la fréquence de la concurrence n'est pas la même sur les deux marchés. Les entreprises se rencontrent toutes les périodes sur le marché 1 mais seulement une période sur deux sur le marché 2. Sinon, supposons pour simplifier que les deux marchés soient identiques. Dans ce cadre, étudier la collusion.*

Correction

1. La collusion tacite consiste pour chaque entreprise à jouer le prix de monopole tant que son concurrent a fait de même par le passé. Si l'une des entreprises dévie, alors les deux jouent c jusqu'à la fin des temps. Le profit escompté lié à ces stratégies est tel que

$$V = \frac{\Pi^m}{2} + \delta V$$

d'où

$$V = \frac{\Pi^m}{2\left(1-\delta\right)} .$$

Dévier (par exemple dès la période 0) rapporte Π^m d'où la condition d'existence d'un équilibre où les firmes pratiquent éternellement le prix de monopole :

$$\Pi^m \leq \frac{\Pi^m}{2\left(1-\delta\right)}$$

qui conduit à

$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

Supposons que la collusion tacite soit envisagé sur les deux marchés. Testons si cela est robuste à une déviation. S'il n'est possible de dévier que sur un seul marché, autant dévier sur le marché 1. Dévier rapporte :

$$\Pi_1^m + \frac{\Pi_2^m}{2}$$

tandis que ne pas dévier conduit à

$$\frac{\Pi_1^m}{2\,(1-\delta)} + \frac{\Pi_2^m}{2\,(1-\delta)} \ .$$

Un gain est réalisable sur le marché 1 mais une perte est subie sur le marché 2. Il n'est pas intéressant de dévier si et seulement si˜ :

$$\delta \geq \frac{1}{2 + \frac{\Pi_2^m}{\Pi_1^m}} = \widetilde{\delta},$$

la valeur seuil $\widetilde{\delta}$ est donc égale à $\frac{1}{2}$ si $\Pi_2^m = 0$ et à $\frac{1}{3}$ lorsque $\Pi_2^m = \Pi_1^m$. Bien entendu, plus le marché 2 est important et plus le seuil $\widetilde{\delta}$ est bas puisqu'une entreprise qui dévie à plus à perdre sur ce marché.

2. Soit δ le taux d'escompte. La collusion est donc soutenable sur le marché 1 (seul) si $\delta \geq \frac{1}{2}$, tandis qu'elle est possible sur le marché 2 (seul) si $\delta^2 \geq \frac{1}{2}$. Étudions maintenant la collusion simultanée sur les deux marchés. Ne jamais dévier rapporte

$$\frac{\Pi^m}{2}\frac{1}{1-\delta} + \frac{\Pi^m}{2}\frac{1}{1-\delta^2} = \frac{2-\delta}{2\,(1-\delta)^2}\frac{\Pi^m}{2}.$$

D'autre part, dévier dès la première période rapporte $2\Pi^m$. Il en résulte que la collusion sur les deux marchés peut être un équilibre de Nash si et seulement si

$$\frac{2-\delta}{2\,(1-\delta)^2}\frac{\Pi^m}{2} \geq 2\Pi^m$$

soit

$$4\delta^2 + \delta - 2 \geq 0,$$

ou encore

$$\delta \geq \frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 0,59 \ .$$

Il existe donc des cas où la collusion n'est pas possible sur le marché 2 mais où elle est possible simultanément sur les deux marchés. Par exemple, pour $\delta = 0,6$ la collusion n'est pas possible sur le marché 2 car $\delta^2 = 0,36 < 0,5$ et malgré tout elle est soutenable sur les deux marchés.

6.5 Collusion et mode de concurrence**

Objectif de l'exercice : Déterminer de manière assez générale l'expression du seuil (en termes de taux d'escompte) à partir duquel la collusion tacite est un équilibre de Nash sous-jeux parfait. Étudier ce seuil selon le mode de concurrence en cas de déviation.

Considérons une situation dans laquelle n firmes se font concurrence. Chaque firme a un coût marginal de production constant égal à c et pas de coûts fixes. Notons π^m le profit que réaliserait un monopole sur ce marché, π^c le profit d'une entreprise lorsque les n firmes font de la collusion tacite, π^d le profit maximal que peut réaliser une firme qui dévie de l'accord de collusion et π^p le profit obtenu à l'équilibre de Nash. Ce jeu statique est répété un nombre infini de périodes. Soit δ le taux d'escompte. Pour l'instant nous sommes vagues sur les valeurs des profits mais il est clair que $\pi^m \geq \pi^d > \pi^c > \pi^p$.

1. *Déterminer $\widetilde{\delta}$ tel que si $\delta \geq \widetilde{\delta}$, alors les stratégies suivantes forment un équilibre de Nash (sous-jeux parfait). Chaque entreprise joue la stratégie de collusion tant que les autres l'ont fait dans le passé et si l'une dévie alors toutes jouent la stratégie d'équilibre de Nash du jeu statique.*
2. *Appliquer la formule précédente dans le cas où la concurrence est à la Bertrand. Même question lorsque la concurrence est à la Cournot avec une fonction inverse de demande de la forme $P(Q) = \max\{0\,; a - bQ\}$ où Q est la somme des quantités produites par toutes les firmes. Comparer le δ-seuil sous Bertrand et sous Cournot.*
3. *La collusion tacite est-elle impossible si $\delta < \widetilde{\delta}$? Considérons les stratégies suivante : produire q à la première période ; à la période t produire q si toutes les firmes ont produit cette quantité dans chacune des périodes précédentes, sinon produire la quantité de Cournot $\frac{a-c}{b(n+1)}$. Poser $q = (1-\phi)\frac{a-c}{b(n+1)}$ et déterminer $\widetilde{\phi}$ en fonction de n et de δ de telle sorte que la collusion soit possible lorsque $\phi \leq \widetilde{\phi}$. Comment varie $\widetilde{\phi}$ en fonction de δ ?*

Correction

1. La condition d'équilibre s'écrit :
$$\frac{1}{1-\delta}\pi^c \geq \pi^d + \frac{\delta}{1-\delta}\pi^p,$$
soit :
$$\delta \geq \widetilde{\delta} = \frac{\pi^d - \pi^c}{\pi^d - \pi^p}.$$
Cette valeur seuil est bien positive et inférieure à 1.
2. Dans le cas de la concurrence à la Bertrand il vient que le profit de déviation est égal au profit de monopole
$$\pi^d = \pi^m,$$

puisqu'en déviant vers un prix très légèrement inférieur au prix de monopole la firme qui dévie rafle toute la demande. Le profit de collusion (chaque firme joue le prix de monopole) est égal à une part $1/n$ du profit de monopole :

$$\pi^c = \frac{\pi^m}{n}.$$

Enfin, le profit de punition est nul (toute les firmes jouent c),

$$\pi^p = 0.$$

D'où

$$\widetilde{\delta} = \delta^B = \frac{n-1}{n}$$

(on retrouve bien $\frac{1}{2}$ lorsque $n = 2$).

Dans le cas de la concurrence à la Cournot, le profit de collusion (chaque firme joue la quantité de monopole divisée par n) est égal à une part $1/n$ du profit de monopole :

$$\pi^c = \frac{\pi^m}{n}.$$

Avec une fonction de demande linéaire on a $\pi^m = \frac{(a-c)^2}{4b}$. Le profit de punition est égal au profit lorsque la concurrence est à la Cournot soit

$$\pi^p = \frac{(a-c)^2}{b\,(n+1)^2} = \frac{4}{(n+1)^2}\pi^m.$$

Pour le profit de déviation, supposons que toutes les firmes sauf une jouent $\frac{q^m}{n}$, la meilleure réponse de la firme qui dévie est $\frac{a-c-b\frac{n-1}{n}q^m}{2b}$. Comme $q^m = \frac{a-c}{2b}$, cela conduit à un profit :

$$\pi^d = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \pi^m.$$

D'où, après simplification :

$$\widetilde{\delta} = \delta^C = \frac{(n+1)^2}{(n^2+6n+1)}.$$

Une question naturelle est de savoir si la collusion est "plus facile" lorsque la concurrence est à la Cournot ou lorsqu'elle est à la Bertrand ? Par plus facile nous entendons que la collusion est soutenable pour un intervalle de δ plus large. Il apparaît que pour $n = 2$, $\delta^B < \delta^C$, en présence de deux entreprises, la collusion est plus facile sous une concurrence à la Bertrand, tandis que pour $n > 2$, $\delta^B > \delta^C$, avec plus de deux firmes, la collusion est plus facile si la concurrence sous-jacente est à la Cournot.

3. Si toutes les firmes sauf une jouent q, la firme qui dévie a intérêt (à court terme) à choisir $\frac{a-c-b(n-1)q}{2b}$ et à réaliser le profit $\pi^d = \frac{(a-c-b(n-1)q)^2}{4b}$. En revanche si toutes les firmes jouent q, chacune fait un profit égal à $\pi^c = (a-c-nbq)\,q$. En posant

$$q = (1-\phi)\,\frac{a-c}{b\,(n+1)}$$

il vient que le profit obtenu en déviant est

$$\pi^d = \frac{(a-c)^2}{b\,(n+1)^2}\frac{(2+(n-1)\,\phi)^2}{4}.$$

Le profit de collusion s'écrit :

$$\pi^c = \frac{(a-c)^2}{b\,(n+1)^2}\,(1+\phi n)\,.$$

Enfin le profit de punition est toujours égal au profit de Cournot :

$$\frac{(a-c)^2}{b\,(n+1)^2}.$$

La collusion est donc possible si

$$\delta \geq \frac{(2+(n-1)\,\phi)^2 - 4\,(1+\phi n)}{(2+(n-1)\,\phi)^2 - 4} = \frac{(n+1)^2\,\phi}{(n-1)\,((n-1)\,\phi+4)},$$

d'où

$$\phi \leq \widetilde{\phi} = \frac{4\,(n-1)\,\delta}{(n+1)^2 - (n-1)\,\delta}.$$

Lorsque δ tend vers 0, $\widetilde{\phi}$ tend vers 0, c'est-à-dire que la seule quantité sur laquelle peuvent se coordonner les firmes tend vers la quantité de Cournot. En revanche, si $\delta = \frac{1+2n+n^2}{1+6n+n^2}$, alors $\widetilde{\phi} = \frac{n-1}{2n}$, c'est-à-dire que les firmes peuvent jouer la quantité de monopole (divisée par n). Il est facile de voir que $\widetilde{\phi}$ est une fonction strictement croissante de $\delta \in \left[0, \frac{1+2n+n^2}{1+6n+n^2}\right]$. Au delà, il est possible d'établir une collusion tacite consistant à produire la quantité de monopole.

6.6 Produits différenciés et collusion*

Objectif de l'exercice : Étude de la collusion tacite entre deux producteurs de biens différenciés. Il s'agit d'appliquer les résultats de l'exercice 6.5.

Soient deux entreprises, 1 *et* 2*. Les fonctions de demande sont :*

$$\begin{cases} q_1 = \frac{a}{1+\sigma} - \frac{1}{1-\sigma^2}p_1 + \frac{\sigma}{1-\sigma^2}p_2 \\ q_2 = \frac{a}{1+\sigma} + \frac{\sigma}{1-\sigma^2}p_1 - \frac{1}{1-\sigma^2}p_2 \end{cases}$$

Les deux entreprises ont le même coût marginal de production qui est supposé constant et qui est normalisé à zéro.

1. *Calculer l'équilibre de Nash de ce jeu de concurrence (prix, profits).*
2. *Quels seraient les prix pratiqués par un monopole qui vendrait les deux produits ? (Quel profit réaliserait-il ?).*
3. *Sous quels conditions une collusion tacite peut-elle apparaître lorsque ce jeu est répété infiniment (avec un facteur d'actualisation δ) ?*

Correction

1. La fonction de réaction de l'entreprise i est $p_i^*(p_j) = \frac{1}{2}(a(1-\sigma) + \sigma p_j)$. L'intersection des fonctions de meilleures réponses conduit à l'équilibre de Nash de ce jeu de concurrence en prix : $p_1^* = p_2^* = a\frac{1-\sigma}{2-\sigma}$. Les profits s'établissent à l'équilibre à $\pi_1^* = \pi_2^* = \frac{a^2(1-\sigma)}{(2-\sigma)^2(1+\sigma)}$ (voir l'exercice 4.5).
2. Un monopole maximise la somme des profits $\Pi = p_1q_1 + p_2q_2$ ce qui conduit aux conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} = \frac{a}{1+\sigma} - \frac{2}{1-\sigma^2}p_1 + \frac{2\sigma}{1-\sigma^2}p_2 = 0$$

et

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_2} = \frac{a}{1+\sigma} + \frac{2\sigma}{1-\sigma^2}p_1 - \frac{2}{1-\sigma^2}p_2 = 0$$

et donc à des prix de monopoles

$$p_1^m = p_2^m = \frac{a}{2}$$

et donc à un profit égal à

$$\Pi^m = \frac{a^2}{4(1+\sigma)} + \frac{a^2}{4(1+\sigma)}.$$

3. Une forme de collusion tacite consiste pour les deux entreprises à jouer $\frac{a}{2}$ tant que les deux entreprises l'ont fait par le passé. Tandis que si une entreprise a dévié, alors les deux entreprises jouent le prix de l'équilibre de Nash $a\frac{1-\sigma}{2-\sigma}$. Dans ce cas, le profit de collusion s'établit à

$$\pi^c = \frac{a^2}{4(1+\sigma)}$$

tandis que le profit de punition est

$$\pi^p = \frac{a^2(1-\sigma)}{(2-\sigma)^2(1+\sigma)}$$

Toutefois comme le prix de monopole n'est pas une meilleure réponse au prix de monopole, il est, à court terme, profitable de dévier. Par exemple, si l'entreprise 1 dévie elle choisit le prix $p_1^*\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a(2-\sigma)}{4}$. Le prix de déviation est donc

$$\frac{a(2-\sigma)}{4},$$

et le profit de déviation s'établit à

$$\pi^d = \frac{a^2(2-\sigma)^2}{16(1-\sigma^2)}$$

ce qui conduit à un δ seuil de

$$\widetilde{\delta} = \frac{\pi^d - \pi^c}{\pi^d - \pi^p} = \frac{(2-\sigma)^2}{8-8\sigma+\sigma^2} = \frac{\frac{(2-\sigma)^2}{16(1-\sigma)} - \frac{1}{4}}{\frac{(2-\sigma)^2}{16(1-\sigma)} - \frac{(1-\sigma)}{(2-\sigma)^2}}$$

soit

$$\widetilde{\delta} = \frac{(2-\sigma)^2 - 4(1-\sigma)}{(2-\sigma)^2 - \left(\frac{4(1-\sigma)}{(2-\sigma)}\right)^2}$$

soit finalement en utilisant l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$$\widetilde{\delta} = \frac{1}{\left[(2-\sigma)^2 + 4(1-\sigma)\right]\frac{1}{(2-\sigma)^2}} = \frac{(2-\sigma)^2}{8-8\sigma+\sigma^2}$$

On remarque que lorsque $\sigma \to 0$, alors $\widetilde{\delta} \to 1/2$ comme lorsque la concurrence est à la Bertrand dans le jeu statique. En revanche, si $\sigma \to 1$, alors $\widetilde{\delta} \to 1$, c'est-à-dire que la collusion tacite est de plus en plus difficile à soutenir. En effet, dans ce cas le profit de punition tend vers le profit de collusion, il en résulte que la punition est de moins en moins dommageable et donc que la collusion est plus difficile à soutenir.

6.7 Coordination contre la collusion tacite*

Objectif de l'exercice : Montrer qu'en présence d'un cartel international, un pays peut être pour ou contre le cartel. En effet, les consommateurs du pays sont pénalisés mais les firmes nationales sont avantagées. Si pour un pays, le deuxième effet l'emporte sur le premier, alors il préfère le cartel.

Soient k pays et n entreprises. Chaque pays accueille une ou plusieurs entreprises. Les pays sont de taille identique, et le marché total est normalisé à $D(p) = 1 - p$. (La taille d'un marché national est donc $\frac{1-p}{k}$). Chaque entreprise produit avec un coût marginal constant pris égal à 0.

1. *Comparer le bien être d'un pays où z entreprises sont installées en présence et en l'absence d'un cartel des n firmes. On suppose qu'en l'absence de cartel, la concurrence est à la Bertrand.*
2. *Application : L'Union Économique Européenne est composée de 15 pays. Imaginons qu'ils soient de même taille. Une lutte contre un cartel rencontre-t-elle des résistances si chaque pays a une entreprise ? Si l'Allemagne a 4 entreprises, la France 2 et l'Angleterre, la Belgique, l'Italie, la Grèce, les Pays-Bas et le Portugal 1 et les autres 0 ?*

Correction

1. En l'absence de cartel, le bien-être d'un pays est égal au surplus des consommateurs pour un prix nul. Soit $\frac{1}{2k}$. En présence d'un cartel, le bien-être est égal à une part $\frac{z}{n}$ du profit de monopole plus le surplus des consommateurs pour un prix de monopole. Soit $\frac{z}{4n} + \frac{1}{8k}$. Le bien-être social est donc plus grand en présence d'un cartel qu'en son absence si et seulement si
$$\frac{z}{n} \geq \frac{3}{2k},$$
un pays est favorable au cartel s'il possède une proportion importante de firmes.
2. Si $z = 1$, il est immédiat que tous les pays sont contre la création d'un cartel. Avec $k = 15$, $n = 12$ on a $\frac{3n}{2k} = \frac{6}{5}$. Il en résulte que l'Allemagne et la France sont favorables à l'existence d'un cartel tandis que les autres pays y sont défavorables.

6.8 Demande fluctuante**

Objectif de l'exercice : Étudier comment s'adapte la collusion tacite à un environnement fluctuant. Selon l'importance de la demande, la collusion est plus ou moins facile[4].

Soient n entreprises se rencontrant sur un marché un nombre infini de périodes. À chaque période, la demande est basse, $D_1(p)$ avec une probabilité α ou forte, $D_2(p) > D_1(p)$ avec une probabilité $1-\alpha$. Soit Π_i^m le profit de monopole lorsque la demande est i, on suppose que $\frac{n}{n-1}\Pi_1^m > \Pi_2^m > \Pi_1^m$. En l'absence de collusion tacite, la concurrence est à la Bertrand. Les coûts marginaux de production sont identiques et constants. Au début de chaque période les entreprises apprennent l'intensité de la demande. Le facteur d'escompte est $\delta \in [0,1]$.

1. *Déterminer sous quelle condition la collusion tacite suivante est possible. À chaque période les entreprises jouent le prix de monopole correspondant à la demande tant que cela a été respecté dans le passé. Tandis que si une firme a dévié par le passé, alors les firmes vendent au coût marginal.*
2. *Si δ est inférieur au seuil qui permet une collusion tacite sur les prix de monopole, montrer que la collusion tacite suivante est soutenable. Il existe $p_2 < p_2^m$ tel que les entreprises pratiquent p_1^m si la demande est basse et p_2 si la demande est forte.*
3. *Montrer que selon les fonctions de demande, le prix p_2 peut être supérieur ou inférieur au prix p_1^m. Interpréter en termes de guerre des prix.*

Correction

1. L'espérance de profit (sur une période) si les entreprises pratiquent le prix de monopole quelle que soit la demande s'écrit :

$$\Pi^c = \frac{1}{n}\left(\alpha \Pi_1^m + (1-\alpha)\Pi_2^m\right).$$

En déviant dans une période de forte demande[5] une entreprise gagne :

$$\Pi^d = \Pi_2^m,$$

auquel cas, elle déclenche une guerre des prix qui conduit à un profit nul ($\Pi^p = 0$). Cette déviation n'est pas profitable si

$$\frac{\Pi_2^m}{n} + \frac{\delta}{1-\delta}\frac{\alpha\Pi_1^m + (1-\alpha)\Pi_2^m}{n} \geq \Pi_2^m.$$

[4]Cet exercice s'inspire de l'article de Rotemberg et Saloner, "A Supergame-Theoretic Model of Price Wars during Booms", publié dans *the American Economic Review* ; 76(3), June 1986, pages 390-407. Ainsi que du chapitre 6 (pages 248 et suivantes) de Tirole.

[5]S'il n'est pas rentable de dévier dans ce cas, il est clair qu'il n'est pas non plus profitable de dévier si la demande est basse.

Il en résulte que la collusion est soutenable si

$$\delta \geq \frac{\frac{n-1}{n}}{1-\alpha\left(1-\frac{\Pi_1^m}{\Pi_2^m}\right)}.$$

Comme $\frac{n}{n-1}\Pi_1^m > \Pi_2^m > \Pi_1^m$ ce seuil est compris entre $\frac{n-1}{n}$ et 1. Lorsque la demande est élevée, la déviation conduit à un profit de monopole important tandis que la perte est la somme actualisée d'une part $\frac{1}{n}$ d'une moyenne des profits de monopole. La tentation de dévier est alors plus importante que si la demande était toujours identique au cours du temps (le seuil est alors $\frac{n-1}{n}$).

2. Comme vu dans la question précédente, une déviation en période de forte demande n'est pas profitable si

$$\delta \geq \frac{\frac{n-1}{n}}{1-\alpha\left(1-\frac{\Pi_1^m}{\Pi_2(p_2)}\right)}.$$

donc p_2 doit vérifier $p_2 < p_2^m$ et

$$\Pi_2\left(p_2\right) \leq \frac{\alpha n\delta}{n-1-\left(n-\alpha\right)\delta}\Pi_1^m.$$

Cette inégalité permet de trouver $p_2 < p_2^m$ puisque pour p_2^m on a $\Pi_2^m > \frac{\alpha n\delta}{n-1-(n-\alpha)\delta}\Pi_1^m$ et pour $p_2 = c$ $\Pi_2\left(c\right) = 0 < \frac{\alpha n\delta}{n-1-(n-\alpha)\delta}\Pi_1^m$.

3. Posons $\phi = \frac{\alpha n\delta}{n-1-(n-\alpha)\delta}$. Comme $\delta > \frac{n-1}{n}$, on a $\phi > 1$. Considérons des fonctions de demande telles que $p_2^m > p_1^m$. Les graphiques de la figure 6.2

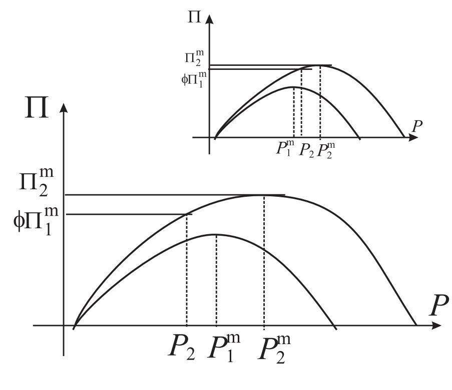


Fig. 6.2 – Collusion tacite et demande fluctuante

illustrent que selon la valeur de ϕ le prix p_2 peut être inférieur à p_1^m (ϕ proche de 1) ou supérieur à p_1^m (ϕ proche de $\frac{\pi_2^m}{\pi_1^m}$).

Dans le cas où $p_2 \leq p_1^m$, il est clair que les entreprises sont plus agressives lorsque la demande est plus élevée. En quelque sorte un boom entraîne une guerre des prix apparente (car en fait il s'agit d'une collusion tacite). Même dans le cas où $p_1^m \leq p_2 \leq p_2^m$, il s'avère que la collusion est moins importante lorsque la demande est élevée.

6.9 Rabais secrets**

Objectif de l'exercice : Étudier la collusion tacite dans un environnement où les firmes ne peuvent pas parfaitement observer les décisions (prix ou quantités) de leurs concurrents[6].

Les entreprises ne sont pas toujours capables d'identifier une déviation de leurs concurrents. Elles remarquent parfois une chute de leurs ventes. Toutefois deux causes différentes peuvent en être la source. Soit un concurrent a baissé son prix et attire plus de demande. Soit la demande a diminué suite à un choc défavorable. Si la firme pouvait identifier le premier cas, elle déclencherait une guerre des prix tandis que dans le second cas elle n'aurait aucune raison de le faire.

Supposons que la demande est soit strictement positive (avec la probabilité $1-\alpha$), soit nulle (avec la probabilité α) mais que les entreprises n'observent pas la demande. Nous cherchons si la collusion tacite suivante est soutenable : les entreprises pratiquent le prix de monopole tant qu'elles ont eu une demande strictement positive par le passé. Si l'une des entreprises a eu une demande nulle, alors les entreprises vendent au coût marginal constant c pendant T périodes puis elles retournent au prix de monopole.

1. *Remarquer que lorsqu'une entreprise a un profit nul, alors toutes les firmes savent qu'au moins une entreprise a un profit nul.*
2. *Soit V^+ l'espérance de gain actualisée pour une firme lorsque la période courante est dans une phase de collusion (toutes les entreprises pratiquent le prix de monopole). Soit V^- l'espérance de gain actualisée pour une firme lorsque la période courante débute une phase de punition. Déterminer ces deux grandeurs.*
3. *Trouver une condition sur δ pour qu'il existe $T < +\infty$ tel que la collusion tacite soit possible.*

Correction

1. Il est important de remarquer que si une des entreprises a un profit nul, toutes savent qu'au moins une entreprise a un profit nul : soit une firme a un profit nul parce que la demande est nulle, elle le sait et ses concurrents ont aussi un profit nul et donc ils le savent aussi. Soit le profit est nul après une déviation et dans ce cas la firme qui a baissé son prix sait que les autres font un profit nul. Il résulte de cette remarque que le début de la phase de punition est toujours bien identifié par toutes les entreprises.

[6]Cet exercice s'appuie sur la présentation d'une adaptation du modèle de Green et Porter "Noncooperative Collusion under Imperfect Price Information", *Econometrica*, 52(1), January 1984, pages 87-100. par Tirole, *The Theory of Industrial Organization*, MIT press, 1988, pages 262-264. L'idée illustrée ici remonte à Stigler (George Stigler (1911-1991), prix Nobel d'économie 1982. Pour plus d'informations sur G. Stigler se référer aux articles le concernant dans le *Journal of Political Economy*, Vol. 101, No. 5, October 1993).

2. Ces grandeurs sont définies par

$$V^+ = (1-\alpha)\left(\frac{\Pi^m}{n} + \delta V^+\right) + \alpha\left(\delta V^-\right)$$

et

$$V^- = \delta^T V^+.$$

En effet, si la période courante est dans une phase de collusion, les firmes pratiquent le prix de monopole. Avec une probabilité $1-\alpha$ la demande est élevée et chaque entreprise gagne une part $\frac{1}{n}$ du profit de monopole et la période suivante reste en phase de collusion ce qui donne un gain actualisé de δV^+. Tandis qu'avec la probabilité α, la demande est nulle, aucune entreprise ne fait de profit et la période suivante débute une phase de punition d'où un gain actualisé de δV^-.

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues nous conduit à :

$$V^+ = \frac{1-\alpha}{1-(1-\alpha)\delta - \alpha\delta^{T+1}}\frac{\Pi^m}{n},$$

et

$$V^- = \frac{(1-\alpha)\delta^T}{1-(1-\alpha)\delta - \alpha\delta^{T+1}}\frac{\Pi^m}{n}.$$

3. Pour que ce plan forme un équilibre de Nash, il suffit qu'une entreprise ne souhaite pas dévier lorsqu'elle se trouve dans une phase de collusion. En effet, dévier lors de la phase de punition ne sert à rien puisque le profit est nul. Dévier lors d'une phase de collusion rapporte en espérance :

$$(1-\alpha)\left(\Pi^m + \delta V^-\right) + \alpha\delta V^-,$$

en effet, l'entreprise dévie sans savoir si la demande est élevée ou pas. Donc avec une probabilité $1-\alpha$ la déviation rapporte dans la période courante Π^m mais cela déclenche une phase de punition au début de la période suivante ce qui en espérance rapporte δV^-. De plus avec la probabilité α la déviation ne sert à rien car la demande est nulle, auquel cas la période suivante débute une phase de punition. Pour avoir un équilibre de Nash il faut que

$$V^+ \geq (1-\alpha)\left(\Pi^m + \delta V^-\right) + \alpha\delta V^-,$$

soit après simplifications

$$1 \geq n\left(1-(1-\alpha)\delta\right) - (n\alpha - 1)\,\delta^{T+1}$$

Comme les phases de punition sont coûteuses, le but est de trouver le T le plus petit qui vérifie cette inégalité. Il est immédiat que cette inégalité n'est pas vraie pour $T = 0$. Pour qu'elle soit vrai pour un T fini elle doit être vrai pour $T = +\infty$ ce qui conduit à

$$(1-\alpha)\delta > \frac{n-1}{n}.$$

Le modèle prédit des guerres de prix périodiques bien que les entreprises fassent de la collusion. En outre ces guerres de prix sont déclenchées lorsque la demande est faible (contrairement au modèle de Rotemberg et Saloner).

Chapitre 7

Fusions

L'analyse des fusions d'entreprises est l'un des problèmes centraux de l'économie industrielle contemporaine. Cette analyse peut se faire de trois points de vue différents :

Tout d'abord du point de vue des firmes de nombreuses questions demandent des réponses : une fusion est-elle profitable ou pas ? En cas de fusion comment les concurrents vont-ils réagir ? Une fusion entraîne-t-elle une autre fusion ?

D'autre part, une fusion entre des entreprises soulève des problèmes de droit de la concurrence : faut-il l'autoriser ou pas ? La firme résultant de la fusion aura-t-elle une position dominante ? En abusera-t-elle ?

Enfin, en terme de politique industrielle, la fusion de deux entreprises est-elle bénéfique pour un pays ? En particulier, est-ce une bonne idée ou pas que de favoriser la création d'un champion national ?

Les exercices de ce chapitre peuvent être résolus sans rappel de cours. En revanche, ils s'appuient sur les exercices des chapitres 3 (concurrence à la Cournot) et 4 (concurrence en prix).

L'exercice 7.1 souligne deux paradoxes liés à l'analyse d'une fusion lorsque la concurrence est à la Cournot. Tout d'abord la fusion peut ne pas être profitable. Ensuite même si fusion est profitable, une firme hors fusion connaît une hausse de profit supérieur à un firme dans la fusion. Ces paradoxes peuvent être éliminés si des contraintes de capacité existent ou si la fusion entraîne une réduction des coûts de production. Les exercices 7.3 et 7.4 étudient des fusions lorsque la firme issue d'une fusion devient leader de Stackelberg. L'exercice 7.6 analyse des fusions en présence de rendements décroissants et de gain d'efficacité dans la production liés à la fusion. Les exercices 7.7 et 7.8 étudient les fusions dans le cadre de la concurrence en prix entre produits différenciés. Enfin, les exercices 7.9 et 7.10 s'intéressent à l'intégration verticale. Tout d'abord lorsque la concurrence est en prix sur le marché du bien final, ensuite lorsqu'elle est à la Cournot.

7.1 Avantage à fusionner ?**

Objectif de l'exercice : En présence de rendements d'échelle constants et de firmes identiques en concurrence à la Cournot, la fusion de k entreprises parmi n n'a pour seul effet que de réduire le nombre de concurrents. On montre d'une part que cette réduction profite toujours plus aux firmes qui ne participent pas à la fusion qu'à celles qui fusionnent. Et d'autre part qu'une fusion n'est profitable que si elle englobe plus de 80% des firmes[1].

Soit une industrie où n firmes vendent un bien homogène qu'elles produisent avec un coût marginal constant noté c. Soit Q la quantité totale produite par les n firmes, la fonction inverse de demande est $P(Q) = \max\{0; a - bQ\}$. Il est supposé que les firmes se livrent une concurrence à la Cournot (choix simultané de quantité).

1. *Déterminer l'équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Cournot.*
2. *Les firmes 1 à k fusionnent. Elles forment donc une unique entité. Déterminer le nouvel équilibre de Nash.*
3. *Comparer le profit d'une firme participant à la fusion avec celui d'une firme hors fusion.*
4. *En comparant le profit d'une firme participant à la fusion à celui obtenu avant la fusion, déterminer une condition sur k pour que la fusion soit profitable.*

Correction

1. En utilisant les résultats de l'exercice 3.3 avec pour tout i, $c_i = c$, il vient qu'à l'équilibre chaque firme choisit la quantité :
$$q_i^* = \frac{a-c}{b(n+1)},$$
et réalise un profit
$$\pi_i^*(n) = \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}.$$
Remarquons que le profit d'équilibre est une fonction décroissante de n.
2. Lorsque k firmes fusionnent il reste $n-k+1$ firmes actives. Le nouvel équilibre de Cournot-Nash se déduit de la question précédente.
3. Une entreprise hors fusion réalise donc un profit égal à $\pi^*(n-k+1)$ tandis qu'une entreprise dans la fusion doit partager ce même profit avec les autres membres de la fusion : $\frac{1}{k}\pi^*(n-k+1)$. Il est donc immédiat qu'il est préférable de rester en dehors de la fusion.

[1]Cet exercice s'inspire de l'article “Losses from Horizontal Merger : The Effects of an Exogenous Change in Industry Structure on Cournot-Nash Equilibrium” de Stephen W. Salant, Sheldon Switzer and Robert J. Reynolds publié dans le *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 98, No. 2. (May, 1983), pp. 185-199.

4. Une firme en dehors de la fusion voit son profit augmenter (réduction de n). Pour une entreprise dans la fusion, le profit augmente si et seulement si

$$\pi^*(n-k+1) \geq k\pi^*(n)$$

qui se simplifie en

$$n+1 \geq \sqrt{k}\,(n-k+2)$$

Étudions la fonction

$$f(k) = \sqrt{k}\,(n-k+2)$$

si $f(k)$ est inférieur à $n+1$, alors la fusion est profitable, sinon elle ne l'est pas.

L'étude de la fonction $x\,(n+2-x^2)$ montre que la fonction $f(k)$ strictement concave en k, strictement croissante pour $0 < k < \frac{n+2}{3}$ et strictement décroissante pour $\frac{n+2}{3} < k < n$.

On a que

$$f(1) = n+1$$

ce qui indique qu'en l'absence de fusion la variation de profit est nulle. Tandis que (avec $n \geq 1$)

$$f(n) = 2\sqrt{n} < n+1$$

ce qui indique qu'une fusion englobant toute les firmes est profitable. Les propriétés de la fonction $f(.)$ assure qu'il n'existe qu'une seule solution à l'équation

$$f(k) = n+1 \text{ avec } 1 < k < n\ .$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré dont les racines sont (en oubliant la contrainte sur k et en utilisant le fait que 1 est racine évidente) :

$$k=1,\ k=\frac{3+2\,n+\sqrt{5+4\,n}}{2} \text{ et } k=\frac{3+2\,n-\sqrt{5+4\,n}}{2}$$

Seule la troisième racine respecte la contrainte sur k et donc une fusion est profitable si et seulement si :

$$k \geq \widetilde{k} = \frac{3+2\,n-\sqrt{5+4\,n}}{2}.$$

La figure 7.1 illustre la profitabilité d'une fusion en fonction du nombre de firmes dans la fusion.

L'étude de la fonction $\frac{3+2\,n-\sqrt{5+4\,n}}{2n}$ montre que le nombre d'entreprises fusionnant doit être en pourcentage supérieur à 80% du nombre total d'entreprises pour que la fusion soit avantageuse pour ses membres. En revanche, il est toujours intéressant pour une firme extérieure à la fusion qu'une fusion se forme (réduction de la concurrence) et il est toujours plus profitable de rester hors de la fusion que d'en faire partie.

La profitabilité d'une fusion semble donc être remise en cause. Plus précisément, le modèle de base de concurrence à la Cournot (notamment avec des firmes identiques) ne semble pas pouvoir capturer les effets bénéfiques d'une

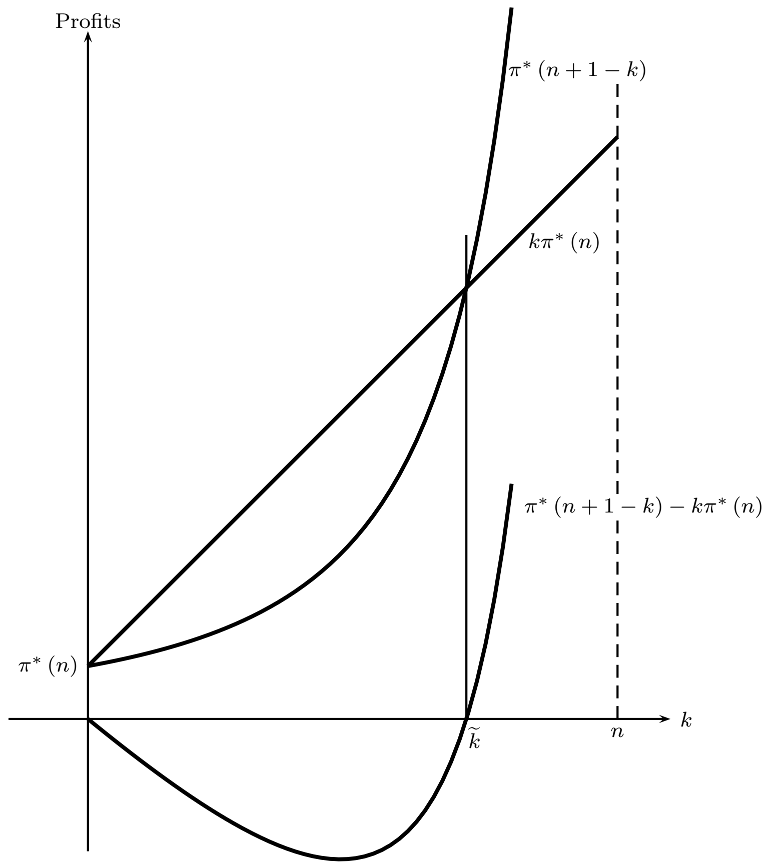


FIG. 7.1 – Profitabilité d'une fusion selon le nombre de firmes impliquées

fusion pour ses membres. En effet, l'objectif d'une fusion ne saurait consister uniquement en la réduction du nombre des concurrents. Cela montre que si une fusion a lieu, elle doit conférer un avantage à l'entité issue de la fusion par exemple un gain d'efficacité ou une position de leader sur le marché.

7.2 Fusion et réduction des coûts**

Objectif de l'exercice : Étudier la rentabilité d'une fusion de k entreprises parmi n permettant de réduire le coût marginal de production. Les rendements d'échelle sont supposés constants et les firmes initialement identiques. De plus la concurrence est à la Cournot.

Soit une industrie où n firmes vendent un bien homogène qu'elles produisent avec un coût marginal constant noté c. Soit Q la quantité totale produite par les n firmes, la fonction inverse de demande est $P(Q) = \max\{0; a - bQ\}$. Il est supposé que les firmes se livrent une concurrence à la Cournot (choix simultané de quantité).

1. *Déterminer l'équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Cournot.*
2. *Une fusion englobe k entreprises. La concurrence est toujours à la Cournot mais entre $n-k+1$ firmes, parmi lesquelles $n-k$ ont un coût marginal de production égal à c tandis que la nouvelle firme a un coût marginal égal à γ. En introduisant $\rho = \frac{c-\gamma}{a-c}$ étudier la profitabilité de la fusion.*
3. *Étudier l'impact de la fusion sur une firme hors fusion ainsi que sur les consommateurs.*

Correction

1. En utilisant les résultats de l'exercice 3.3 avec pour tout i, $c_i = c$, il vient qu'à l'équilibre chaque firme choisit la quantité :
$$q_i^* = \frac{a-c}{b(n+1)},$$
et réalise un profit
$$\pi_i^*(n) = \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}.$$
Remarquons que le profit d'équilibre est une fonction décroissante de n.
2. Lorsque k firmes fusionnent il reste $n-k+1$ firmes actives. Toutefois une firme possède un coût marginal de production inférieur à celui de ses concurrents. Les résultats de l'exercice 3.3 s'appliquent directement et conduisent aux profits suivants. Pour une firme hors fusion :
$$\pi_i^{**} = \frac{1}{b}\left(\frac{a+\gamma-2c}{n-k+2}\right)^2.$$
Pour la firme issue de la fusion :
$$\pi^{**} = \frac{1}{b}\left(\frac{a-c+(n-k+1)(c-\gamma)}{n-k+2}\right)^2.$$

Avant la fusion, toutes les firmes avaient comme profit

$$\pi_i^* = \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2.$$

La fusion est donc profitable si et seulement si :

$$\pi^{**} \geq k\pi_i^*.$$

En introduisant

$$\rho = \frac{c-\gamma}{a-c},$$

il vient que

$$\sqrt{\frac{\pi^{**}}{k\pi_i^*}} \geq 1 \Leftrightarrow \rho \geq \frac{\sqrt{k}\,(n-k+2)-(n+1)}{(n+1)\,(n-k+1)}$$

que l'on peut aussi écrire

$$(n+1)\left[1+\rho\,(n-k+1)\right] \geq \sqrt{k}\,(n-k+2) = f\,(k)$$

Si $\gamma = c$, alors $\rho = 0$ et on retrouve la formule de l'exercice 7.1 où la fonction $f\,(.)$ a été étudiée. Elle est strictement concave, décroissante (resp. croissante) pour k inférieur (resp. supérieur) à $\frac{n+2}{3}$.
Pour $k = 1$ et $\rho > 0$, on a

$$(n+1)\left[1+\rho\,(n-k+1)\right] > n+1 = f\,(1)$$

tandis que pour $k = n$

$$(n+1)\left[1+\rho\right] > 2\sqrt{n} = f\,(n)$$

Il existe donc soit zéro soit deux solutions (éventuellement une en cas de racine double) à l'équation

$$(n+1)\left[1+\rho\,(n-k+1)\right] = f\,(k)$$

Notons $\widetilde{k}\,(\rho)$ et $\widetilde{\widetilde{k}}\,(\rho)$ ces solutions lorsqu'elles existent.
La figure 7.2 illustre la profitabilité d'une fusion en fonction du nombre de firmes dans la fusion. Si ρ est suffisamment élevé, toute fusion est profitable, en revanche si ρ est relativement petit, seules les petites et les grandes fusions sont profitables. Les fusions intermédiaires font perdre de l'argent.

3. De leur côté, les firmes hors fusion gagnent si et seulement si

$$\pi_i^{**} = \frac{1}{b}\left(\frac{a+\gamma-2c}{n-k+2}\right)^2 \geq \pi_i^* = \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2.$$

qui se réduit à

$$\rho \leq \frac{k-1}{n+1}.$$

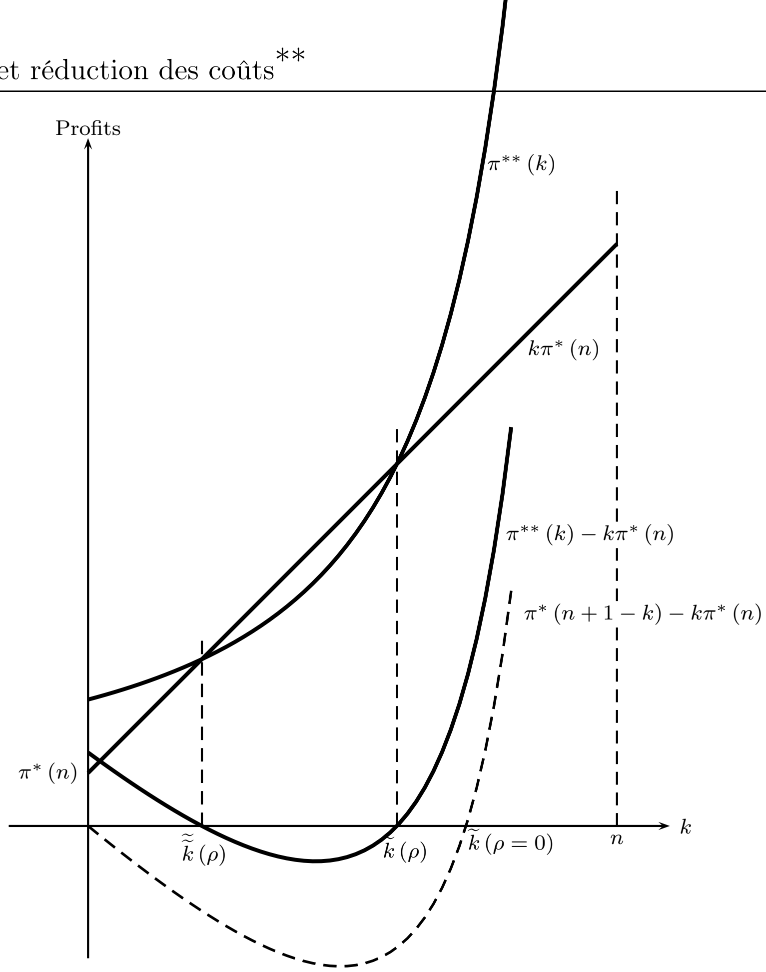


FIG. 7.2 – Profitabilité d'une fusion selon le nombre de firmes impliquées

Si le gain d'efficacité lié à la fusion (mesuré par ρ) est grand, alors les firmes hors fusion peuvent voir leur profit diminuer.

Pour mesurer l'impact d'une telle fusion sur le surplus des consommateurs, il suffit d'évaluer son effet sur la quantité totale produite. Si cette quantité diminue, le surplus des consommateurs diminue, et inversement.

Avant la fusion, la quantité totale produite est

$$Q^{*} = \frac{n}{b(n+1)}(a-c)$$

Après la fusion, la quantité totale s'élève à (voir exercice 3.3)

$$Q^{**} = \frac{n-k+1}{b(n-k+2)}\left(a - \frac{(n-k)c+\gamma}{n-k+1}\right) = Q^{**} = \frac{n-k+1}{b(n-k+2)}\left(a - c + \frac{c-\gamma}{n-k+1}\right)$$

Il en résulte que

$$Q^{*} < Q^{**} \Leftrightarrow \rho \geq \frac{k-1}{n+1}$$

Cette condition est l'opposée de celle régissant l'effet sur le profit d'une firme hors fusion. Donc si une fusion entraîne une augmentation du surplus des consommateurs, alors elle conduit à une diminution des profits des firmes hors fusion (et inversement).

7.3 Quand la fusion crée un leader**

Objectif de l'exercice : Étudier le caractère profitable d'une fusion lorsque l'entité issue de la fusion devient leader de Stackelberg sur son marché[2]. Le paradoxe mis en valeur dans l'exercice 7.1 disparaît ici.

Soit une industrie où n firmes vendent un bien homogène qu'elles produisent avec un coût marginal constant noté c. Soit Q la quantité totale produite par les n firmes, la fonction inverse de demande est $P(Q) = \max\{0; a - bQ\}$. Il est supposé qu'avant la fusion les firmes se livrent une concurrence à la Cournot (choix simultané de quantité). Après la fusion (k firmes deviennent une firme tandis que $n-k$ firmes restent indépendantes), la nouvelle entité devient leader de Stackelberg (voir exercice 3.14) sur le marché.

1. *Déterminer l'équilibre après la fusion. Une fusion est-elle profitable ?*
2. *Pour quelles valeurs de k le profit d'une firme hors fusion augmente-t-il ? Même question pour le surplus des consommateurs.*
3. *Calculer l'impact total sur le bien-être social d'une fusion.*

Correction

1. Notons q la quantité choisie par le leader. Les $n-k$ firmes hors fusion se livrent à une concurrence à la Cournot à q fixé, c'est-à-dire avec une fonction inverse de demande égale à $a - bq - bX$, où X est la somme des quantités choisies par $n-k$ firmes. On peut appliquer les résultats de l'exercice 3.3 et on obtient que chacune des $n-k$ firmes produit :

$$q_F = \frac{a-c-bq}{b(n-k+1)}.$$

Anticipant cela, le profit du leader s'écrit :

$$\pi_L = (a-c-b(n-k)\,q_F - bq)\,q = \frac{1}{n-k+1}(a-c-bq)\,q$$

qui est maximum pour

$$q = q_S = \frac{a-c}{2b} = q^m.$$

Le leader choisit de produire la quantité de monopole. Les suiveurs produisent alors :

$$q_F = \frac{a-c}{2b(n-k+1)}.$$

[2] Cet idée a été développée par Andrew F. Daughety dans l'article "Beneficial Concentration", *American Economic Review*, Vol. 80, Iss. 5, December 1990, pp. 1231-1237.

Au total, la quantité produite est donc

$$Q^* = \frac{a-c}{2b} + \frac{(n-k)(a-c)}{2b(n-k+1)} = \left(\frac{2n-2k+1}{n-k+1}\right)\frac{a-c}{2b},$$

la marge d'équilibre est donc

$$p^* - c = a - c - bQ^* = \frac{a-c}{2(n-k+1)},$$

d'où un profit égal à

$$\frac{1}{b(n-k+1)}\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = \frac{1}{n-k+1}\pi^m$$

pour la firme issue de la fusion avec $\pi^m = \frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$ le profit de monopole.
Pour une firme hors fusion, en revanche, le profit s'établit à

$$\frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{2(n-k+1)}\right)^2 = \frac{1}{(n-k+1)^2}\pi^m.$$

La firme issue de la fusion réalise donc un profit plus important qu'une firme hors fusion (contrairement au résultat de l'exercice 7.1).
Le profit de la nouvelle firme augmente si et seulement si

$$\frac{1}{b(n-k+1)}\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \geq k\frac{1}{b}\left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$$

soit si et seulement si

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \geq k(n+1-k)$$

ce qui est toujours vrai. Ce résultat est à contraster avec celui de l'exercice 7.1). Ici une fusion est toujours profitable.

2. Le profit d'une firme hors fusion n'augmente que si

$$2(n-k+1) \leq n+1 \Leftrightarrow k \geq \frac{n+1}{2}.$$

Si la fusion implique plus que la moitié des firmes, une firme hors fusion voit son profit augmenter. En revanche, si la fusion concerne moins que la moitié des firmes, le profit d'une firme hors fusion diminue.

Qu'en est-il des consommateurs ? Le surplus des consommateurs augmente si et seulement si la quantité totale produite augmente. Or cela n'arrive que si

$$\frac{2n-2k+1}{2(n-k+1)} \geq \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow k \leq \frac{n+1}{2}$$

l'intérêt des consommateurs est donc opposé à celui des firmes hors fusion.

3. L'effet de la fusion sur le bien-être social se décompose en trois effets : le gain de profit réalisé par la nouvelle firme, le gain ou la perte de profit des firmes hors fusion et le gain ou la perte de surplus des consommateurs. Plus en détail, nous avons que :
   Le gain de profit de la nouvelle firme s'écrit
   $$\left[\frac{1}{4(n-k+1)}-\frac{k}{(n+1)^2}\right]\frac{(a-c)^2}{b}.$$
   Les gains ou les pertes des $n-k$ firmes hors fusion valent
   $$(n-k)\left[\frac{1}{4(n-k+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]\frac{(a-c)^2}{b}.$$
   Enfin, sachant que le surplus des consommateurs est égal à $\frac{b}{2}Q^2$, le gain ou la perte de surplus des consommateurs s'établit à
   $$\frac{1}{2}\left[\frac{(2n-2k+1)^2}{4(n-k+1)^2}-\frac{n^2}{(n+1)^2}\right]\frac{(a-c)^2}{b}.$$
   Au total, et après simplifications, la variation de bien-être social suite à une fusion est égale à
   $$\Delta W=\left[\frac{(n+1-2k)(3(n+1)-2k)}{8(n+1)^2(n-k+1)^2}\right]\frac{(a-c)^2}{b}$$
   Puisque k est toujours inférieur à n, $2k$ est donc toujours inférieur à $3(n+1)$ et donc la variation de bien-être social dépend de la position de k et de $\frac{n+1}{2}$
   $$\Delta W>0\Leftrightarrow k<\frac{n+1}{2}.$$
   Remarquons, que cette variation de bien-être social ne prend en compte ni une diminution éventuelle des coûts fixes de production, ni une réduction envisageable du coût marginal de production liées à la fusion. Il s'agit d'une conclusion surprenante pour la politique de la concurrence (contrôle des concentrations). Une fusion impliquant moins de la moitié des firmes, et conférant une position de leader, entraîne une augmentation du bien-être social. Les firmes fusionnant et les consommateurs y gagnent, au détriment des firmes hors fusion.

7.4 Vague de fusions***

Objectif de l'exercice : L'exercice 7.3 a montré qu'une fusion est profitable si elle confère à l'entité issue de la fusion une position de leader de Stackelberg. Ce résultat est étudié ici sous une perspective dynamique : une première fusion peut être suivie d'une seconde et ainsi de suite. Comment évolue la rentabilité de ces fusions successives ?

Soit une industrie où $2n$ firmes vendent un bien homogène qu'elles produisent avec un coût marginal constant noté c. Soit Q la quantité totale produite par les n firmes, la fonction inverse de demande est $P(Q) = \max\{0\,;\, a - bQ\}$. Il est supposé qu'avant la fusion les firmes se livrent une concurrence à la Cournot (choix simultané de quantité).

Une fusion n'implique que deux firmes. Toute nouvelle entité (firme issue d'une fusion) devient leader de Stackelberg (voir exercices 3.14 et 7.3) sur le marché. Après k fusions, il y a donc k leaders de Stackelberg et $2(n-k)$ firmes en position de suiveurs.

1. *Déterminer l'équilibre de Nash d'un jeu de concurrence à la Stackelberg avec k firmes leaders et $2(n-k)$ firmes en position de suiveurs. En particulier calculer le profit, noté $\pi_L(k)$, d'un leader et le profit, noté $\pi_S(k)$, d'un suiveur.*
2. *En comparant $\pi_L(k)$ avec $2\pi_L(k)$, dire où s'arrête le processus de fusion.*
3. *Déterminer le bien-être social à l'équilibre après k fusions, $k \leq n$. Pour quelle valeur de k est-il maximum ?*

Correction

1. Pour déterminer l'équilibre de Nash d'un jeu de concurrence à la Stackelberg avec k firmes leaders et $2(n-k)$ firmes en position de suiveurs, commençons par les choix de production des suiveurs, une fois connue la quantité totale, notée Q_L produite par les leaders.

   En fait les $2(n-k)$ suiveurs se livrent une concurrence à la Cournot sur un marché de taille $a - bQ_L$ et nous avons immédiatement (voir l'exercice 3.3) qu'une firme en position de suiveur choisie la quantité
$$q_S = \frac{a - c - bQ_L}{b\left[2(n-k)+1\right]}.$$
   Anticipant cela, les k leaders se livrent une concurrence à la Cournot avec une fonction de demande égale à $a - 2b(n-k)\,q_S$. Soit q_L la quantité choisie par un leader. Son profit s'écrit :
$$\pi_L = \left(a - c - bQ_L - \frac{n-k}{2(n-k)+1}\left(a - c - bQ_L\right)\right) q_L$$
   soit
$$\pi_L = \frac{n-k+1}{2(n-k)+1}\left(a - c - bQ_L\right) q_L.$$

La condition du premier ordre conduit à

$$a - c - bQ_L - bq_L = 0$$

et comme il est facile de voir que l'équilibre est symétrique (tous les leader choisissent la même quantité), on a (à l'équilibre de Nash) $Q_L = kq_L$ et donc

$$q_L^* = \frac{a-c}{b(k+1)}.$$

Il en découle que

$$q_S^* = \frac{a-c}{b(k+1)[2(n-k)+1]},$$

la quantité totale produite est donc

$$Q^* = kq_L^* + 2(n-k)q_S^* = \frac{2(k+1)(n-k)+k}{(k+1)(2(n-k)+1)}\left(\frac{a-c}{b}\right),$$

la marge d'équilibre

$$a - c - bQ^* = \frac{a-c}{(k+1)(2(n-k)+1)},$$

d'où le profit à l'équilibre d'une firme leader :

$$\pi_L^*(k) = \frac{1}{(k+1)^2(2(n-k)+1)}\frac{(a-c)^2}{b}$$

et d'un suiveur

$$\pi_S^*(k) = \frac{1}{(k+1)^2(2(n-k)+1)^2}\frac{(a-c)^2}{b}.$$

2. Du point de vue de deux entreprises une fusion est profitable si elle permet d'accroître la somme de leur profit. Comme la fusion fait passer les deux firmes d'un statut de suiveur à celui de leader la fusion est profitable si et seulement si

$$\pi_L^*(k+1) \geq 2\pi_S^*(k)$$

soit

$$\frac{2(n-k)-1}{(k+1)^2(2(n-k)+1)^2}\frac{(a-c)^2}{b} \geq 0$$

ce qui est toujours vrai puisque $k+1 \leq n$ (il ne peut y avoir au plus que n fusions). Cela indique que partant de $2n$ firmes en concurrence à la Cournot, une série de n fusions devrait conduire l'industrie à n firmes en concurrence à la Cournot.

3. Le bien-être social étant la somme des profits des firmes et du surplus des consommateurs, il s'écrit

$$W^*(k) = k\pi_L^*(k) + 2(n-k)\pi_S^*(k) + \frac{b}{2}(Q^*(k))^2$$

en introduisant les variables $x = k + 1$ et $y = 2(n - k) + 1$, il vient

$$W^*(k) = \frac{(a-c)^2}{b}\left(\frac{1}{x^2y^2}\right)\left(\frac{1}{2}(xy-1)^2 + (x-1)y + (y-1)\right)$$

soit après simplifications

$$W^*(k) = \frac{(a-c)^2}{2b}\left(1 - \frac{1}{x^2y^2}\right)$$

À partir de quand une fusion n'est-elle plus profitable ? Pour cela remarquons que la fonction

$$1 - \frac{1}{z^2}$$

est toujours croissante avec z. D'autre part la fonction

$$xy = (k+1)(2n + 1 - 2k)$$

est strictement croissante pour $k < \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$ et strictement décroissante pour $k > \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$. Il en résulte que

$$W^*(k) \nearrow k \Leftrightarrow k < \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

Dans le modèle de concurrence à la Stackelberg canonique (c'est-à-dire avec un duopole) on constate que le bien-être social augmente par rapport à l'équilibre de Cournot-Nash. Lorsque le nombre de leaders augmente (et le nombre de firmes actives diminue) ce résultat est amendé ici. Le bien-être social augmente bien avec les premières fusions (qui créent un petit groupe de leaders) mais diminue finalement lorsque la taille du groupe des leaders devient trop importante. À la limite, lorsque toutes les firmes sont devenues des leaders, le bien-être social a clairement diminué par rapport à la situation initiale puisque dans les deux cas la concurrence est à la Cournot mais qu'après la vague de fusions, le nombre de firmes a été divisé par deux.

7.5 Fusion sans synergie**

Objectif de l'exercice : En présence de firmes asymétriques (possédant des fonctions de coût de production différentes) une fusion a deux effets. L'effet reduction de la concurrence (étudié dans l'exercice **??** et un effet rationalisation de la production. Le premier effet pousse le prix à la hausse, tandis que le second tend à le faire diminuer. L'exercice étudie comment ces deux effets se combinent à l'équilibre[3].

Soit n firmes en concurrence à la Cournot sur le marché d'un bien homogène. La firme i produit la quantité x_i avec un coût de production $C_i(x_i)$. La fonction $C_i(.)$ est positive et croissante. On note $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$ la quantité totale produite. La fonction inverse de demande s'écrit alors $P(X)$, elle est positive est décroissante. Deux hypothèses sont faites pour assurer l'existence, l'unicité et la stabilité de l'équilibre de Nash dans ce jeu de concurrence à la Cournot :

$$P'(X) + XP''(X) < 0 \text{ et } C_i'' \geq 0 \ .$$

1. *Écrire le profit, $\Pi_i(x)$, de l'entreprise i. Rappeler la définition de l'équilibre de Nash dans ce contexte et déterminer les conditions du premier ordre qui le caractérisent.*
2. *Supposons que les n firmes fusionnent et appartiennent, donc, à un seul propriétaire. Celui-ci maximise la somme des profits. On dit qu'il n'y a pas de synergie car les fonctions de coût des firmes ne changent pas après la fusion. Déterminer les conditions du premier ordre qui caractérisent cette maximisation. Quelle constatation peut-on faire sur les coûts marginaux de production à l'optimum ?*
3. *Notons x^* le vecteur des quantités produites à l'équilibre de Cournot-Nash et X^* la somme de ces quantités. De manière analogue, notons y^* le vecteur des quantités choisies par le propriétaire unique et Y^* leur somme. Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que $X^* > Y^*$.*
4. *Quel est l'effet d'une fusion des n firmes sur le surplus des consommateurs ?*

Correction

1. Le profit de l'entreprise i s'écrit :

$$\Pi_i(x_i, x_{-i}) = P(X)\, x_i - C_i(x_i)\,.$$

Un équilibre de Nash de ce jeu de concurrence à la Cournot est un vecteur de quantité x^* tel que pour tout i, pour tout x_i,

$$\Pi_i\left(x_i^*, x_{-i}^*\right) \geq \Pi_i\left(x_i, x_{-i}^*\right)\,.$$

[3]Cet exercice s'appuie sur (une partie) de l'article de Joseph Farrell et Carl Shapiro, “Horizontal Mergers : An Equilibrium Analysis”, *American Economic Review*, 1990, Vol. 80, pp. 107-126.

Lorsque la fonction Π_i est strictement concave en x_i (ce qui est bien le cas ici, grâce aux hypothèses faites), la condition ci-dessus correspond à

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i}\left(x_i^*, x_{-i}^*\right) = 0$$

soit

$$P\left(X^*\right) + x_i^* P'\left(X^*\right) - C_i'\left(x_i^*\right) = 0\ .$$

2. Le propriétaire des n firmes maximise :

$$\Pi(x) = \sum_j \Pi_j\left(x_j, x_{-j}\right)$$

la condition du premier ordre par rapport à x_i s'écrit donc

$$\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x_i} = 0$$

soit

$$\frac{\partial \Pi_i(x)}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial \Pi_j(x)}{\partial x_i} = 0$$

à partir de

$$\frac{\partial \Pi_i(x)}{\partial x_i} = P(X) + x_i P'(X) - C_i'(x_i)$$

et de

$$\frac{\partial \Pi_j(x)}{\partial x_i} = x_j P'(X)$$

il vient en notant y^* le vecteur des quantités qui maximisent le profit de l'entité fusionnée que la condition du premier ordre par rapport à la quantité de la firme i s'écrit :

$$P\left(Y^*\right) + Y^* P'\left(Y^*\right) - C_i'\left(y_i^*\right) = 0\ .$$

En particulier, on constate que pour tout i et tout j,

$$C_i'\left(y_i^*\right) = C_j'\left(y_j^*\right)$$

les coûts marginaux de production sont égaux (à l'optimum) entre les différentes firmes. Cela reflète une efficacité productive : la quantité Y^* est produite de la manière la plus économique possible. Comme cette propriété n'est pas vraie à l'équilibre de Cournot (la quantité X^* n'est pas produite de la manière la plus économe), il s'agit d'un point positif en faveur de la fusion. En revanche comme X^* est différent de Y^* l'effet sur le surplus des consommateurs et sur le bien-être social est inconnu.

3. Supposons par l'absurde que

$$X^* \leq Y^*$$

l'hypothèse

$$P'(X) + X P''(X) < 0$$

implique (puisque $P' < 0$) que

$$2P'(X) + XP''(X) < 0$$

et donc que la fonction

$$P(X) + XP'(X)$$

est strictement décroissante. Si donc $X^* \leq Y^*$, il vient que

$$P(X^*) + X^*P'(X^*) \geq P(Y^*) + Y^*P'(Y^*)$$

Or pour tout i on a d'une part,

$$x_i^* < X^* \Rightarrow C_i'(x_i^*) = P(X^*) + x_i^*P'(X^*) > P(X^*) + X^*P'(X^*)$$

et d'autre part

$$P(Y^*) + Y^*P'(Y^*) = C_i'(y_i^*)$$

il en résulte que pour tout i

$$C_i'(x_i^*) > C_i'(y_i^*)$$

ce qui conduit à une contradiction. En effet, soit $C_i'' = 0$ et alors on devrait avoir une égalité. Soit $C_i'' > 0$ pour tout i et alors cela implique

$$x_i^* > y_i^* \text{ et donc } X^* > Y^* \; .$$

4. La fusion des n firmes a toujours un effet négatif sur le surplus des consommateurs car le prix augmente malgré les gains d'efficacité dans la production liés à la fusion. En effet, à partir de l'équilibre de Nash du jeu de concurrence à la Cournot, la fusion permet de rationaliser la production. Le monopole à n établissements peut produire la même quantité totale mais à un coût moindre. Cet effet pourrait le pousser à produire davantage. En revanche, la diminution de la concurrence à un effet négatif sur la quantité (baisse de la quantité pour augmenter le prix). En l'absence de synergie, l'effet concurrence l'emporte toujours sur l'effet rationalisation de la production.

7.6 Rendements décroissants, fusions et bien-être**

Objectif de l'exercice : En présence de firmes asymétriques, une fusion peut permettre de rationaliser la production. Cette propriété déjà vue dans l'exercice 7.5 est étudiée ici dans un cadre particulier. En particulier l'impact d'une fusion sur le bien-être social est analysé[4].

Soit 3 firmes en concurrence à la Cournot sur un marché où la fonction inverse de demande s'écrit $P(Q) = \max\{0\,;\, a - bQ\}$. *La firme* i, $1 \leq i \leq 3$ *est caractérisée par une capacité d'efficacité* k_i *et produire la quantité* q_i *lui coûte* $\frac{1}{2k_i}q_i^2$.

1. *Déterminer l'équilibre de Cournot-Nash.*
2. *En déduire, en supposant* $b = 1$, *les profits d'équilibre, le surplus des consommateurs et le bien-être social lorsque* $k_1 = 1/2$ *et* $k_2 = k_3 = 1/4$.
3. *On suppose maintenant que les firmes 2 et 3 fusionnent.*
   (a) *Montrer que la nouvelle firme réalise le même profit en maintenant deux établissements ou en n'ayant plus qu'un seul établissement avec pour capacité* $k_2 + k_3$.
   (b) *Déterminer le nouvel équilibre.*
   (c) *Comparer profits, surplus et bien-être social avant et après la fusion.*

Correction

1. Déterminons l'équilibre de Nash pour un nombre quelconque d'entreprises. Le profit de la firme i, $1 \leq i \leq n$ s'écrit

$$\pi_i = (a - bQ)\,q_i - \frac{1}{2k_i}q_i^2$$

soit encore

$$\pi_i = \left(a - bQ_{-i} - \left(b + \frac{1}{2k_i}\right)q_i\right)q_i$$

d'où la fonction de meilleures réponses suivante

$$q_i^*(Q_{-i}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a - bQ_{-i}}{b + \frac{1}{2k_i}}\right)$$

qui, à l'équilibre, est équivalente à

$$\left(b + \frac{1}{k_i}\right)q_i^* = a - bQ^* \text{ et donc à } q_i^* = \frac{1}{b + \frac{1}{k_i}}\left(a - bQ^*\right)$$

[4] Lectures complémentaires : Martin K. Perry et Robert H. Porter « Oligopoly and the Incentive for Horizontal Merger » 1985, *American Economic Review*, Vol. 75, Issue 1, March, pp. 219-227. R. Preston McAfee et Michael A. Williams « Horizontal Mergers and Antitrust Policy » 1992, *Journal of Industrial Economics*, Vol. 40, No. 2, June, pp. 181-187.

et donc en sommant ces conditions pour $i = 1$ à n il vient que

$$Q^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b + \frac{1}{k_i}} \right) (a - bQ^*)$$

d'où en posant

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b + \frac{1}{k_i}}$$

l'on déduit que la quantité totale produite à l'équilibre est

$$Q^* = \frac{aB}{1 + bB},$$

et donc que la firme i produit à l'équilibre

$$q_i^* = \frac{a}{\left(b + \frac{1}{k_i}\right)(1 + bB)}.$$

Le profit réalisé, à l'équilibre, par la firme i est donc

$$\pi_i^* = \frac{2b + \frac{1}{k_i}}{2\left(b + \frac{1}{k_i}\right)^2} \left[\frac{a}{1 + bB} \right]^2.$$

2. Lorsque $k_1 = 1/2$, $k_2 = k_3 = 1/4$ et $b = 1$, alors

$$B = 11/15,\ \pi_1^* = \frac{50a^2}{26^2},\ \pi_2^* = \pi_3^* = \frac{27a^2}{26^2},\ S^* = \frac{\frac{121}{2}a^2}{26^2},$$

et donc

$$W^* = \frac{265}{2} \left(\frac{a}{26} \right)^2 .$$

3. (a) Si la nouvelle firme garde les deux établissements, sa fonction de coût s'écrit :

$$C_F(q) = \min_{q_2,\, q_3} \left[\frac{q_2^2}{2k_2} + \frac{q_3^2}{2k_3} \right] \ s.c. q_2 + q_3 = q$$

or ce programme de minimisation implique

$$\frac{q_2}{k_2} = \frac{q_3}{k_3} \text{ et } q_2 + q_3 = q\ .$$

Si, au contraire, la nouvelle firme concentre toutes ses capacités dans un même établissement la fonction de coût s'écrit :

$$\widetilde{C_F}(q) = \frac{q^2}{2(k_2 + k_3)}$$

En utilisant la propriété

$$\frac{q_2}{k_2} = \frac{q_3}{k_3} = \frac{q_2 + q_3}{k_2 + k_3} = \frac{q}{k_2 + k_3}$$

on en déduit que

$$q_2 = \frac{k_2}{k_2 + k_3} q \text{ et } q_3 = \frac{k_3}{k_2 + k_3} q$$

et donc

$$C_F(q) = \frac{\left(\frac{k_2}{k_2+k_3} q\right)^2}{2k_2} + \frac{\left(\frac{k_3}{k_2+k_3} q\right)^2}{2k_3} = \widetilde{C_F}(q)$$

(b) En appliquant les formules pour $n = 2$ et $B = 2/3$ il vient, en notant q_F la quantité produite par la nouvelle firme et en utilisant l'exposant $**$ pour noter les grandeurs à l'équilibre après la fusion, on a

$$q_1^{**} = q_F^{**} = a/5 \ .$$

(c) Après la fusion on a

$$B = 2/3,\ \pi_1^{**} = \pi_F^{**} = \frac{2}{25} a^2 > \pi_2^* + \pi_3^* > \pi_1^* \text{ et } S^{**} = \frac{2}{25} a^2 < S^*,$$

et donc

$$W^{**} = \frac{8}{25} a^2 > W^* \ .$$

Les profits de toutes les firmes augmentent tandis que le surplus des consommateurs diminue. Au total le bien-être social augmente. La diminution de la quantité produite après la fusion est plus que compensée par la réduction des coûts de production due à la rationalisation de la production au sein de la nouvelle firme.

7.7 Concurrence en prix et fusion**

Objectif de l'exercice : Le problème de la rentabilité d'une fusion sur un marché où toutes les firmes sont identiques (étudié dans l'exercice 7.1 dans le cadre d'une concurrence à la Cournot) est analysé ici dans le cadre d'une concurrence en prix[5].

Soit n firmes en concurrence en prix sur le marché d'un bien différencié. Chaque firme propose une variante du même bien. Soit p_i le prix de la ième variante, la fonction de demande de la firme i est :

$$q_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \max\left\{0\,;\, a - p_i - \sigma\left(p_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p_j\right)\right\}.$$

Toutes les firmes produisent au même coût marginal constant c normalisé à 0.

1. *Déterminer les prix à l'équilibre de Nash du jeu de concurrence en prix entre n firmes, ainsi que les profits d'équilibre.*
2. *On suppose que $1 \leq m \leq n$ firmes fusionnent. La nouvelle entité maximise son profit en choisissant les m prix des m variétés qu'elle produit. Déterminer le nouvel équilibre de Nash du jeu de concurrence en prix après une telle fusion.*
3. *Montrer que toute fusion est profitable (remarquer que les prix augmentent) et que cette profitabilité augmente avec m.*
4. *Montrer (sans calcul) qu'il est préférable pour une firme d'être en dehors de la fusion plutôt que partie prenante.*

Correction

1. La fonction de profit de la firme i s'écrit (pour les prix tels que la demande est positive) :

$$\begin{aligned}\pi_i &= p_i\left[a - p_i - \sigma\left(p_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p_j\right)\right]\\ &= p_i\left[a + \frac{\sigma}{n}\sum_{j\neq i} p_j - \left(\frac{n + (n-1)}{n}\right)p_i\right].\end{aligned}$$

On remarque que pour tout $j \neq i$,

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_j} = \frac{\sigma}{n}p_i > 0.$$

[5] Cet exercice s'appuie sur l'article de Raymond Deneckere et Carl Davidson, « Incentives to form coalitions with Bertrand competition », 1985, *Rand Journal of Economics*, Vol. 16, No 4, Winter, pp. 473-486.

Le profit de la firme i croît avec le prix de ses concurrents.
La fonction de meilleures réponses de la firme i est donc

$$p_i^*(p_{-i}) = \frac{n}{2(n+(n-1))}\left(a + \frac{\sigma}{n}\sum_{j\neq i} p_j\right),$$

d'où il est facile de déduire qu'à l'équilibre toutes les firmes pratiquent le même prix. Il en résulte que (pour tout i)

$$p_i^* = \frac{a}{2+\frac{n-1}{n}\sigma}.$$

La quantité produite par une firme à l'équilibre est donc

$$q_i^* = a - p_i^* = \frac{a\left(1+\frac{n-1}{n}\sigma\right)}{2+\frac{n-1}{n}\sigma}$$

et les profits d'équilibres sont

$$\pi_i^* = \left(1+\frac{n-1}{n}\sigma\right)\left(\frac{a}{2+\frac{n-1}{n}\sigma}\right)^2.$$

2. Considérons (sans perte de généralité) que les firmes 1 à m fusionnent, tandis que les firmes de $m+1$ à n restent indépendantes. Le profit de la nouvelle entité s'écrit :

$$\pi_F = \sum_{i=1}^{m}\left[p_i\left(a-(1+\sigma)p_i\right)\right] + \frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} p_j$$

tandis que pour une firme hors fusion le profit est toujours

$$\pi_h = p_h\left(a-(1+\sigma)p_h\right) + \frac{\sigma}{n}p_h\sum_{j=1}^{n} p_j.$$

Les conditions du premier ordre qui permettent de caractériser l'équilibre de Nash s'en déduisent. Tout d'abord pour i, $1 \leq i \leq m$ on a :

$$\frac{\partial \pi_F}{\partial p_i} = 0 \Leftrightarrow a - 2(1+\sigma)p_i + \frac{\sigma}{n}\sum_{j=1}^{n} p_j + \frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{m} p_i = 0$$

tandis que pour h, $m+1 \leq h \leq n$ on a :

$$\frac{\partial \pi_h}{\partial p_h} = 0 \Leftrightarrow a - 2(1+\sigma)p_h + \frac{\sigma}{n}\sum_{j=1}^{n} p_j + \frac{\sigma}{n}p_h = 0.$$

À partir de ces conditions du premier ordre, il est facile de montrer que pour tout i, $1 \leq i \leq m$, le prix d'équilibre p_i^* est indépendant de i, et on notera $p_i^* = p_F^*$. De même que pour tout h, $m+1 \leq h \leq n$ le prix d'équilibre p_h^*

est indépendant de h, on notera $p_h^* = p_H^*$. Les conditions du premier ordre s'écrivent alors

$$\begin{cases} a - 2(1+\sigma)p_F^* + \dfrac{\sigma}{n}\left(mp_F^* + (n-m)p_H^*\right) + \dfrac{m\sigma}{n}p_F^* & = 0 \\ a - 2(1+\sigma)p_H^* + \dfrac{\sigma}{n}\left(mp_F^* + (n-m)p_H^*\right) + \dfrac{\sigma}{n}p_H^* & = 0 \end{cases}$$

d'où les prix d'équilibre

$$\begin{cases} p_F^* & = \dfrac{[2n + (2n-1)\sigma]\,a}{4n + 2(3n-m-1)\sigma + \left(\frac{n-m}{2}\right)(2n+m-2)\sigma^2} \\ p_H^* & = \dfrac{[2n + (2n-m)\sigma]\,a}{4n + 2(3n-m-1)\sigma + \left(\frac{n-m}{2}\right)(2n+m-2)\sigma^2} \end{cases}$$

On peut remarquer que $p_F^* > p_H^*$, les variétés vendues par la nouvelle firme ont un prix plus élevé que celles produites par des firmes indépendantes.
Le profit de la nouvelle firme est donc

$$\pi_F^* = \left[\frac{[2n + (2n-1)\sigma]\,a}{4n + 2(3n-m-1)\sigma + \left(\frac{n-m}{2}\right)(2n+m-2)\sigma^2}\right]^2 \left[1 + \frac{n-m}{n}\sigma\right] m$$

et le profit d'une firme hors fusion est

$$\pi_H^* = \left[\frac{[2n + (2n-m)\sigma]\,a}{4n + 2(3n-m-1)\sigma + \left(\frac{n-m}{2}\right)(2n+m-2)\sigma^2}\right]^2 \left[1 + \frac{n-1}{n}\sigma\right]$$

3. Après la fusion les prix augmentent, on a :

$$p_F^* > p_H^* > p_i^*$$

il en résulte que

$$\pi_F^* > m\pi_i^*,$$

en effet, supposons que le prix des produits vendus par la nouvelle firme ne changent pas. Lorsque le prix des $n-m$ firmes hors fusion augmente de p_i^* à p_H^* cela profite à la nouvelle firme (la fonction de profit d'une firme est croissante avec le prix des autres). On a donc

$$\pi_i\left(p_i^*, \ldots, p_i^*, p_H^*, \ldots, p_H^*\right) > \pi_i\left(p_i^*, \ldots, p_i^*, p_i^*, \ldots, p_i^*\right)$$

comme par définition p_F^* est une meilleure réponse à p_H^* on a forcément

$$\pi_i\left(p_F^*, \ldots, p_F^*, p_H^*, \ldots, p_H^*\right) \geq \pi_i\left(p_i^*, \ldots, p_i^*, p_H^*, \ldots, p_H^*\right)$$

et donc

$$\frac{1}{m}\pi_F^* = \pi_i\left(p_F^*, \ldots, p_F^*, p_H^*, \ldots, p_H^*\right) > \pi_i\left(p_i^*, \ldots, p_i^*, p_i^*, \ldots, p_i^*\right) = \pi_i^*.$$

Ce qui prouve que toute fusion est profitable du point de vue des firmes qui s'associent. Ce résultat vient de la concurrence en prix, lorsque la concurrence est en quantité, nous avons vu qu'une fusion n'était pas forcément profitable (voir exercice 7.1).

Pour montrer que la fusion est d'autant plus profitable que m est grand, le plus simple est de remarquer que

$$\frac{\partial p_H^*}{\partial m} = \frac{\left[2\left(1+\sigma\right)\left(2m-1\right)n - \sigma m^2\right] na\sigma^2}{\left(4n + 2\left(3n-m-1\right)\sigma + \left(\frac{n-m}{2}\right)\left(2n+m-2\right)\sigma^2\right)^2} > 0,$$

donc

$$p_H^{**} = p_H^*\left(m+1\right) > p_H^*\left(m\right) = p_H^*,$$

comme de plus

$$p_F^*\left(m\right) > p_H^*\left(m\right),$$

on a, en notant $p_F^{**} = p_F^*\left(m+1\right)$, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\pi_F^*\left(m\right) = \pi_i\left(p_F^*, \ldots, p_F^*, p_H^*, p_H^*, \ldots, p_H^*\right) &< \pi_i\left(p_F^*, \ldots, p_F^*, p_F^*, p_H^{**}, \ldots, p_H^{**}\right) \\ &< \pi_i\left(p_F^{**}, \ldots, p_F^{**}, p_F^{**}, p_H^{**}, \ldots, p_H^{**}\right) \\ &= \frac{1}{m+1}\pi_F^*\left(m+1\right).\end{aligned}$$

et donc une fusion impliquant $m+1$ firmes est plus profitable qu'une fusion entre m entreprises.

4. Nous devons montrer que $\frac{1}{m}\pi_F^* < \pi_H^*$. Considérons une firme hors fusion. Elle fait face à $n-m-1$ firmes qui pratiquent un prix p_H^* et à m firmes qui pratiquent p_F^*. De son côté, une firme qui est dans la fusion fait face à $n-m$ firmes qui pratiquent un prix p_H^* et à $m-1$ firmes qui pratiquent p_F^*. Les deux firmes ont donc $n-m-1+m-1 = n-2$ concurrents commun et un concurrent différent. Comme p_F^* est plus grand que p_H^* et que p_H^* est une meilleure réponse, le profit d'une firme hors fusion est plus grand. Formellement, notons $\widetilde{p}$ le vecteur des prix des concurrents commun à une firme hors et à une firme dans la fusion. On a que toute firme préfère que son dernier concurrent pratique un prix élevé. C'est-à-dire

$$p_F^* > p_H^* \Rightarrow \forall p,\ \pi_i\left(p, p_F^*, \widetilde{p}\right) > \pi_i\left(p, p_H^*, \widetilde{p}\right)$$

donc en particulier

$$\pi_i\left(p_F^*, p_F^*, \widetilde{p}\right) > \pi_i\left(p_F^*, p_H^*, \widetilde{p}\right) = \frac{1}{m}\pi_F^*$$

de plus comme p_H^* est une meilleure réponse à $(p_F^*, \widetilde{p})$, on a :

$$\pi_H^* = \pi_i\left(p_H^*, p_F^*, \widetilde{p}\right) \geq \pi_i\left(p_F^*, p_F^*, \widetilde{p}\right)$$

et donc

$$\pi_H^* > \frac{1}{m}\pi_F^*.$$

Le problème du passager clandestin déjà souligné avec la concurrence à la Cournot reste vrai en concurrence en prix : bien qu'une fusion profite à toutes les firmes, elle profite plus aux firmes qui ne font pas partie de la fusion. Mais si toutes les firmes choisissent de ne pas faire partie de la fusion, alors il n'y a pas de fusion et les profits restent constants.

7.8 Concurrence en prix et fusion-destruction**

Objectif de l'exercice : Étudier les effets d'une fusion dans le cas où elle entraîne une réduction des variétés proposées aux consommateurs.

Soit une industrie où quatre variantes d'un même bien sont proposées aux consommateurs. Chaque variante est vendue par une firme différente. On suppose que la fonction de demande du bien i est déterminée par la maximisation de l'utilité du consommateur représentatif :

$$U = 4\sum_i q_i - \frac{1}{4}\sum_i\sum_{j\neq i} q_i q_j - \frac{1}{2}\sum_i q_i^2 - \sum_i p_i q_i.$$

1. *Déterminer les fonctions de demande puis l'équilibre de Nash du jeu de concurrence en prix entre les quatre firmes, lorsqu'elles ont toutes le même coût marginal constant de production noté c.*
2. *On suppose que deux firmes fusionnent. Après la fusion, il n'y a plus que trois variantes sur le marché (la nouvelle entité n'a pas la possibilité de vendre deux variétés). De plus, le coût marginal de production de la firme résultant de la fusion est nul. Déterminer le nouvel équilibre de Nash. Pour quelles valeurs de c la fusion est-elle profitable ?*
3. *On considère que les deux firmes avec le coût marginal égal à c fusionnent à leur tour. Il n'y a donc plus que deux variantes sur le marché et toutes les firmes ont un coût marginal de production nul. Déterminer l'équilibre de Nash.*

Correction

1. La fonction d'utilité du consommateur représentatif s'écrit :

$$\begin{aligned}4\left(q_1+q_2+q_3+q_4\right)&-\frac{1}{2}\left(q_1q_2+q_1q_3+q_1q_4+q_2q_3+q_2q_4+q_3q_4\right)\\&-\frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2\right)-\left(p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+p_4q_4\right)\end{aligned}$$

sa maximisation conduit à :

$$q_i = \frac{2}{5}\left(4 - 4p_i + \sum_{j\neq i} p_j\right).$$

Le profit de la firme i, $i = 1$ à 4, s'écrit :

$$\pi_i = (p_i - c)\, q_i = \frac{2}{5}(p_i - c)\left(4 - 4p_i + \sum_{j\neq i} p_j\right)$$

donc étant donnés les prix des autres firmes, le prix $p_i^*(p_{-i})$ qui maximise le profit de la firme i est

$$p_i^*(p_{-i}) = \frac{1}{2}\left[c + \frac{1}{4}\left(4 + \sum_{j \neq i} p_j\right)\right]$$

d'où l'équilibre

$$p_i^* = \frac{4}{5}(1+c).$$

On en déduit que

$$\pi_i^* = \frac{8}{125}(4-c)^2.$$

2. Après la fusion la fonction d'utilité du consommateur représentatif n'est plus définie que sur trois variantes. Elle s'écrit donc

$$4(q_1+q_2+q_3) - \frac{1}{2}(q_1q_2+q_1q_3+q_2q_3) \\ - \frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right) - (p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3)$$

Il en résulte que les fonctions de demande sont

$$q_i = \frac{1}{2}\left(4 - 3p_i + \sum_{j \neq i} p_j\right).$$

Pour l'écriture des profits, il faut distinguer maintenant le profit de la firme issue de la fusion (son coût marginal de production est nul) :

$$\pi_F = \frac{1}{2}p_F\left(4 - 3p_F + \sum_{j \neq F} p_j\right)$$

et le profit d'une firme i hors fusion (coût marginal égal à c) :

$$\pi_i = \frac{1}{2}(p_i - c)\left(4 - 3p_i + \sum_{j \neq i} p_j\right).$$

La fonction de meilleures réponses de la firme F est donc

$$p_F^*(p_{-F}) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(4 + \sum_{j \neq F} p_j\right)$$

et celle d'une firme hors fusion est

$$p_i^*(p_{-i}) = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{3}\left(4 - 3p_i + \sum_{j \neq i} p_j\right)\right)$$

il en résulte que l'équilibre de Nash est caractérisé par les prix suivants :

$$p_F^* = 1 + \frac{3}{14}c$$

pour la nouvelle firme, et
$$p_H^* = 1 + \frac{9}{14}c,$$
pour les firmes hors fusion. Les profits sont donc
$$\pi_F^* = \frac{3}{392}(14+3c)^2$$
pour la firme F et
$$\pi_H^* = \frac{3}{392}(14-5c)^2$$
pour les firmes hors fusion.
La fusion n'est profitable que si
$$\pi_F^* > 2\pi_i^* \Leftrightarrow \frac{3}{392}(14+3c)^2 > \frac{16}{125}(4-c)^2 \Leftrightarrow c > \frac{14\left(2917-520\sqrt{30}\right)}{2897} \simeq 0,33.$$
Si c est proche de 0, la fusion diminue le nombre de concurrents sans conférer à la nouvelle firme un avantage important en terme de coût marginal de production. Il en résulte qu'il est pas profitable de fusionner. En revanche, si c est grand, alors le gain d'efficacité lié à la fusion est suffisamment important pour la rendre attractive.

3. Lorsqu'il n'y a plus que deux variantes, la fonction d'utilité s'écrit :
$$4(q_1+q_2) - \frac{1}{2}(q_1q_2) - \frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2\right) - (p_1q_1+p_2q_2)$$
les fonctions de demande sont donc
$$q_i = \frac{2}{3}(4-2p_i+p_j),$$
le profit s'écrit
$$\pi_i = \frac{2}{3}p_i(4-2p_i+p_j),$$
ce qui conduit à l'équilibre de Nash :
$$p_i^{**} = \frac{4}{3},$$
et donc à des profits d'équilibres égaux à
$$\pi_i^{**} = \frac{64}{27}.$$
Cette dernière fusion est profitable si (sachant que $c<4$)
$$\pi_i^{**} > 2\pi_H^* \Leftrightarrow \frac{64}{27} > 2\frac{3}{392}(14-5c)^2 \Leftrightarrow c > \frac{14}{45} \simeq 0,31.$$
Comme $0.31 < 0.33$, si la première fusion était rentable, alors la seconde l'est aussi. En revanche, par rapport à la situation initiale, la vague de fusion n'a été rentable pour les entreprises que si
$$\pi_i^{**} > 2\pi_i^* \Rightarrow \frac{64}{27} > \frac{8}{125}(4-c)^2$$
ce qui est toujours vrai pour $0<c<4$. Du point de vue de la situation initiale, il est toujours bien de passer de 4 firmes (avec un coût marginal égal à c) à deux firmes (avec un coût marginal nul). Si les fusions sont séquentielles, il est possible que cela ne soit pas mis en œuvre.

7.9 Intégration verticale***

Objectif de l'exercice : Étudier les conséquences d'une intégration verticale entre une firme et un de ses fournisseurs sur la concurrence[6].

Soient deux firmes notées D1 et D2 qui se font concurrence, en prix, sur le marché d'un bien différencié. Soit p_i le prix pratiqué par Di, et p_j le prix de son concurrent, et soit $0 < \sigma < 1$ un paramètre de différenciation, la demande s'écrit :

$$q_i\left(p_i, p_j\right) = \max\left\{0\,;\, a - p_i - \sigma\left(p_i - \frac{1}{2}\left(p_i + p_j\right)\right)\right\}.$$

Le coût marginal de production de D1 et D2 dépend du prix auquel est acheté un input (bien homogène) produit par deux firmes notées U1 et U2. Le coût marginal de production de l'input par U1 et U2 est normalisé à zéro.

1. *Déterminer les profits à l'équilibre de Nash du jeu où U1 et U2 se font concurrence à la Bertrand : U1 et U2 fixent simultanément les prix w_1 et w_2 auxquels ils vendent l'input. D1 et D2 observent ces prix, décident où et combien acheter, puis D1 et D2 fixent simultanément les prix p_1 et p_2 auxquels leurs biens sont vendus aux consommateurs.*
2. *On suppose maintenant que D1 possède U1. Quel est le nouvel équilibre si U1 peut continuer à vendre sur le marché de l'input et que la concurrence est toujours à la Bertrand ?*
3. *Supposons maintenant que D1 possède U1 et que U1 se retire complètement du marché de l'input. Calculer le prix w_2^m auquel D2 vend à U2 et en déduire les profits d'équilibre. Comparer les profits à ceux obtenus lorsque D2 possède U2.*
4. *Considérons enfin le cas où D1 possède U1 et où U1 s'engage sur la politique de vente suivante : vendre n'importe qu'elle quantité au prix w mais ne rien vendre à un prix inférieur. Déterminer l'équilibre en fonction de w lorsque U2 et D2 sont séparés. Analyser l'incitation qu'ont U2 et D2 à fusionner. Quel est le meilleur choix de w par U1 ?*

Correction

1. La concurrence à la Bertrand entre U1 et U2 (voir exercice 4.1) les conduit aux prix :
$$w_1 = w_2 = 0.$$
Étant donnés ces prix pour l'input, le profit de Di s'écrit
$$p_i q_i = p_i\left(p_i, p_j\right) = \max\left\{0\,;\, a - p_i - \sigma\left(p_i - \frac{1}{2}\left(p_i + p_j\right)\right)\right\}.$$

[6]Cet exercice s'appuie sur l'article de Janusz A. Ordover, Garth Saloner et Steven C. Salop « Equilibrium Vertical Foreclosure » 1990, *American Economic Review*, Vol. 80, Issue 1, March, 1990, pp. 127-142

La maximisation de ce profit sur p_i à p_j fixé conduit à

$$p_i^*(p_j) = \frac{1}{2}\frac{a + \frac{\sigma}{2}p_j}{1 + \frac{\sigma}{2}},$$

et donc aux prix d'équilibres

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a}{2 + \frac{1}{2}\sigma},$$

et donc à des profits pour les producteurs d'input

$$\pi_{U1}^* = \pi_{U2}^* = 0,$$

et

$$\pi_{D1}^* = \pi_{D2}^* = \left(1 + \frac{1}{2}\sigma\right)\left(\frac{a}{2 + \frac{1}{2}\sigma}\right)^2 \frac{(4 + 2\sigma)\, a^2}{(4 + \sigma)^2}.$$

2. Lorsque U1 et U2 continuent à se faire une concurrence à la Bertrand, l'issue de cette concurrence est $w_1 = w_2 = 0$. En effet (et comme va le montrer les réponses aux questions 3 et 4) l'entité U1+D1 aimerait voir D2 pénalisé par un prix de l'input strictement positif (au sein de U1+D1 le prix de l'input est nul). Toutefois si $w_2 > 0$ l'argument classique en concurrence à la Bertrand est qu'un prix $w_1 = w_2 - \varepsilon$ permettrait à U1+D1 d'augmenter son profit.
3. Lorsque U1 se retire complètement du marché de l'input, U2 se retrouve en position de monopole. Pour déterminer le prix de monopole fixé par U2, il faut d'abord trouver la demande qui s'adresse à U2 et pour cela il faut résoudre le jeu de concurrence entre D1 et D2 lorsqu'elles ont des coût marginaux de production différents. Soit w_2 fixé on a

$$\pi_{D1} = p_1\left[a - \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)p_1 + \frac{\sigma}{2}p_2\right]$$

et

$$\pi_{D2} = (p_2 - w_2)\left[a + \frac{\sigma}{2}p_1 - \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)p_2\right]$$

l'équilibre de Nash se trouvent à l'intersection des fonction de meilleures réponses donc en résolvant le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} (2 + \sigma)\, p_1 - \dfrac{\sigma}{2}p_2 = a \\[2ex] -\dfrac{\sigma}{2}p_1 + (2 + \sigma)\, p_2 = a + \left(1 + \dfrac{\sigma}{2}\right) w_2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} p_1^*(w_2) = \dfrac{\left(2 + \frac{3}{2}\sigma\right) a + \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) w_2}{\left(2 + \frac{\sigma}{2}\right)\left(2 + \frac{3\sigma}{2}\right)} \\[3ex] p_2^*(w_2) = \dfrac{\left(2 + \frac{3}{2}\sigma\right) a + (2 + \sigma)\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) w_2}{\left(2 + \frac{\sigma}{2}\right)\left(2 + \frac{3\sigma}{2}\right)} \end{cases}$$

Il en résulte que

$$q_2(w_2) = \frac{2+\sigma}{2(4+\sigma)(4+3\sigma)}\left[2a(4+3\sigma) - (8+(8+\sigma)\sigma)w_2\right]$$

et donc que la maximisation sur w_2 de la fonction de profit $w_2 q_2$ par U2 le conduit à choisir le prix

$$w_2^m = \frac{a(4+3\sigma)}{8+(8+\sigma)\sigma}.$$

En remplaçant w_2 par w_2^m dans les expressions des prix il vient que

$$\begin{cases} p_1^* = p_1^*(w_2^m) = \dfrac{(16+18\sigma+3\sigma^2)a}{(4+\sigma)(8+8\sigma+\sigma^2)} \\ p_2^* = p_2^*(w_2^m) = \dfrac{4(6+6\sigma+\sigma^2)a}{(4+\sigma)(8+8\sigma+\sigma^2)} \end{cases}$$

d'où les profits

$$\begin{cases} \pi_{D1}^{**} = \dfrac{(2+\sigma)\ (16+3\,\sigma\ (6+\sigma))^2 a^2}{2(4+\sigma)^2(8+\sigma\ (8+\sigma))^2} \\ \pi_{D2}^{**} = \dfrac{(2+\sigma)a^2}{2(4+\sigma)^2} \\ \pi_{U1}^{**} = 0 \\ \pi_{U2}^{**} = \dfrac{(2+\sigma)\ (4+3\,\sigma)a^2}{2\ (4+\sigma)\ (8+8\,\sigma+\sigma^2)} \end{cases}$$

Si U2 et D2 sont intégrés verticalement, alors U2 vend à D2 au prix $w_2 = 0$ et cette situation est identique à celle de la première question. Le profit pour U2+D2 s'établit donc à

$$\pi_{U2+D2}^* = \frac{(4+2\sigma)a^2}{(4+\sigma)^2}.$$

U2 et D2 ont donc intérêt à s'intégrer si

$$\pi_{U2+D2}^* > \pi_{U2}^{**} + \pi_{D2}^{**}$$

or il est facile de voir que

$$\pi_{U2}^{**} + \pi_{D2}^{**} = \frac{6+6\sigma+\sigma^2}{8+8\sigma+\sigma^2}\pi_{U2+D2}^*$$

et qu'il est donc toujours profitable pour U2 et D2 de s'intégrer en réponse à une intégration de U1 et D1. Puisque le but de l'intégration entre U1 et D1 était d'augmenter le profit de U1+D1 à travers un hausse du prix d'achat de l'input pour D2, ce but n'est pas atteint.

4. À première vue, U1+D1 souhaite que U2 vende l'input le plus cher possible à D2 afin d'avoir un concurrent le moins efficace possible sur le marché du bien final. Toutefois, la question précédente a montré que si U2 pratique un prix trop élevé (son prix de monopole en l'occurrence), alors il devient profitable pour D2 de s'intégrer avec U2. La structure U1+D1 doit donc limiter la hausse du prix de l'input afin d'éviter l'intégration verticale de U2 et D2.

   Si U1+D1 annonce qu'elle est disposée à vendre l'input au prix w, U2 n'a pas intérêt à afficher un prix supérieur à w. Au contraire elle maximise son profit en pratiquant $w-\varepsilon$. Lorsque $w_2 = w$, la firme D2 obtient (d'après les calculs de la question précédente) comme profit :

$$\pi^*_{D2}(w) = \frac{(2+\sigma)\ (2\,a\ (4+3\,\sigma) - w\ (8+\sigma\ (8+\sigma)))^2}{2\,(4+\sigma)^2\,(4+3\,\sigma)^2}$$

   tandis que U2 réalise un profit

$$\pi^*_{U2}(w) = \frac{w\ (2+\sigma)\ (2\,a\ (4+3\,\sigma) - w\ (8+\sigma\ (8+\sigma)))}{2\ (4+\sigma)\ (4+3\,\sigma)}$$

   Formellement, U1+D1 cherche à maximiser son profit $\pi^*_{U1+D1}(w)$ sous la contrainte que $\pi^*_{D2}(w) + \pi^*_{U2}(w) \geq \pi^*_{D2}(0) = \pi^*_{D2+U2}$.
   Puisque le profit de U1+D1 est croissant avec w, cela l'amène à choisir $\overline{w} > 0$ tel que

$$\pi^*_{D2}(w) + \pi^*_{U2}(w) = \pi^*_{D2}(0)\,.$$

   Les calculs conduisent à

$$\overline{w} = \frac{a\,\sigma^2\ (4+3\,\sigma)}{(2+\sigma)^2\ (8+8\,\sigma+\sigma^2)}$$

   et on remarque bien que $\overline{w} < w_2^m$.
   Si après l'intégration verticale U1+D1 peut s'engager à continuer à vendre l'input au prix $\overline{w}$, alors elle réussit à prévenir l'intégration de U2 et de D2, tout en augmentant le prix auquel D2 achète l'input. Les consommateurs sont évidemment perdant si cette opération se réalise puisque les prix auxquels ils achètent les biens augmentent. Du point de vue du bien-être social aussi une telle intégration verticale est préjudiciable (la baisse de surplus des consommateurs n'est compensée par aucun gain d'efficacité chez les firmes puisque les coûts marginaux de production ne change pas après l'intégration, D1 produit plus après qu'avant mais comme son coût marginal de production est identique au coût marginal de D2 avant l'intégration, cette nouvelle répartition de la production est neutre du point de vue du bien-être social). En revanche, il est intéressant de noter que U1+D1 arrive à ses fins de manière subtile. En particulier en annonçant à l'avance qu'elle ne laissera pas le prix sur le marché de l'input trop augmenter, elle peut s'attirer la bienveillance des autorité de contrôle des concentrations, alors qu'en réalité elle cherche juste à empêcher que U2 et D2 ne s'intègrent à leur tour.

7.10 Intégration verticale et Cournot**

Objectif de l'exercice : Étudier les conséquences d'une intégration verticale lorsque les firmes sur le marché aval sont asymétriques. Trois effets sont étudiés : l'impact sur les consommateurs, sur les concurrents et enfin sur le bien-être social[7].

Soient deux firmes, D1 et D2, en duopole à la Cournot sur le marché d'un bien final. La fonction de demande s'écrit

$$P(Q) = \max\{0\,;\, a - bQ\}\,.$$

Pour produire une unité de bien final, les firmes D1 et D2 doivent acheter une unité d'input à l'un des trois producteurs U1, U2 ou U3. Les coût marginaux de production de l'input sont respectivement γ_1, γ_2 et γ_3 avec par hypothèse $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ et $\gamma_3 = w$. La concurrence sur le marché de l'input se fait à la Bertrand.

Soit t le prix d'achat de l'input, le coût marginal de production de Di est $c_i + t$, avec $c_1 = 0$ et $c_2 = 2c > 0$ (avec $c < a/4$). De plus on supposera que $0 < w < \frac{a-4c}{2}$.

1. *Déterminer l'équilibre du jeu où U1, U2 et U3 choisissent simultanément leurs prix de vente, D1 et D2 observent ces prix et achètent la quantité qu'ils désirent et choisissent simultanément les quantités q_1 et q_2 qu'ils proposent sur le marché du bien final. En particulier déterminer, s_1^* la part de marché de la firme D1 et le montant W^* de la fonction de bien-être social atteint à l'équilibre.*
2. *D1 et U1 s'intègrent verticalement et U1+D1 s'engage à ne plus vendre (ni acheter) sur le marché de l'input. U2 et U3 continuent à se faire concurrence à la Bertrand. Déterminer le nouvel équilibre de Nash. Soit $W^*(w)$ le bien-être social à cet équilibre. Comparer W^* et $W^*(w)$ en utilisant s_1^*.*
3. *Pour quelles valeurs de w, U2 et D2 ont-ils intérêt à s'intégrer à leur tour ?*

Correction

1. La concurrence à la Bertrand sur le marché de l'input conduit à un prix de vente de l'input égal à zéro. Nous devons donc résoudre un jeu de concurrence à la Cournot entre D1 et D2 avec $c_1 = 0$ et $c_2 = 2c$. En utilisant directement les résultats de l'exercice 3.1, il vient que

$$q_1^* = \frac{1}{3b}(a + 2c) \text{ et } q_2^* = \frac{1}{3b}(a - 4c)\,,\; Q^* = q_1^* + q_2^* = q_1^* = \frac{1}{3b}(2a - 2c)\,,$$

et donc aux parts de marché

$$s_1^* = \frac{q_1^*}{Q^*} = \frac{a + 2c}{2a - 2c} \text{ et } s_2^* = 1 - s_1^* = \frac{a - 4c}{2a - 2c},$$

[7] Cet exercice s'appuie sur l'article de Laurent Linnemer "Backward Integration by a Dominant Firm", 2003, *Journal of Economics & Management Strategy.*

et aux profits

$$\pi_1^* = \frac{1}{9b}(a+2c)^2 \text{ et } \pi_2^* = \frac{1}{9b}(a-4c)^2,$$

tandis que les profits des producteurs d'input sont nuls. Le surplus des consommateurs est

$$S^* = \frac{b}{2}(Q^*)^2 = \frac{2}{9b}(a-c)^2$$

et le bien-être social s'élève à

$$W^* = \frac{2}{9b}\left(2a^2 - 4ac + 11c^2\right).$$

2. Après l'intégration verticale, la concurrence à la Bertrand entre U2 et U3 entraîne le prix de l'input soit à w soit au niveau du prix de monopole de U2 si celui-la est inférieur à w. Supposons pour commencer être dans le cas où le prix de l'input est égal à w, il sera facile ensuite de calculer le prix de monopole de U2.

   La concurrence sur le marché du bien final s'effectue donc entre D1 dont le coût marginal de production reste égal à $c_1 = 0$ et D2 dont le coût marginal de production a augmenté $c_2 = 2c + w$. Toujours en utilisant les résultats de l'exercice 3.1, il vient que

$$q_1^*(w) = \frac{1}{3b}(a+2c+w) \text{ et } q_2^*(w) = \frac{1}{3b}(a-4c-2w),$$

   et donc aux profits et au surplus

$$\pi_1^*(w) = \frac{1}{9b}(a+2c+w)^2,\ \pi_2^*(w) = \frac{1}{9b}(a-4c-2w)^2 \text{ et } S^*(w) = \frac{2}{9b}\left(a-c-\frac{w}{2}\right)^2.$$

   La firme U2 réalise maintenant un profit strictement positif égal à

$$\pi_{U2}(w) = wq_2^*(w).$$

   Il est facile de vérifier que les profit de U1+D1 et de U2 augmentent tandis que le profit de D2 et le surplus des consommateurs diminuent.

   On voit aussi que le profit $\pi_{U2}(w)$ est maximum pour $w = \frac{a-4c}{4}$, il est donc croissant avec w pour $0 \leq w \leq \frac{a-4c}{4}$. L'équilibre du jeu de concurrence à la Bertrand entre U2 et U3 conduit bien à un prix de l'input égal à w.

   Le bien-être social s'établit donc (après simplification) à

$$W^*(w) = \frac{8\,a^2 + 44\,c^2 + 20\,c\,w - w^2 - 2\,a\,(8\,c + w)}{18\,b}.$$

   La différence de bien-être social entre après et avant l'intégration verticale est

$$\Delta W = W^*(w) - W^* = \frac{(20\,c - 2\,a - w)\,w}{18\,b}.$$

   L'intégration verticale peut donc conduire à un accroissement du bien-être social malgré la baisse de surplus des consommateurs. L'effet positif vient de la redistribution de la production de D2 vers D1 qui est efficace puisque D1

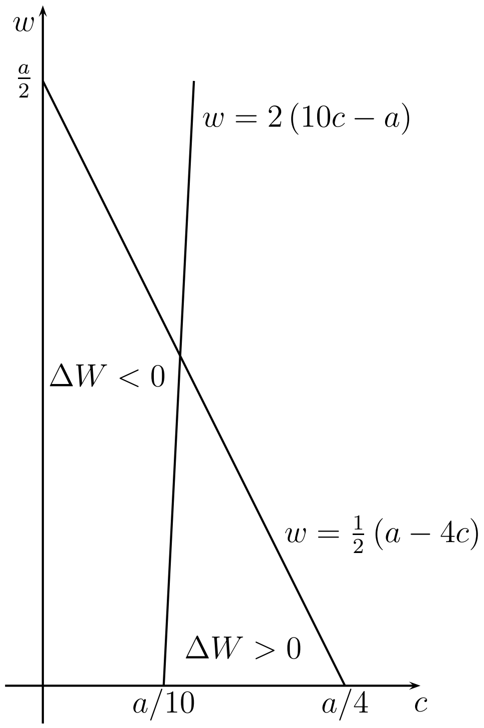


FIG. 7.3 – Variation de bien-être social selon les paramètres c et w

a un coût marginal de production inférieur ($c_1 = 0 < c = c_2$). La figure 7.3 présente dans le plan (c, w) la zone où la variation de bien-être social est négative et celle où elle est positive.
Il est possible de réarranger l'expression de ΔW pour faire apparaître s_1^*. En effet,

$$\Delta W = \frac{[6(a+2c) - 8(a-c) - w]\,w}{18b} = \frac{[6(a+2c) - 8(a-c) - w]\,w}{18b} = \frac{\left[\frac{a+2c}{2(a-c)} - \frac{2}{3} - \frac{w}{12(a-c)}\right] 2(a-c)\,w}{3b}$$

donc avec $w > 0$ il vient que

$$\Delta W > 0 \Leftrightarrow s_1^* > \frac{2}{3} + \frac{w}{12(a-c)}$$

c'est-à-dire que l'intégration verticale a un effet bénéfique sur le bien-être social si la firme D1 possède avant l'intégration une part de marché suffisamment importante.

3. Si U2 et D2 s'intègrent à leur tour, nous sommes ramener à la situation initiale (U1 et U2 en concurrence à la Bertrand). Cette intégration verticale est donc profitable si

$$\pi_2^* > \pi_2^*(w) + \pi_{U2}(w)$$

c'est-à-dire si

$$\frac{1}{9b}(a-4c)^2 > \frac{1}{9b}(a-4c-2w)^2 + \frac{1}{3b}(a-4c-2w)\,w$$

soit

$$\frac{w\ (a - 4\,c + 2\,w)}{9\,b} > 0$$

et donc U2 et D2 ont intérêt à s'intégrer pour toute valeur de $w > 0$.

Chapitre 8

Équilibre bayesien

En théorie des jeux, il est d'usage de distinguer des jeux à *information imparfaite* de ceux à *information incomplète*. Sans entrer dans les détails un jeu est à information imparfaite si un joueur n'observe pas certains coups joués par d'autres joueurs. Un jeu simultané est un exemple de situation à information imparfaite. En revanche, un jeu est dit à information incomplète lorsqu'un joueur ignore les fonctions de paiement d'autres joueurs. Par exemple, le concurrent d'une entreprise peut avoir des coûts de production bas ou bien élevés. Si la firme ignore le niveau des coûts de son concurrent, il s'agit d'un jeu à information incomplète. Dans un tel jeu, le comportement d'un acteur va dépendre des croyances qu'il a sur ces paiements des autres. Heureusement, cette distinction reste en général théorique car grâce au travail de John Harsanyi[1] il est possible de ramener un jeu à information incomplète à un jeu à information imparfaite. Pour cela il faut introduire un joueur supplémentaire, la Nature, qui joue en premier et qui sélectionne, selon une loi de probabilité *a priori* le type de chaque joueur. Une hypothèse centrale pour cette construction est que les probabilités avec lesquelles les coups de la nature sont joués sont connaissance commune des joueurs. Une fois la transformation de Harsanyi effectuée, on a un jeu à information imparfaite dont les équilibres de Nash peuvent être caractérisés par les méthodes "habituelles". Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs exercices où des équilibres de ce type (dits bayésiens) doivent être déterminés. Lorsque dans un tel contexte certains coups d'un joueur sont observés par d'autres joueurs, cette observation peut révéler de l'information et modifier les croyances. La règle de Bayes et le concept d'équilibre bayésien parfait sont alors utilisés.

Rappels de cours

La notion clef de l'équilibre bayésien[2] est celle de *type*. Le type d'un joueur contient toute l'information privée de ce joueur. C'est ce type qui est choisit par la nature et qui est ensuite révélé au moins au joueur concerné.

[1]Harsanyi, "Games with incomplete information played by bayesian players", *Mangament Science*, 1967-68, 14, pp. 159-182 et 320-334.

[2]L'usage du terme jeu bayesien vient des lois sur les probabilités conditionnelles introduites par Thomas Bayes mathématicien anglais né à Londres en 1702 et décédé en 1761.

Soit un jeu avec n joueurs. Pour chaque joueur, i, il existe un ensemble de types possibles noté Θ_i. L'ensemble $\Theta = \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_n$ de tous les types est connaissance commune de tous les joueurs. Au début du jeu, la nature choisit le type de chaque joueur à l'aide d'une loi de probabilité *a priori* qui est, elle aussi, connaissance commune de tous les joueurs. Il en résulte une probabilité pour chaque type θ_i de Θ_i notée $\rho_i(\theta_i)$ qui est strictement positive pour tout θ_i (sinon il était possible de réduire l'ensemble Θ_i en éliminant les types à probabilité nulle). Bien entendu, $\sum_{\theta_i \in \Theta_i} \rho_i(\theta_i) = 1$. Une fois connu son type, un joueur possède une loi de probabilité conditionnelle sur les types des autres joueurs qui se note $\rho(\theta_{-i}|\theta_i)$.

Soit A_i l'ensemble des actions disponibles pour le joueur i, quel que soit son type. Il est donc fait ici l'hypothèse peu restrictive que tous les types du joueur i ont accès aux mêmes actions. Si cela n'était pas le cas, il serait possible de construire un jeu équivalent en prenant la réunion des ensembles de stratégies des différents types et en modifiant les fonctions d'utilité de telle sorte que chaque type ne choisisse que parmi les actions qui lui étaient initialement accessibles. Soit $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ l'ensemble des actions disponibles pour tous les joueurs.

Une stratégie pure pour le joueur i est définie comme une fonction de l'ensemble des types dans l'ensemble A_i.

$$s_i(.) : \Theta_i \longrightarrow A_i,$$

donc l'action choisie par le joueur i s'il est de type θ_i est $s_i(\theta_i)$ et il s'agit d'un élément de A_i. Soit S_i l'ensemble des fonction de Θ_i dans A_i, S_i est l'ensemble des stratégies pures du joueur i.

La stratégie du joueur i est donc définie comme s'il ne connaissait pas encore son vrai type. Cela peut sembler inutilement compliqué car le joueur i connaît son type. En revanche comme il ignore le type des autres joueurs, cette notation permet de décrire les interactions stratégiques.

Une stratégie mixte, pour le joueur i, est un choix aléatoire d'une stratégie parmi tous les éléments de S_i. Une stratégie comportementale, pour le joueur i, est pour chacun de ses types un choix aléatoire d'une action parmi tous les éléments de A_i.

Il reste à définir les fonctions de paiements des joueurs. Ces fonctions dépendent des stratégies et des types. Soit $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ l'ensemble des stratégies pures de tous les joueurs. Une issue du jeu est un couple (s, θ) appartenant à $S \times \Theta$ c'est-à-dire un vecteur d'actions et un vecteur de types. Le paiement du joueur i s'écrit :

$$u_i(s_1, \ldots, s_n, \theta_1, \ldots, \theta_n).$$

De plus, comme au moment où un joueur détermine sa stratégie, il ignore les types des autres joueurs, il ne peut pas raisonner directement sur la fonction $u_i(s, \theta_i, \theta_{-i})$ mais il prend sa décision en fonction de l'espérance sur θ_{-i} de son utilité soit

$$E_{\theta_{-i}} u_i(s, \theta_i, \theta_{-i}).$$

Le concept utilisé pour résoudre un tel jeu à information imparfaite (ou jeu bayesien) est simplement l'équilibre de Nash. En effet le jeu que nous venons de décrire est un jeu sous forme normale habituel auquel le concept d'équilibre de Nash s'applique. Formellement :

Un vecteur de stratégies $(s_i^*(.))_{i=1}^n$ forme un équilibre de Nash si pour tout i, pour toute stratégie $s_i'(.)$ l'espérance de gain du joueur i est plus importante avec $s_i^*(.)$ qu'avec $s_i'(.)$ lorsque les stratégies des autres sont fixées à $s_{-i}^*(.)$. Soit pour tout i et pour tout $\theta_i \in \Theta_i$:

$$E_{\theta_{-i}} u_i\left(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i}\right) \geq E_{\theta_{-i}} u_i\left(s_i'(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i}\right)$$

soit encore

$$\sum_{\theta_{-i}} \rho(\theta_{-i}|\theta_i)\, u_i\left(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i}\right) \geq \sum_{\theta_{-i}} \rho(\theta_{-i}|\theta_i)\, u_i\left(s_i'(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i}\right).$$

Les jeux bayesiens peuvent être classés en deux grandes catégories. Les jeux statiques dont le déroulement est le suivant : la nature décide des types des différents joueurs puis ces derniers prennent une décision simultanément et le jeu s'arrête. Ou alors des jeux dynamiques dans lesquels, une fois les types déterminés par la nature, un (ou plusieurs) joueur(s) prennent une action qui est observée par d'autres joueurs qui à leur tour choisissent une stratégie. Les premiers jeux sont plus simples et l'équilibre de Nash donne souvent de bonnes prédictions. Dans les seconds le caractère séquentiel nécessite des raffinements de l'équilibre de Nash du type de l'équilibre sous-jeux parfait.

Les exercices de ce chapitre proposent de calculer des équilibres bayésiens et des équilibres bayésiens parfaits. Les exercices 8.1 et 8.2 montrent comment fonctionne la règle de Bayes qui est très utile pour les équilibres bayésiens parfaits. L'exercice 8.3 propose de trouver les stratégies optimales dans une version simplifiée du jeu de Poker. Les exercices 8.4, 8.5, 8.10 et 8.11 illustrent l'importance de l'équilibre bayésien en économie industrielle. L'exercice 8.6 détermine l'équilibre dans une enchère au premier prix. L'exercice 8.7 illustre les problèmes liés au coût de la sécurité dans une société. Les exercices 8.8 et 8.9, plus didactiques, présentent des calculs d'équilibres relativement élémentaires.

8.1 Règle de Bayes*

Objectif de l'exercice : se familiariser avec l'utilisation de la règle de Bayes qui permet de réviser des croyances lorsque de l'information est révélée[3].

La règle de Bayes (formule d'une probabilité conditionnelle) est très utilisée en économie. Toutefois, elle n'est pas forcément intuitive comme le montrent les trois exemples suivants.

1. *En soirée, l'individu A a été renversé par un taxi qui a pris la fuite. Les informations recueillies par la police montre que parmi les taxis circulant ce soir là 85% étaient verts et 15% étaient bleus[4]. Sur la base de cette information, les avocats de A décident d'attaquer la compagnie des taxis verts. Toutefois, un témoin est retrouvé et il affirme qu'il s'agissait d'un taxi bleu. Une série d'expériences est entreprise et elle montre que dans des conditions identiques à celle de l'accident le témoin voit la vraie couleur dans 80% des cas. Les avocats décident alors d'attaquer les taxis bleus. Ont-ils pris la bonne décision ?*

2. *L'individu A apprend après une série de tests médicaux de routine qu'il est atteint d'une maladie incurable. Affolé, il envisage de commettre l'irréparable et retrace l'information dont il dispose : cette maladie n'affecte qu'une personne sur 100 000, et les tests qu'il a subis sont fiables au sens où ils ne sont jamais négatifs si la personne a la maladie mais ils peuvent être positifs si la personne n'a pas la maladie (2 fois pour 50 000). Quel conseil lui donneriez-vous ?*

3. *C'est l'été, Mr Smith se demande s'il doit prendre son parapluie ou pas. Si la probabilité qu'il pleuve est inférieure à 40%, Mr Smith ne prend pas son parapluie, sinon il préfère s'en munir. L'été il fait soleil 8 jours sur 10. Cependant aujourd'hui la chaîne météo prévoit qu'il va pleuvoir. Mr Smith sait que les prévisions de cette chaîne sont justes 95 fois sur 100. Il prend donc son parapluie et s'apprête à sortir lorsque son fils Guillaume met la chaîne des dessins animés où justement un flash météo annonce qu'il va faire soleil. Interloqué Mr Smith s'interroge. Il sait que les prévisions de la chaîne des dessins animés sont moins bonnes : elles sont fausses 10 fois sur 100. What do you think Mr Smith should do ?*

---

[3]Les trois exemples présentés ici sont très classiques : voir Daniel Kahneman, Paul Slovic et Amos Tversky, ed., *Judgement Under Uncertainty : Heuristics and Biases*, Cambridge : Cambridge University Press, 1982, voir aussi Steven Salop "Evaluating Uncertain Evidence With Sir Thomas Bayes : A Note For Teachers", *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 1, Number 1, Summer 1987, pp 155-160 (à propos de cet article voir aussi la correspondance de Peter D. Junger dans le *Journal of Economic Perspectives* Vol. 2, Number 2, Spring 1988, pp. 176-177) et enfin Charles Holt et Lisa Anderson "Classroom Games : Understanding Bayes' Rule", *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 10, Number 2, Spring 1996, pp. 179-187.

[4]Dans cette ville les taxis sont soit bleus soit verts. Tous les taxis bleus (resp. verts) appartiennent à la compagnie des taxis bleus (resp. verts).

Correction

La règle de Bayes permet de calculer une probabilité conditionnelle. Soit X et Y deux événements non indépendants. On cherche (par exemple) la probabilité que Y soit vrai si X est vrai : c'est-à-dire $\text{Proba}[Y|X]$. Or, on sait que d'une part

$$\text{Proba}[Y \cap X] = \text{Proba}[X]\,\text{Proba}[Y|X]$$

et que d'autre part

$$\text{Proba}[Y \cap X] = \text{Proba}[Y]\,\text{Proba}[X|Y]$$

d'où en combinant ces deux égalités (et dans le cas où $\text{Proba}[X] \neq 0$) :

$$\text{Proba}[Y|X] = \frac{\text{Proba}[Y]\,\text{Proba}[X|Y]}{\text{Proba}[X]}$$

qui est la règle de Bayes proprement dite. Évidemment, cette règle est utile si les probabilités à droite du signe égal sont plus faciles à calculer que $\text{Proba}[Y \cap X]$. En général la probabilité $\text{Proba}[X]$ est calculée en utilisant la décomposition suivante :

$$\text{Proba}[Y|X] = \frac{\text{Proba}[Y]\,\text{Proba}[X|Y]}{\text{Proba}[X \cap Y] + \text{Proba}[X \cap \mathcal{C}_Y]} = \frac{\text{Proba}[X \cap Y]}{\text{Proba}[X \cap Y] + \text{Proba}[X \cap \mathcal{C}_Y]}$$

où $\mathcal{C}_Y$ est le complémentaire de Y.

1. En supposant que les événements soient : Y = «un taxi pris au hasard est bleu» et X = «le témoin voit bleu». La probabilité que le témoin voie bleu un taxi et que ce taxi soit bleu ($\text{Proba}[Y \cap X]$) est : $\frac{15}{100}\frac{80}{100}$. La probabilité que le témoin voie bleu un taxi et que ce taxi soit vert ($\text{Proba}[\mathcal{C}_Y \cap X]$) est : $\frac{85}{100}\frac{20}{100}$. Au total le témoin voit bleu un taxi avec la probabilité : $\frac{15}{100}\frac{80}{100} + \frac{85}{100}\frac{20}{100}$. La probabilité qu'un taxi perçu comme bleu soit véritablement bleu est donc :

$$\frac{\frac{15}{100}\frac{80}{100}}{\frac{15}{100}\frac{80}{100} + \frac{85}{100}\frac{20}{100}} = \frac{12}{12+17} = \frac{12}{29} \approx 0,41$$

   Soit moins d'une chance sur deux. La table 8.1 montre comment les deux informations se combinent dans le cas où 100 taxis circulaient. Malgré la relativement bonne perception de la couleur par le témoin, le fait que ce soir là beaucoup de taxis étaient verts, induit le témoin à percevoir 17 fois un taxi vert comme étant bleu tandis qu'il identifie un taxi bleu comme étant bleu que 12 fois. Finalement, il est difficile de dire que le témoignage permet de mettre en cause la compagnie des taxis bleus.

2. Comme les tests étaient des tests de routine, l'individu A n'a pas de raison de penser qu'il avait *a priori* plus d'une chance sur 100 000 d'avoir cette maladie. La probabilité que les tests soient positifs à tort est $\frac{2}{50\ 000}\frac{99\ 999}{100\ 000}$ en effet, avec la probabilité $\frac{99\ 999}{100\ 000}$ A n'est pas malade et les tests le trouvent malade dans ce cas avec une probabilité $\frac{2}{50\ 000}$. D'où la probabilité que A soit malade étant donnée toute l'information dont il dispose :

$$\frac{\frac{1}{100\ 000} \times 1}{\frac{1}{100\ 000} \times 1 + \frac{2}{50\ 000}\frac{99\ 999}{100\ 000}} \approx 0,2$$

		Couleur perçue		
		Bleu	Vert	Total
Vraie couleur	Bleu	12	3	15
	Vert	17	68	85
	Total	29	71	100

TAB. 8.1 – Vraie couleur et couleur perçue

Conclusion, la probabilité qu'il soit vraiment atteint par cette terrible maladie "n'est que " d'une chance sur cinq, il faut donc conseiller à A de faire plus d'analyses pour savoir la vérité.

3. Mr Smith tient rapidement le raisonnement suivant : soit Y l'événement «soleil», et soit X l'événement «la chaîne météo annonce de la pluie et la chaîne des dessins animés annonce du soleil». Je dois calculer la probabilité de Y sachant X se dit Mr Smith, utilisons la règle de Bayes ! *A priori* la probabilité de Y est $\frac{8}{10}$, la probabilité de X sachant Y est égale à $\frac{5}{100}\frac{90}{100}$ (il faut que la chaîne météo se trompe et que l'autre chaîne donne une bonne prédiction[5]), finalement, la probabilité de X est égale à $\frac{8}{10}\frac{5}{100}\frac{90}{100}+\frac{2}{10}\frac{95}{100}\frac{10}{100}$ en effet avec 8 chances sur 10 il va faire soleil et la chaîne météo se trompe tandis que la chaîne des dessins animés est correcte et avec 2 chances sur 10 il va pleuvoir et la chaîne météo est correcte tandis que l'autre se trompe. Finalement :

$$\text{Proba}\,[\text{Soleil}|\text{Pluie, Soleil}] = $$
$$\frac{\text{Proba}\,[\text{Soleil}]\,\text{Proba}\,[\text{Pluie, Soleil}|\text{Soleil}]}{\text{Proba}\,[\text{Soleil}]\,\text{Proba}\,[\text{Pluie, Soleil}|\text{Soleil}] + \text{Proba}\,[\text{Pluie}]\,\text{Proba}\,[\text{Pluie, Soleil}|\text{Soleil}]}$$
$$= \frac{\frac{8}{10}\frac{5}{100}\frac{90}{100}}{\frac{8}{10}\frac{5}{100}\frac{90}{100}+\frac{2}{10}\frac{95}{100}\frac{10}{100}} \approx 0,65$$

donc Mr Smith sort sans son parapluie, souriant tendrement en pensant à son fils Guillaume.

[5]Notons que lorsqu'il ne connaissait que la prédiction de la chaîne météo, la probabilité qu'il fasse soleil étant donnée que la pluie a été prévue était : $\frac{\frac{8}{10}\frac{5}{100}}{\frac{8}{10}\frac{5}{100}+\frac{2}{10}\frac{95}{100}} \approx 0,17$ et donc Mr Smith avait raison de prendre son parapluie.

8.2 Jeu des trois portes*

Objectif de l'exercice : Illustrer l'importance de la règle de Bayes dans une situation «réelle».

Dans un jeu télévisé[6], le candidat doit choisir une porte, sans l'ouvrir, parmi trois. Il sait juste que derrière l'une des portes se trouve une voiture tandis que derrière chacune des deux autres se cache une chèvre. Une fois ce choix effectué, une des deux portes non choisie s'ouvre et révèle une chèvre. Il reste deux portes non ouvertes. Le présentateur demande au candidat s'il désire choisir l'autre porte ou maintenir son choix.

1. *Que doit faire le candidat si la porte ouverte a été choisie au hasard parmi les deux portes non sélectionnées par le candidat ?*
2. *Que doit faire le candidat s'il sait que la porte ouverte l'a été parce qu'elle cachait une chèvre.*

Correction

1. Numérotons les portes de la manière suivante : la porte choisie par le candidat est la numéro 1, celle ouverte par la télévision est la porte 2, la dernière étant la 3. Au début la voiture peut être derrière n'importe quelle porte. Soit V_i l'événement «la voiture est derrière la porte i», il est clair que $\text{Proba}\,[V_1] = \text{Proba}\,[V_2] = \text{Proba}\,[V_3] = \frac{1}{3}$. Notons C l'événement «le présentateur dévoile une chèvre». La probabilité que C arrive est égale à $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. En effet, si le candidat a choisi la voiture (ce qui arrive avec une chance sur trois) le présentateur dévoile forcément une chèvre, en revanche si le candidat a sélectionné une chèvre (avec deux chances sur trois) le présentateur ne trouve une chèvre qu'avec une chance sur deux. Il est donc possible d'utiliser la règle de Bayes pour en déduire la probabilité de V_1 conditionnelle à C :
$$\text{Proba}\,[V_1|C] = \frac{\text{Proba}\,[C|V_1]\,\text{Proba}\,[V_1]}{\text{Proba}\,[C]} = \frac{1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$
Le candidat est donc indifférent entre changer de porte ou pas.
2. Lorsque le présentateur choisit systématiquement la porte ou une porte avec une chèvre derrière la probabilité de C est évidemment modifiée : elle passe de $\frac{2}{3}$ à 1. En effet, le présentateur est sûr de toujours pouvoir ouvrir une porte sur une chèvre. La probabilité conditionnelle devient donc :
$$\text{Proba}\,[V_1|C] = \frac{\text{Proba}\,[C|V_1]\,\text{Proba}\,[V_1]}{\text{Proba}\,[C]} = \frac{1\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}.$$

[6] Un tel jeu a réellement existé aux États-Unis : le «Monty Hall Game», voir l'article «Monty Hall's Three Doors : Construction and Deconstruction of a Choice Anomaly» de Daniel Friedman dans *the American Economic Review*, 88(4), September 1998, pages 933-46. Daniel Friedman présente une série d'expériences réalisées en laboratoire autour de ce jeu.

Le candidat a donc tout intérêt à modifier son choix puisque par complémentarité $\mathrm{Proba}\,[V_3|C] = \frac{2}{3}$.

8.3 Jeu de poker***

Objectif de l'exercice : Détermination d'un équilibre Bayésien parfait. Usage de la règle de Bayes et des stratégies comportementales[7].

Soient 2 joueurs, J1 et J2. La valeur d'une main de poker est assimilée à un nombre compris entre 0 (la plus faible) et 1 (la plus forte). Pour que la partie commence, chaque joueur doit miser 1. La nature sélectionne indépendamment et de manière aléatoire (loi uniforme sur $[0,1]$) la valeur x de la main du premier joueur et la valeur y de la main du second joueur. Chaque joueur apprend la valeur de sa main. Le premier joueur a deux stratégies possibles : dire "parole" (miser 0, notée P) ou "renchérir" (miser 1 à nouveau, notée R). Pour simplifier le jeu, il est supposé que si le joueur 1 a choisi "parole" le joueur 2 ne peut pas renchérir (les joueurs montrent leur jeux et le gagnant emporte le pot). En revanche, si le joueur 1 a renchéri, le joueur 2 a deux options soit se coucher (abandonner, notée A) ou renchérir (notée R) en misant lui aussi 1. Si le joueur 2 se couche, le joueur 1 gagne le pot. Si le joueur 2 renchérit, les joueurs montrent leur jeux et la main la plus élevée emporte le pot.

1. *Dessiner l'arbre du jeu.*
2. *Soit b_1 (resp. b_2) une stratégie comportementale[8] pour le joueur 1 (resp. 2), c'est-à-dire une fonction qui à tout x (resp. y) associe la probabilité $b_1(x)$ (resp. $b_2(y)$) avec laquelle le joueur 1 (resp. 2) renchérit (resp. renchérit) s'il a une main x (resp. y) :*

$$\begin{array}{rcl} b_1\ [0,1] & \rightarrow & [0,1] \\ x & \rightarrow & b_1(x) \end{array}$$

   (a) *Écrire $u_1(x,P,b_2)$ (resp. $u_1(x,R,b_2)$) l'espérance de gain du joueur 1 dont la main est x et qui joue P (resp R) étant donnée la stratégie b_2. Quelle valeur prend $b_1(x)$ en fonction de ces deux espérances de gains ?*

   (b) *Écrire $u_2(y,R,b_1)$ (resp. $u_2(y,A,b_1)$) l'espérance de gain du joueur 2 dont la main est y et qui joue R (resp A) étant donnée que J1 a joué R et que J1 suit la stratégie b_1. Quelle valeur prend $b_2(x)$ en fonction de ces espérances de gains ?*

3. *Montrer que $u_2(y,R,b_1)$ est une fonction croissante de y. En calculant $u_2(y,R,b_1)$ pour $y=0$ et $y=1$ en déduire la forme de la fonction b_2, notée b_2^* à l'équilibre.*
4. *À partir de la forme de b_2^*, déduire celle de b_1^* puis exprimer $u_2(y,R,b_1^*)$.*

[7]Cette modélisation du jeu de poker a été proposée par Von Neumann et Morgenstern eux-mêmes dans leur livre *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, 1944. Voir le chapitre IV, section 19 (pages 186 à 219 dans l'édition de 1990). Voir aussi le chapitre 12 du livre de Binmore *Fun and games.*

[8]*Behavioral strategy* en anglais. Dans un jeu à mémoire parfaite, les stratégies comportementales sont équivalentes aux stratégies mixtes. Dans un jeu tel que celui-ci l'usage des stratégies mixtes n'est pas très commode. En effet, une stratégie pure étant une fonction de $[0,1]$ dans $\{0,1\}$, une stratégie mixte est une combinaison de telles fonctions.

5. *Vous avez normalement assez d'éléments pour caractériser un équilibre ! Montrer qu'en particulier, il existe un équilibre où le joueur 2 applique une stratégie à seuil : si $y < \widetilde{y}$, alors il abandonne, alors que si $y > \widetilde{y}$ il renchérit. Dans ce cas, tracer les fonctions $u_1(x, P, b_2^*)$ et $u_1(x, R, b_2^*)$ pour x variant entre 0 et 1 ainsi que les espérances de gains du joueur 2 en fonction de y.*

Correction

1. Il est difficile de représenter l'arbre du jeu avec x et y variant entre 0 et 1. La figure 8.1 présente «l'essence» de l'arbre de ce jeu de poker, avec la convention : $\mathbb{I}_{x_0>y_0} = \begin{cases} 1 \text{ si } x_0 > y_0 \\ -1 \text{ si } x_0 < y_0 \end{cases}$, et $\mathbb{I}_{x_0<y_0} = -\mathbb{I}_{x_0>y_0}$. Dans le cas où x (resp. y) ne prend que deux valeurs x_0 (resp. y_0) ou bien x_1 (resp. y_1) on obtient l'arbre de la figure 8.1.

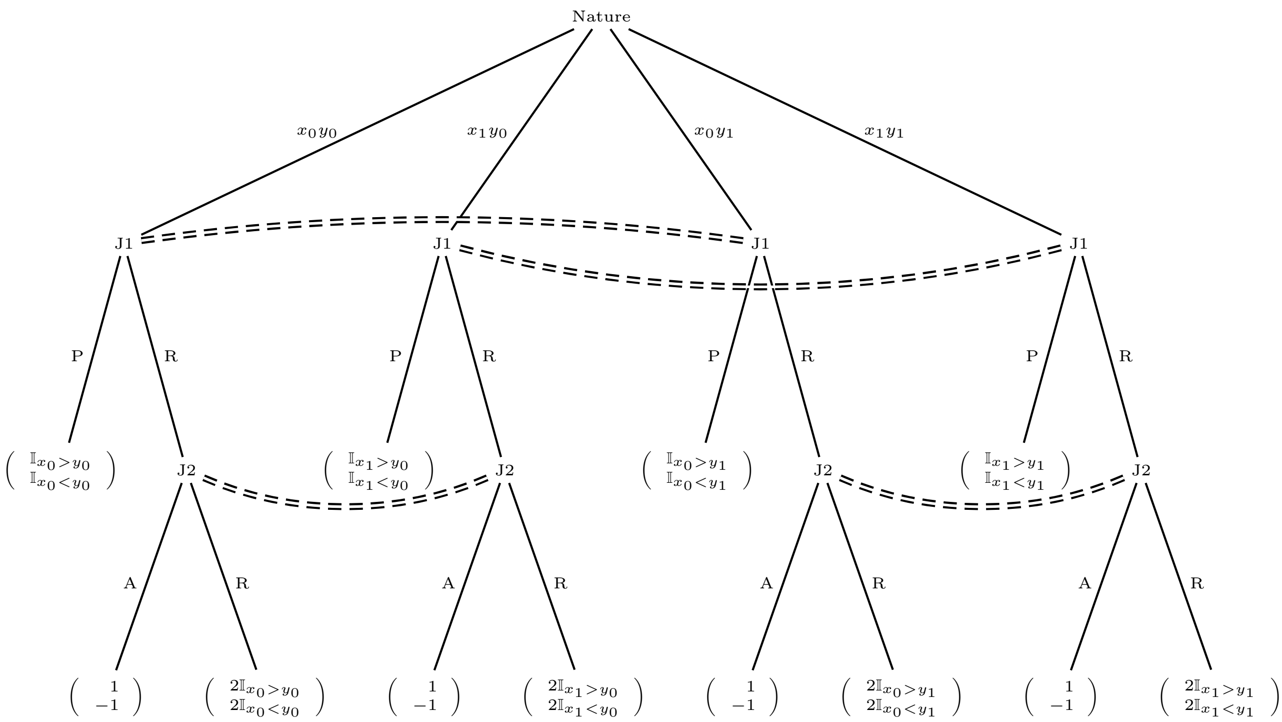


FIG. 8.1 – Jeu de Poker de Von Neumann et Morgenstern

2. (a) L'espérance de gain du joueur 1 dont la main est x et qui joue P ne dépend pas de la stratégie comportementale du joueur 2 mais seulement de la main y qui varie entre 0 et 1. Il vient :

$$u_1(x, P, b_2) = \int_0^x dy - \int_x^1 dy = 2x - 1$$

En revanche, s'il renchérit son gain dépend de la stratégie b_2 de la manière suivante :

$$u_1(x, R, b_2) = 2\int_0^x b_2(y)\,dy - 2\int_x^1 b_2(y)\,dy + \int_0^1 (1 - b_2(y))\,dy$$

En effet, avec la probabilité $b_2(y)$ le joueur 2 renchérit aussi et la main la plus forte emporte 2 (la plus faible perd 2), tandis qu'avec la probabilité $1 - b_2(y)$ le joueur 2 abandonne et le joueur 1 gagne 1. Un calcul élémentaire conduit à :

$$u_1(x, R, b_2) = 1 + \int_0^1 b_2(y)\,dy - 4\int_x^1 b_2(y)\,dy$$

La stratégie du joueur 1 est simple : si l'espérance de gain en jouant P est supérieure à celle en jouant R, alors il joue R avec une probabilité nulle et inversement. Enfin, si les deux actions donnent le même gain espéré, il peut jouer R avec n'importe quelle probabilité. Formellement :

$$b_1^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_1(x, R, b_2) < u_1(x, P, b_2) \\ [0,1] & \text{si } u_1(x, R, b_2) = u_1(x, P, b_2) \\ 1 & \text{si } u_1(x, R, b_2) > u_1(x, P, b_2) \end{cases}$$

(b) Si le joueur 2 abandonne il perd 1 avec certitude, donc $u_2(y, A, b_1) = -1$. En revanche, s'il renchérit il gagne en espérance :

$$2\int_0^y \frac{b_1(x)}{\int_0^1 b_1(x)\,dx}dx - 2\int_y^1 \frac{b_1(x)}{\int_0^1 b_1(x)\,dx}dx$$

En effet, il gagne 2 si $x < y$ et il perd 2 si $x > y$ et x est distribué entre 0 et 1 non plus uniformément mais selon la densité (révision bayésienne) $\frac{b_1(x)}{\int_0^1 b_1(x)dx}$ car le joueur 1 a joué R. Après simplification cela conduit à :

$$u_2(y, R, b_1) = 2 - \frac{4}{\int_0^1 b_1(x)\,dx}\int_y^1 b_1(x)\,dx$$

Le joueur 2 renchérit si cela lui assure une espérance de gain supérieure à 1. Formellement :

$$b_2^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_2(y, R, b_1) < -1 \\ [0,1] & \text{si } u_2(y, R, b_1) = -1 \\ 1 & \text{si } u_2(y, R, b_1) > -1 \end{cases}$$

3. La dérivée de $u_2(y, R, b_1)$ par rapport à y s'écrit :

$$\frac{\partial u_2(y, R, b_1)}{\partial y} = \frac{4}{\int_0^1 b_1(x)\,dx}b_1(y) \geq 0$$

il en résulte que la fonction $u_2(y, R, b_1)$ est croissante (au sens large) en y. De plus, il est facile de vérifier que :

$$u_2(0, R, b_1) = -2 < -1, \text{ et } u_2(1, R, b_1) = 2 > -1$$

Donc il existe $0 < y_0 < 1$ et $0 < y_1 < 1$, $y_0 \leq y_1$ tels que $u_2(y, R, b_1) < -1$ pour $0 \leq y < y_0$, $u_2(y, R, b_1) = -1$ pour $y_0 \leq y \leq y_1$, et $u_2(y, R, b_1) > -1$ pour $y_1 < y \leq 1$ d'où :

$$b_2^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq y < y_0 \\ [0,1] & \text{si } y_0 \leq y \leq y_1 \\ 1 & \text{si } y_1 < y \leq 1 \end{cases}$$

4. Nous avons vu que $\frac{\partial u_2(y,R,b_1)}{\partial y} = \frac{4}{\int_0^1 b_1(x)dx} b_1(y)$. Le fait que $u_2(y, R, b_1)$ est constant $(= -1)$ pour $y_0 \leq y \leq y_1$, implique $b_1^*(y) = 0$. Ensuite, pour tout $x < y_0$, il vient que $u_1(x, R, b_2^*)$ est constant puisque s'écrivant $1 - 3\int_{y_0}^1 b_2^*(y)\,dy$. Par définition de y_0 la dérivée de u_2 en y_0^- est strictement positive, donc $b_1(y_0^-)$ est strictement positif. Il en résulte que $1 - 3\int_{y_0}^1 b_2^*(y)\,dy > 2y_0^- - 1$, ce qui permet de conclure que pour tout $x < y_0$, $1 - 3\int_{y_0}^1 b_2^*(y)\,dy > 2x - 1$ et donc que $b_1^* = 1$ pour ces valeurs de x.
Pour $x > y_1$, il vient que $u_1(x, R, b_2^*)$ est égal à $1 - \int_0^1 b_2^*(y)\,dy - 4(1-x)$. Par définition de y_1, on a que u_2 est strictement croissant en y_1^+ et donc que $b_1^*(y_1^+) > 0$. Or, pour $x > y_1^+$, $u_1(x, R, b_2^*)$ est une fonction linéaire strictement croissante en x dont la pente est 4. Si en y_1^+ on a $u_1(y_1^+, R, b_2^*) > 2y_1^+ - 1$ c'est que cela est vrai pour tout $x > y_1$.
En résumé (la valeur de b_1^* aux points y_0 et y_1 est sans importance) :

$$b_1^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < y_0 \\ 0 & \text{si } y_0 \leq x \leq y_1 \\ 1 & \text{si } y_1 < x \leq 1 \end{cases}$$

Il est alors facile de calculer $u_2(y, R, b_1^*)$, il vient :

$$u_2(y, R, b_1^*) = \begin{cases} 2 - 4\frac{1-y_1+y_0-y}{1-y_1+y_0} & \text{si } 0 \leq y < y_0 \\ 2 - 4\frac{1-y_1}{1-y_1+y_0} & \text{si } y_0 \leq y \leq y_1 \\ 2 - 4\frac{1-y}{1-y_1+y_0} & \text{si } y_1 < y \leq 1 \end{cases}$$

5. Il suffit pour caractériser complètement l'équilibre de trouver les valeurs de y_0 et de y_1. En utilisant le fait que $u_2(y, R, b_1^*) = -1$ lorsque $y_0 \leq y \leq y_1$, il vient que
$$2 - 4\frac{1-y_1}{1-y_1+y_0} = -1 \text{ soit } 3y_0 + y_1 = 1$$
Pour déterminer les valeurs de y_0 et y_1 utilisons le fait que pour $x = y_0$ le joueur 1 a la même espérance de gain qu'il renchérisse ou qu'il passe. Soit

$$-2 - 3\int_{y_0}^{y_1} b_2^*(y)\,dy + 3y_1 = 2y_0 - 1$$

Utilisons aussi le fait que pour $x = y_1$ le joueur 1 a la même espérance de gain qu'il renchérisse ou qu'il passe. Soit

$$-2 + \int_{y_0}^{y_1} b_2^*(y)\,dy + 3y_1 = 2y_1 - 1$$

En combinant ces deux dernières équations, il vient :

$$3y_1 = y_0 + 2$$

Finalement, la résolution du système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} 3y_0 + y_1 = 1 \\ 3y_1 = y_0 + 2 \end{array}\right. \text{ conduit à } y_0 = \frac{1}{10} \text{ et } y_1 = \frac{7}{10}$$

De plus, b_2^* est contraint par la condition :

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{7}{10}} b_2^*(y)\, dy = \frac{3}{10}$$

Pour résumer, un équilibre (visiblement pas unique !) bayésien parfait de ce jeu de poker est de la forme

$$b_1^*(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } 0 \leq y < 1/10 \\ 0 & \text{si } 1/10 \leq y \leq 7/10 \\ 1 & \text{si } 7/10 < y \leq 1 \end{array}\right.$$

et

$$b_2^*(y) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } 0 \leq y < 1/10 \\ \beta(y) & \text{si } 1/10 \leq y \leq 7/10 \\ 1 & \text{si } 7/10 < y \leq 1 \end{array}\right.$$

avec β une fonction quelconque telle que $\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{7}{10}} \beta(y)\, dy = \frac{3}{10}$. En particulier, si le joueur 2 suit une stratégie à seuil $\widetilde{y}$, c'est-à-dire qu'il abandonne systématiquement si $y < \widetilde{y}$ et qu'il renchérit automatiquement si $y > \widetilde{y}$, alors il vient : $\int_{\widetilde{y}}^{\frac{7}{10}} \beta(y)\, dy = \frac{3}{10}$ d'où $\widetilde{y} = \frac{4}{10}$. Il vient alors : $b_2^*(y) = 0$ si $0 \leq y \leq \widetilde{y}$ et $b_2^*(y) = 1$ si $\widetilde{y} \leq y$.

La figure 8.2 montre l'espérance de gain du joueur 1 s'il renchérit (courbe en trait continu) ou s'il passe (courbe en pointillés). Lorsque la courbe continue est au-dessus de celle en pointillés, le joueur 1 renchérit avec une probabilité égale à 1, tandis que si la courbe en pointillés est au-dessus, il passe. La figure 8.3 présente les espérances de gain du joueur 2 conditionnelles au fait que le joueur 1 a renchéri. S'il abandonne, il gagne -1 (droite en pointillés). S'il renchérit, son gain se lit sur la courbe continue. Si $y < 1/10$, il a intérêt à abandonner car la courbe continue est en dessous de -1, pour y entre $1/10$ et $7/10$ les deux courbes sont confondues et le joueur 2 est indifférent. Enfin, pour y supérieur à $7/10$ la courbe continue dépasse -1 et il renchérit avec une probabilité égale à 1.

La stratégie du joueur 1 est particulièrement intéressante : il utilise le «bluff» : il renchérit lorsque sa main est faible $0 < x < 1/10$. Cela pour deux raisons : d'une part cela lui permet de limiter les pertes lorsque sa main est faible car lorsqu'il renchérit le joueur 2 abandonne parfois. D'autre part, cela lui permet de ne pas dévoiler ses bonnes mains lorsqu'il en a et qu'il renchérit. En effet, s'il renchérissait que si (par exemple) $x \geq \widetilde{x}$, le joueur 2 s'adapterait en abandonnant systématiquement si $y < \widetilde{x}$. Or lorsque le joueur 1 a une

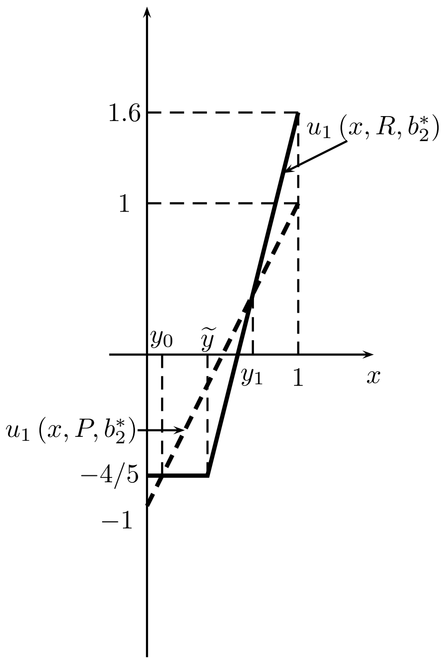


FIG. 8.2 – Espérances de gain de J1

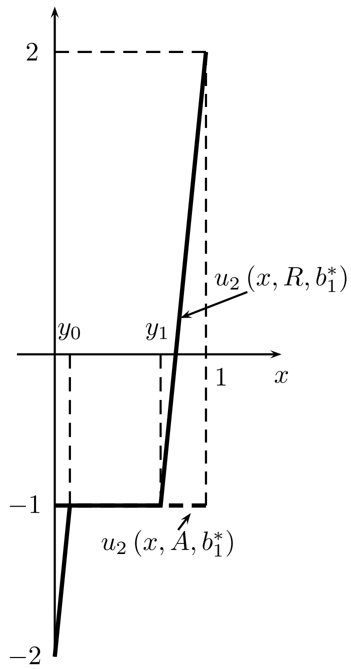


FIG. 8.3 – Espérances de gain de J2

bonne main, il souhaite que le joueur 2 renchérisse aussi afin de gagner 2 plutôt que 1.

Sur les figures, la situation du joueur 2 apparaît plus délicate que celle du joueur 1. Cela est dû en partie au fait que le joueur 1 a déjà renchéri ce qu'il fait plutôt avec une bonne main et donc le joueur 2 a un adversaire plus fort que la moyenne. Mais cela est aussi dû au fait que le joueur 2 joue en second. Globalement dans ce jeu, l'espérance de gain du joueur 1 s'élève à 1/10 et donc celle du joueur 2 à $-1/10$. Ce dernier devrait donc refuser de jouer, mais on peut imaginer que la position de premier joueur est tirée au sort afin de rendre le jeu symétrique et de ramener l'espérance de gain globale à 0. La figure 8.4 présente dans le plan x, y l'issue de ce jeu de poker lorsque le joueur 1 joue selon b_1^* et le joueur 2 selon b_2^*. Lorsque $x < 1/10$, le joueur 1 *bluffs*, cela est payant si $y < 1/10$ car dans ce cas J2 abandonne, si $1/10 < y < 7/10$ J2 renchérit avec la probabilité $\beta(y)$ et dans ce cas J1 est puni mais avec la probabilité complémentaire son *bluff* est récompensé. En particulier si J2 suit la stratégie à seuil : il abandonne si $y < \widetilde{y}$ et renchérit sinon. Enfin, si $y > 7/10$ le joueur 2 renchérit toujours et le *bluff* est puni. Pour $1/10 < x < 7/10$, J1 passe et les deux joueurs comparent leur main. Comme à la bataille, la plus forte gagne. Enfin, si $x > 7/10$, J1 renchérit toujours ce qui est payant si $y < 7/10$ tandis que si $y > 7/10$ l'issue de la bataille est incertaine mais son enjeu est double (gagner ou perdre 2).

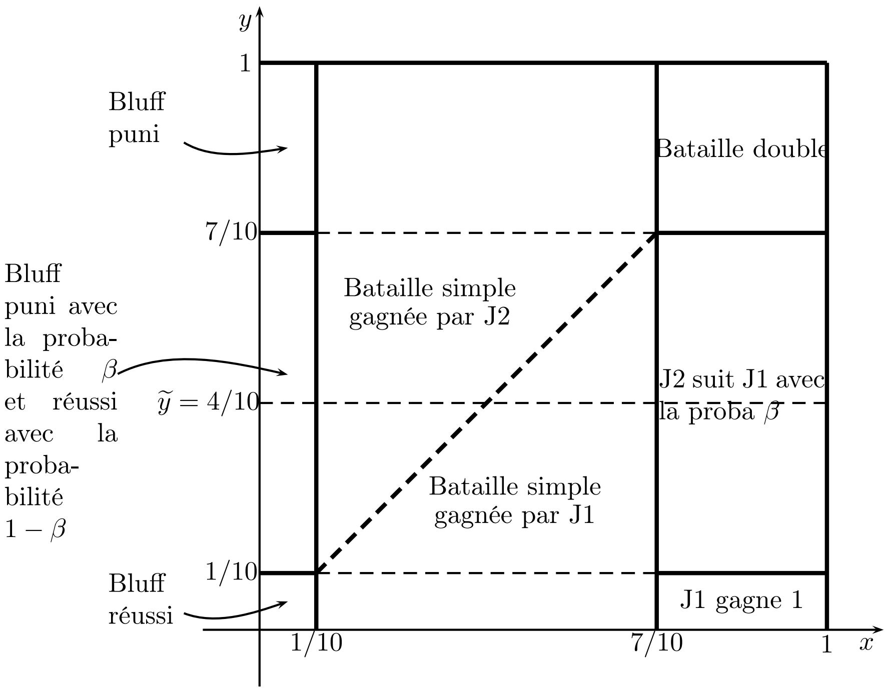


Fig. 8.4 – Gains selon x et y

8.4 Cournot avec incertitude sur un concurrent**

Objectif de l'exercice : Détermination d'un équilibre de Cournot-Nash dans un jeu Bayésien où l'un des deux concurrent ne connaît pas le coût marginal de production de son concurrent.

Soit un duopole à la Cournot avec une fonction inverse de demande $P(Q) = \max\{0\,;\,1-Q\}$*, où* $Q = q_1+q_2$ *est la somme des quantités. Le type de l'entreprise 1 est unique et son coût marginal de production est noté* c*,* $0 \leq c \leq 1/2$*. Le coût marginal de l'entreprise 2 est noté* θ*. On dit que* θ *est le type de l'entreprise 2. Il peut prendre n'importe quelle valeur sur l'intervalle* $\left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$*, ,* $0 \leq \underline{\theta} \leq \overline{\theta} \leq 1/2$*. La nature détermine le type* θ *à l'aide d'une loi de probabilité dont la densité est notée* f*. En particulier* $\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f(\theta)\,d\theta = 1$ *et on note* $E\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \theta f(\theta)\,d\theta$*.*

1. *Écrire le programme d'une entreprise de type* θ*. En déduire sa fonction de meilleure réponse (à* q_1 *fixé).*
2. *Écrire le programme de l'entreprise 1, montrer que l'espérance de son profit s'écrit comme le profit d'une entreprise qui ferait face à un concurrent dont la quantité produite serait égale à* $E_\theta(q_2(\theta)) = \overline{q_2}$*. En déduire sa fonction de meilleure réponse.*
3. *À l'aide des conditions du premier ordre, prendre l'espérance des meilleures réponses des types* θ*. En déduire* q_1^* *la quantité choisie par l'entreprise 1 à l'équilibre de Nash et montrer que* $q_2^*(\theta) = \frac{1}{3}\left(1+c-2\left(\frac{3}{4}\theta+\frac{1}{4}E\theta\right)\right)$*.*
4. *Comparer à l'aide d'un graphique les choix de l'entreprise 2 lorsque l'information est parfaite avec ceux effectué lorsque l'entreprise 1 ignore* θ*.*

Correction

1. Notons $q_2(\theta)$ la quantité choisie par l'entreprise 2 de type θ. Son profit s'écrit $(P(q_1+q_2(\theta))-\theta)\,q_2(\theta)$ soit :

$$(1-\theta-q_1-q_2(\theta))\,q_2(\theta)\,.$$

Comme il s'agit de l'équation d'une parabole concave, son maximum est réalisé au milieu des deux racines, d'où la fonction de meilleures réponses :

$$q_2^*(\theta, q_1) = \frac{1}{2}(1-\theta-q_1)\,.$$

2. Le profit de l'entreprise 1 qui ferait face (avec certitude) à un concurrent de type θ s'écrit : $\pi_1 = (P(q_1+q_2(\theta))-c)\,q_1$. Comme la firme 1 ignore le type de son concurrent, elle raisonne en espérance. L'espérance de son profit s'écrit :

$$E_\theta(\pi_1) = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f(\theta)\,(P(q_1+q_2(\theta))-c)\,q_1 d\theta.$$

Soit

$$E_\theta(\pi_1) = \left(1 - c - \left(\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f(\theta)\, q_2(\theta)\, d\theta\right) - q_1\right) q_1.$$

Posons $\overline{q_2} = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f(\theta)\, q_2(\theta)\, d\theta$, il vient :

$$E_\theta(\pi_1) = (1 - c - \overline{q_2} - q_1)\, q_1,$$

d'où

$$q_1^*(\overline{q_2}) = \frac{1}{2}(1 - c - \overline{q_2}).$$

3. Comme à l'équilibre $q_2(\theta) = q_2^*(\theta, q_1)$, il vient qu'à l'équilibre

$$\overline{q_2} = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f(\theta) \frac{1}{2}(1 - \theta - q_1)\, d\theta,$$

soit

$$\overline{q_2} = \frac{1}{2}(1 - E\theta - q_1).$$

La quantité d'équilibre choisie par l'entreprise 1 est donnée par l'équation :

$$q_1 = \frac{1}{2}(1 - c - \overline{q_2}) = \frac{1}{2}\left(1 - c - \frac{1}{2}(1 - E\theta - q_1)\right),$$

d'où

$$q_1^* = \frac{1}{3}(1 - 2c + E\theta).$$

Pour trouver $q_2^*(\theta)$ la quantité d'équilibre choisie par l'entreprise 2 de type θ, il suffit de remplacer q_1 par q_1^* dans la fonction de réaction de l'entreprise 2 de type θ :

$$q_2^*(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \theta - q_1^*) = \frac{1}{2}\left(1 - \theta - \frac{1}{3}(1 - 2c + E\theta)\right),$$

d'où

$$q_2^*(\theta) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\theta - \frac{1}{2} + c - \frac{1}{2}E\theta\right),$$

et finalement :

$$q_2^*(\theta) = \frac{1}{3}\left(1 - 2\left(\frac{3}{4}\theta + \frac{1}{4}E\theta\right) + c\right).$$

4. La figure 8.5 présente dans le plan $(\theta,\, q)$ la quantité choisie par la firme 2 en information parfaite $(\frac{1}{3}(1 + c - 2\theta))$ ainsi que la quantité choisie en information imparfaite $(\frac{1}{3}\left(1 - 2\left(\frac{3}{4}\theta + \frac{1}{4}E\theta\right) + c\right))$. Une entreprise 2 de type θ produit plus (resp. moins) en information parfaite lorsque θ est inférieur (resp. supérieur) à $E\theta$. Il en résulte qu'une entreprise plus performante qu'escompté est pénalisée par l'asymétrie d'information tandis, qu'au contraire, une entreprise moins performante en bénéficie.

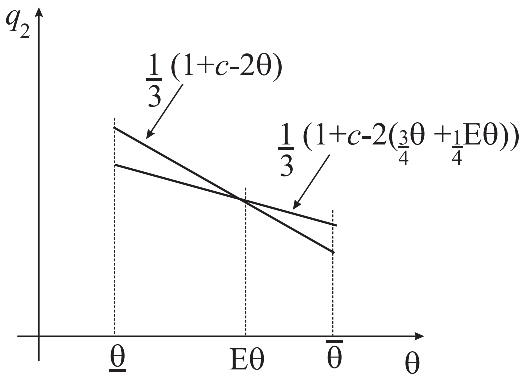


Fig. 8.5 – Quantités en information parfaite ou imparfaite

8.5 Choix de certification par un monopole*

Objectif de l'exercice : Étudier l'usage de la certification de la qualité d'un bien par son producteur lorsque les consommateurs ne peuvent pas observer cette qualité avant l'achat.

Soit le vendeur d'un bien de qualité v, $v \in [a,b]$. Le vendeur connaît v qui est tiré par la nature selon une loi uniforme sur $[a,b]$. Le vendeur n'a pas de coût de production. Les consommateurs sont caractérisés par leur propension à payer pour le bien notée θ. Le paramètre θ est uniformément distribué sur $[0,1]$. La fonction d'utilité d'un consommateur qui achète un bien de qualité v est $\theta v - p$ où p est le prix payé. S'il n'achète pas le bien son utilité est 0. Soit k le coût de certification. Certifier consiste à révéler de manière crédible la valeur de v.

1. *Calculer la fonction de demande en information parfaite pour un bien de qualité v vendu au prix p.*
2. *Calculer le profit en information parfaite d'un vendeur de qualité v.*
3. *Trouver l'équilibre de Nash du jeu bayesien avec certification en supposant que si le type v certifie, alors tout type $v' > v$ certifie aussi et que si v ne certifie pas alors tout type $v' < v$ ne certifie pas non plus.*

Correction

1. En information parfaite sur v un consommateur achète si et seulement si
$$\theta v - p \geq 0 \Leftrightarrow \theta \geq \frac{p}{v},$$
d'où la demande totale (égale à la somme des consommateurs qui achètent) :
$$\int_{\frac{p}{v}}^{1} d\theta = 1 - \frac{p}{v}.$$
2. En information parfaite, le vendeur dont le bien est de qualité v choisit p de telle sorte à maximiser son profit de monopole qui s'écrit :
$$p\left(1 - \frac{p}{v}\right),$$
d'où
$$p^m(v) = \frac{v}{2} \text{ et } \pi^m(v) = \frac{v}{4}.$$
3. Supposons qu'il existe $\widetilde{v} \in [a,b]$ tel que si $v < \widetilde{v}$ alors il ne certifie pas et tel que si $v > \widetilde{v}$ alors il certifie. Si les consommateurs n'observent pas de certification, ils en déduisent que la qualité espérée est :
$$\frac{1}{\widetilde{v} - a}\int_a^{\widetilde{v}} v dv = \frac{1}{\widetilde{v} - a}\left(\frac{\widetilde{v}^2 - a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(a + \widetilde{v}).$$

Il en résulte que le profit du vendeur qui ne certifie pas est (quel que soit son type) égal à :

$$\frac{1}{4}\frac{1}{2}\left(a+\widetilde{v}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\widetilde{v}\right),$$

tandis que le profit du vendeur de type v qui a certifié est :

$$\frac{1}{4}v-k.$$

Comme le type $\widetilde{v}$ est indifférent entre certifier et ne pas certifier, il vient que :

$$\frac{1}{8}\left(a+\widetilde{v}\right)=\frac{1}{4}\widetilde{v}-k,$$

d'où

$$\widetilde{v}=a+8k.$$

Si $k=0$, le vendeur certifie quel que soit son type.
Si $0<k<\frac{1}{8}\left(b-a\right)$, alors le vendeur ne certifie pas si son type est compris entre a et $a+8k$, tandis que le vendeur certifie si son type est supérieur à ce seuil.
Enfin, si $\frac{1}{8}\left(b-a\right)<k$, alors le vendeur ne certifie pas quel que soit son type.

8.6 Enchère au premier prix avec valeurs privées***

Objectif de l'exercice : Détermination d'un équilibre Bayésien dans un jeu d'enchère, d'abord dans un cadre simple puis dans un cadre plus général.

Soient n enchérisseurs dont la valuation pour le bien vendu aux enchères est tirée aléatoirement entre 0 et 1 selon une loi uniforme. Les acheteurs sont neutres vis-à-vis du risque. L'enchère est au premier prix, c'est-à-dire que le gagnant de l'enchère paye le prix qu'il a annoncé. Le gagnant est celui qui annonce le prix le plus élevé.

Plus précisément, l'utilité d'un acheteur de type v qui gagne avec l'enchère b s'écrit $v - b$. L'utilité d'un enchérisseur qui ne gagne pas est égale à 0.

1. *Trouver l'équilibre bayesien symétrique pour $n = 2$. C'est-à-dire la fonction $b^*(v)$ qui pour chaque type v donne le montant qu'il enchérit. Représenter sur un même graphique la solution et la première bissectrice.*
2. *Déterminer la solution symétrique pour n quelconque.*
3. *Représenter cette dernière fonction sur le graphique et déterminer sa limite lorsque n tend vers l'infini.*
4. *Généraliser à une fonction de répartition quelconque.*
5. *Quel est l'équilibre lorsque les enchérisseurs ont tous la même fonction d'utilité $u = x^\alpha$ et lorsque v est tiré selon une loi quelconque ?*

Correction

1. Soit $n = 2$, supposons que l'un des deux enchérisseurs joue selon $b^*(v)$ avec $b^*(0) = 0$ et cherchons la meilleure réponse de l'autre à cette stratégie. Soit v_1 son type. Le joueur 1 (celui qui dévie) n'a jamais intérêt à dévier vers une enchère qui ne soit pas dans $b^*([0,1])$. Il est donc possible de noter sa déviation sous la forme $b^*(x)$ avec $x \in [0,1]$. En déviant vers $b^*(x)$, J1 a une espérance de gain (car il ne connaît pas le type de J2) égale à :

$$\left(\int_0^x dv\right)(v - b^*(x)).$$

En effet, $\int_0^x dv$ est la probabilité avec laquelle il emporte l'enchère. Cette espérance de gain s'écrit donc :

$$x(v - b^*(x)).$$

Sous l'hypothèse que cette espérance de gain soit concave, J1 la maximise en choisissant x tel que :

$$v - b^*(x) - x(b^*)'(x) = 0.$$

Comment aller plus loin ? Le problème c'est que b^* est inconnu puisque justement il s'agit de la fonction à déterminer. Il suffit de remarquer que par définition de l'équilibre de Nash un joueur J1 de type v n'a pas intérêt à dévier donc que le x qui satisfait la condition du premier ordre n'est autre que v. Cette remarque est vraie pour tout v d'où :

$$\forall v \in [0,1], \quad v - b^*(v) - v(b^*)'(v) = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle qui caractérise la solution b^* en tenant compte de la condition au bord[9] $b^*(0) = 0$. D'où

$$b^*(v) = \frac{1}{2}v.$$

Remarque : la fonction $x(v - b^*(x))$ est donc bien concave en x.

2. Soient n agents qui participent à une enchère pour un bien. La valeur de ce bien n'est pas la même d'un individu à l'autre. Soit v_i la valuation pour le bien de l'agent i. L'enchère au premier prix se déroule de la manière suivante. Les n agents annoncent simultanément une enchère (b_i est l'enchère de l'individu i). Le gagnant est celui dont l'enchère est la plus élevée. Le prix payé par le gagnant est exactement le montant de son enchère. L'utilité du gagnant s'écrit donc $v_i - b_i$. L'utilité d'un perdant est 0. Pour n quelconque, une déviation vers $b^*(x)$ d'un joueur de type v face à $n-1$ enchérisseurs de type inconnu qui enchérissent selon b^* donne l'espérance de gain :

$$x^{n-1}(v - b^*(x)).$$

Cette espérance de gain est maximale pour x tel que :

$$(n-1)x^{n-2}(v - b^*(x)) - x^{n-1}(b^*)'(x) = 0.$$

Par définition de l'équilibre, cette équation doit être vérifiée pour $x = v$ d'où

$$(n-1)v^{n-1} = (n-1)v^{n-2}b^*(v) + v^{n-1}(b^*)'(v),$$

soit

$$\left(\frac{n-1}{n}v^n\right)' = \left(v^{n-1}b^*(v)\right)',$$

d'où

$$b^*(v) = \frac{n-1}{n}v.$$

Solution qui vérifie bien la condition au bord $b^*(0) = 0$.

3. La figure 8.6 présente dans le plan $(v, b(v))$ les fonctions d'enchères à l'équilibre de Nash. En particulier, si $n \to +\infty$, alors $b^* \to v$.

[9] La solution générale à l'équation différentielle $x - f(x) - xf'(x) = 0$ est $\frac{x}{2} + \frac{A}{x}$ où A est une constante d'intégration. La condition $f(0) = 0$ conduit à $A = 0$.

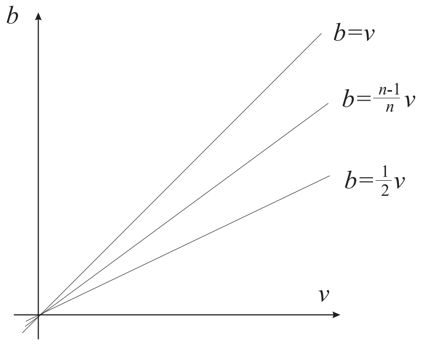


FIG. 8.6 – Fonctions d'enchères

4. Supposons que tous les v_i soient tirés indépendamment et aléatoirement avec la même loi de probabilité dont la fonction de répartition est notée F dans l'intervalle $[0, 1]$. L'espérance de l'utilité d'un agent qui enchérit b_i alors que les autres enchérissent b_{-i} s'écrit :

$$Prob\,(b_i = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_n\})\,(v_i - b_i) + 0.$$

La probabilité de gagner prenant en compte le fait qu'un v_j est distribué selon la fonction de répartition F. L'espérance du gain d'un agent qui enchérit $b\,(x)$ alors que son type est v s'écrit cette fois-ci :

$$(F\,(x))^{n-1}\,(v - b\,(x))\,.$$

La condition du premier ordre (évaluée en $x = v$) devient donc :

$$(n-1)\,f\,(v)\,(F\,(v))^{n-2}\,v = (n-1)\,f\,(v)\,(F\,(v))^{n-2}\,b\,(v) + b'\,(v)\,(F\,(v))^{n-1}$$

d'où l'intégration en

$$(F\,(v))^{n-1}\,v - \int_0^v (F\,(u))^{n-1}\,du = b\,(v)\,(F\,(v))^{n-1}\,,$$

qui conduit à

$$b\,(v) = v - \frac{\int_0^v (F\,(u))^{n-1}\,du}{(F\,(v))^{n-1}}.$$

Pour avancer davantage dans la caractérisation de la fonction b il faut spécifier la fonction de distribution F. L'interprétation de la formule est assez intuitive. Tout d'abord, un agent de type v enchérit strictement moins que v. Cela n'est pas surprenant[10] car s'il enchérissait v, il obtiendrait une espérance de gain égale à 0. Ensuite, elle montre un arbitrage intuitif entre d'une part obtenir un gain important (si l'on gagne) et d'autre part maximiser la probabilité de gagner. En effet, on ne peut augmenter la probabilité de gagner qu'au détriment du montant à gagner. De plus, il s'agit d'une fonction croissante[11] avec v, c'est-à-dire que le gagnant est celui qui possède la plus grande valuation. En ce sens, il s'agit d'une enchère efficace.

[10]Enchérir v est une stratégie dominante dans une enchère au second prix ou une enchère anglaise.

[11]Un calcul montre que $b'\,(v) = (n-1)\,f\,(v)\,\frac{\int_0^v (F(u))^{n-1} du}{(F(v))^n}$.

5. Soit $G(x)$ l'espérance de gain d'un joueur qui enchérit $b(x)$ alors que son type est v et que les autres enchérissent selon b. Comme dans la question précédente il vient que :

$$G(x) = (F(x))^{n-1} (v - b(x))^{\alpha}.$$

Introduisons la fonction $H(x) = (G(x))^{\frac{1}{\alpha}}$. Puisqu'il s'agit d'une transformation strictement croissante, le maximum de H est aussi celui de G. Posons $p(x) = (F(x))^{\frac{n-1}{\alpha}}$ il en découle que

$$H(x) = p(x)(v - b(x)).$$

La condition du premier ordre $H'(v) = 0$ s'écrit comme dans la question précédente :

$$p'(v)v = p'(v)b(v) + p(v)b'(v),$$

d'où

$$b(v) = v - \frac{\int p}{p} = v - \frac{\int_0^v (F(x))^{\frac{n-1}{\alpha}} dx}{(F(v))^{\frac{n-1}{\alpha}}}.$$

Dans le cas d'une distribution uniforme cette expression se simplifie en :

$$b(v) = \frac{n-1}{n-(1-\alpha)} v.$$

Si la fonction d'utilité est strictement concave ($0 < \alpha < 1$), alors les enchérisseurs présentent une aversion vis-à-vis du risque qui les pousse à enchérir plus que s'ils étaient neutres vis-à-vis du risque ($\alpha = 1$). À la limite, si $\alpha = 0$ ils enchérissent v, c'est-à-dire que l'espérance de gain est nulle. L'inverse est vrai si la fonction d'utilité est strictement convexe ($1 < \alpha$) et à la limite l'enchère tend vers 0 lorsque α tend vers l'infini.

8.7 Coût du crime et dépenses de sécurité**

Objectif de l'exercice : Trouver les stratégies d'équilibre du gendarme et du voleur dans un cadre simplifié.

Soit un jeu de gendarme et de voleur. Le joueur 1 (le gendarme) peut surveiller (S) ou ne pas surveiller (PS). S'il surveille cela lui coûte c, s'il ne surveille pas cela ne lui coûte rien. Le joueur 2 (le voleur potentiel) peut être de deux types : avec une probabilité a priori ρ *il est voleur* ($\theta = v$) *et avec la probabilité complémentaire il est honnête* ($\theta = h$)*. Le type honnête ne vole jamais et qu'il soit surveillé ou pas son utilité est normalisée à 0. En revanche, le type voleur a deux stratégies possibles commettre une infraction (I) ou pas (PI). Un voleur attrapé en train de commettre une infraction (car le joueur 1 surveille) doit payer une amende A. S'il commet une infraction mais n'est pas attrapé (car le joueur 1 ne surveille pas) il gagne V et le joueur 1 perd V. Enfin si le voleur ne commet pas d'infraction son utilité est à 0 qu'il soit surveillé ou pas.*

1. *Représentez ce jeu sous forme normale lorsque* $\theta = v$.
2. *Montrez que si* $\rho > \frac{c}{V+A}$*, alors à l'équilibre le joueur 1 et le joueur 2 de type* v *jouent en stratégie mixte.*
3. *Déterminez l'équilibre bayesien de ce jeu.*
4. *Comment varient les stratégies d'équilibre avec A et avec V ?*

Correction

1. Lorsque le joueur 2 est de type v la matrice du jeu est donnée par la table 8.2.

		J2	
		I	PI
	S	$(A-c, 0-A)$	$(-c, 0)$
J1	PS	$(-V, V)$	$(0, 0)$

Tab. 8.2 – Gendarme et voleur

2. Si $\rho = 1$, par exemple, il est clair que le jeu (qui est alors exactement celui de la table 8.2) n'a pas d'équilibre en stratégie pure. Soit maintenant un ρ quelconque. Si J1 surveille toujours et si J2 joue I, alors l'espérance d'utilité de J1 est :
$$u_1(S, I) = \rho A - c,$$
tandis que s'il ne surveille pas, son espérance d'utilité est :
$$u_1(PS, I) = -\rho V.$$
Donc si
$$-\rho V > \rho A - c,$$

soit encore si

$$\rho < \frac{c}{V+A},$$

J1 a intérêt à ne jamais surveiller et J2 commet l'infraction lorsqu'il est de type v. En revanche si $\rho > \frac{c}{V+A}$, J1 aurait intérêt à surveiller s'il était sûr que J2 joue I lorsqu'il est de type v. Néanmoins, si J1 jouait S avec certitude, J2 quelque soit son type jouerait PI et donc J1 aurait intérêt à dévier vers PS. Ce qui montre que l'équilibre est alors en stratégie mixte.

3. Notons α la probabilité avec laquelle J1 joue S et β celle avec laquelle J2 joue I s'il est de type v. J1 joue en stratégie mixte si étant donné β, l'espérance d'utilité en jouant S est égale à celle en jouant PS soit :

$$\rho\left(\beta\left(A-c\right)+\left(1-\beta\right)\left(-c\right)\right)+\left(1-\rho\right)\left(-c\right)= \\ \rho\left(\beta\left(-V\right)+\left(1-\beta\right)\left(0\right)\right)+\left(1-\rho\right)\left(0\right),$$

équation qui permet de trouver la valeur de β à l'équilibre :

$$\beta^* = \frac{c}{\rho\left(V+A\right)}.$$

Remarque : $\rho > \frac{c}{V+A}$ implique que $\beta^* < 1$.

De la même manière, J2 lorsqu'il est de type v joue en stratégie mixte à l'équilibre que si (condition nécessaire) il obtient la même espérance d'utilité avec I qu'avec PI, soit :

$$\alpha\left(-A\right)+\left(1-\alpha\right)V=0,$$

d'où

$$\alpha^* = \frac{V}{V+A}.$$

Remarque : il est clair que α^* est compris entre 0 et 1.

4. Tout d'abord, à partir de :

$$\alpha^* = \frac{1}{1+\frac{A}{V}},$$

il est clair que si A augmente, α^* diminue ce qui signifie que lorsqu'il est possible de mettre une amende plus importante, il est moins nécessaire de surveiller. À la limite, s'il était possible de mettre une amende infinie, il ne serait pas nécessaire de surveiller ($\alpha^* = 0$). Ce résultat est important, il montre que l'amende doit être maximale. Par exemple, s'il est impossible de faire payer plus de $\overline{A}$, il faut fixer $A = \overline{A}$.

En revanche une augmentation de V pousse α^* vers 1. À la limite, si $V = +\infty$, alors $\alpha^* = 1$.

La probabilité β^* avec laquelle J2 commet l'infraction lorsqu'il est de type v décroît avec c. À la limite, si $c = 0$, $\beta^* = 0$ car s'il était strictement positif, J1 pourrait jouer S avec une probabilité égale à 1 puisque le contrôle n'a aucun coût. Il est intéressant de remarquer que V et A jouent le même rôle aux yeux de J2 : une augmentation de l'amende diminue la probabilité de commettre l'infraction pour des raisons évidentes, tandis qu'une augmentation du butin réduit aussi cette probabilité puisqu'il est alors moins nécessaire de prendre de risques. Enfin, lorsque ρ diminue J2 a plus tendance à commettre l'infraction puisqu'à l'équilibre il fait face à moins de contrôle, tandis que l'inverse arrive lorsque ρ augmente.

8.8 Coordination sur le bon projet**

Objectif de l'exercice : Détermination d'un équilibre Bayésien parfait.

Soient deux états de la nature possibles : H ou L. Le joueur 1 observe un signal privé sur l'état de la nature, s. Avec une chance sur trois le signal lui indique que $s = H$ avec certitude. Avec une chance sur trois $s = L$ avec certitude. Et avec une chance sur trois le signal ne lui donne aucune information. Auquel cas, la probabilité que $s = H$ est notée ρ. Le joueur 1 observe son signal et en révèle (R) ou pas (PR) le contenu au joueur 2. Le joueur 2 observe le choix du joueur 1 et choisit le projet Y ou le projet Z. Les revenus engendrés par le projet Z sont indépendant de l'état de la nature : 90 pour J1 et 80 pour J2. En revanche les revenus du projet Y dépendent de l'état de la nature. Si $s = H$, alors J1 perçoit 80 et J2 90. Si $s = L$, alors J1 reçoit 50 et J2 60.

1. *Représentez l'arbre de ce jeu.*
2. *Déterminez les équilibres bayesiens parfaits de ce jeu en fonction de la valeur de ρ.*

Correction

1. L'arbre du jeu est décrit à l'aide de la figure 8.7.

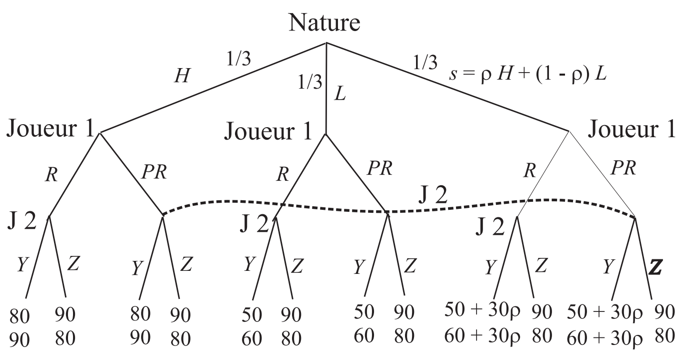


FIG. 8.7 – Cacher ou révéler ?

2. Tout d'abord il existe un équilibre où J1 révèle toujours l'information à J2 : $s_1^*(H) = s_1^*(L) = s_1^*(s) = R$, dans ce cas, $s_2^*(R = H) = Y$, $s_2^*(R = L) = Z$ et $s_2^*(R = s) = Y$ si $\rho > 2/3$ et $s_2^*(R = s) = Z$ si $\rho < 2/3$. De plus, il faut spécifier la stratégie de J2 s'il observe PR : $s_2^*(PR) = Y$. Il est immédiat que J2 n'a pas intérêt à dévier et il est facile de vérifier que J1 n'a pas rien à gagner à dévier non plus.

   Existe-t-il un équilibre de la forme : $s_1^*(L) = R$, et $s_1^*(H) = PR$? Si J1 joue selon ces stratégies, la meilleure réponse de J2 est : $s_2^*(R = L) = Z$. Pour calculer $s_2^*(PR)$, il faut déterminer la probabilité que l'état de la nature soit

H si PR est observé. Cette probabilité est donnée par :

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{\rho}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1+\rho}{2}.$$

L'espérance de l'utilité de J2 en jouant Y après PR est donc donnée par :

$$(1+\rho)\,45+(1-\rho)\,30=75+15\rho,$$

tandis que l'espérance de l'utilité de J2 jouant Z après PR est :

$$80.$$

Il en résulte que si

$$75+15\rho>80 \qquad \text{c. a. d. } \rho>\frac{1}{3},$$

alors $s_2^*(PR)=Y$ tandis que si $\rho<\frac{1}{3}$, alors $s_2^*(PR)=Z$.
Cela constitue un équilibre que si le J1 n'a pas intérêt à dévier. Il est clair que si l'état de la nature est H, la déviation ne peut être strictement profitable. En revanche, il est facile de voir que si la nature a choisi s, alors J1 n'a pas intérêt à dévier si $\rho<\frac{1}{3}$ ou si $\rho>\frac{2}{3}$, mais qu'il aurait intérêt à dévier si ρ était intermédiaire.
Finalement, il existe un équilibre (encore plus intéressant du point de vue de J1) : $s_1^*(H)=s_1^*(L)=s_1^*(s)=PR$ et $s_2^*(PR)=Z$ tandis que $s_2^*(R)$ est égal à Y ou Z selon ce que révèle R. En effet, la probabilité que l'état de la nature soit H après avoir observé PR est dans ce cas :

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{\rho}{3}}{1}=\frac{1+\rho}{3},$$

tandis que celle de L est $\frac{2-\rho}{3}$, il en résulte que pour tout ρ, l'espérance de l'utilité de J2 est plus grande en jouant Z que Y.

8.9 Jeu d'accaparation**

Objectif de l'exercice : Détermination d'un équilibre Bayésien.

Soit le jeu d'accaparation à deux joueurs (J1 et J2) suivant. Chaque joueur peut être de deux types : $\Theta_1 = \Theta_2 = \{H, L\}$ *et chaque joueur a le choix entre deux stratégies : A ou P. Un joueur de type H a une utilité égale à 2 s'il joue A quel que soit le choix et le type de l'autre joueur et une utilité égale à 1 s'il joue P. En revanche, un joueur de type L a une utilité de 2 s'il joue A et que l'autre joue P mais une utilité de 0 si les deux jouent A. Enfin, il a une utilité égale à 1 en jouant P quel que soit le choix de l'autre.*

1. *Représenter sous forme normale ce jeu dans les quatre situations possibles :* (L, L), (H, L), (L, H) *et* (H, H). *Trouver les équilibres de Nash de chacun de ces jeux (où l'information est parfaite).*
2. *Supposons pour commencer que* $\theta_1 = L$ *et que cela soit connaissance commune. De plus, il est aussi connaissance commune que J2 est de type H avec la probabilité* ρ *et de type L avec la probabilité* $1 - \rho$. *Déterminez les équilibres bayésiens de ce jeu.*
3. *Supposons maintenant, que chaque joueur connaisse son type mais ignore celui de l'autre joueur. Sachant seulement que son adversaire est de type H avec la probabilité* ρ. *Déterminez les équilibres bayésiens de ce jeu.*

Correction

1. Les quatre jeux d'information parfaite sont décrits dans la table 8.3. S'il est

		J2	
		A	P
	A	$(0,0)$	$(2,1)$
J1	P	$(1,2)$	$(1,1)$

L,L

		J2	
		A	P
	A	$(0,2)$	$(2,1)$
J1	P	$(1,2)$	$(1,1)$

L,H

		A	P
	A	$(2,0)$	$(2,1)$
J1	P	$(1,2)$	$(1,1)$

H,L

		A	P
	A	$(2,2)$	$(2,1)$
J1	P	$(1,2)$	$(1,1)$

H,H

Tab. 8.3 – Jeux d'accaparation

information parfaite que l'état est L, L alors il existe deux équilibres de Nash en stratégies pures : (A, P) et (P, A) plus un équilibre de Nash en stratégies mixtes : $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

S'il est information parfaite que l'état est L, H alors il existe un seul équilibre de Nash, il est en stratégies pures : (P, A).

S'il est information parfaite que l'état est H, L alors il existe un seul équilibre de Nash, il est en stratégies pures : (A, P).

S'il est information parfaite que l'état est H, H alors il existe un seul équilibre de Nash, il est en stratégies pures : (A, A).

2. Il est immédiat que $s_2^* (H) = A$. Il faut donc chercher s_1^* et $s_2^* (L)$. Il est intuitif de chercher si l'équilibre peut être de la forme :

$$s^* = (s_1^* = A, s_2^* (H) = A, s_2^* (L) = P) ,$$

ou bien de la forme

$$s^* = (s_1^* = P, s_2^* (H) = A, s_2^* (L) = A) ,$$

puis de chercher un éventuel équilibre en stratégies mixtes.

Supposons que $s_1^* = A$, $s_2^* (H) = A$ et $s_2^* (L) = P$. Il est clair que J2 n'a pas intérêt à dévier et cela quel que soit son type. En revanche J1 pourrait vouloir dévier vers P afin d'éviter l'affrontement avec le joueur 2 lorsqu'il est de type H. En jouant A J1 a une espérance d'utilité égale à :

$$\rho 0 + (1 - \rho) \, 2,$$

qu'il doit comparer avec son espérance d'utilité s'il joue P qui elle est égale à 1. D'où il vient que J1 préfère A à P si et seulement si˜ :

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Supposons maintenant que $s_1^* = P$, $s_2^* (H) = A$ et $s_2^* (L) = A$. Il est clair qu'il s'agit d'un équilibre de Nash quel que soit ρ.

Enfin, pour trouver un éventuel équilibre de Nash en stratégie mixte, supposons que J1 joue A avec la probabilité α et P avec la probabilité $1 - \alpha$. Et que J2 lorsqu'il est de type L joue A avec la probabilité β et P avec la probabilité complémentaire. J2 ne joue effectivement en stratégie mixte que si α le rend indifférent entre jouer A ou P ce qui comme nous l'avons déjà vu conduit à $\alpha^* = \frac{1}{2}$. De la même manière β doit rendre J1 indifférent entre ces deux stratégies soit :

$$(1 - \beta) \, (1 - \rho) \, 2 = 1,$$

d'où (sous la condition que $\rho \leq \frac{1}{2}$), $\beta^* = \frac{1}{2} - \frac{\rho}{2(1-\rho)}$.

En résumé, si $\rho \leq \frac{1}{2}$, alors il existe trois équilibres de Nash à ce jeu bayesien : (A, A, P), (P, A, A) et $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) , A, \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2(1-\rho)}, \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2(1-\rho)} \right) \right)$. En revanche, lorsque $\rho > \frac{1}{2}$, il existe un unique équilibre de Nash : (P, A, A).

3. À nouveau, il est clair que $s_1^* (H) = A$ et que $s_2^* (H) = A$ quel que soit la valeur de ρ. Il s'agit donc de déterminer les stratégies d'équilibre des joueurs de type L. Écrivons un équilibre sous la forme $(s_1 (H) , s_1 (L) , s_2 (H) , s_2 (L))$. Nous avons trois candidats en stratégies pures.

Tout d'abord sous quelles conditions (A, A, A, P) est-il un équilibre de Nash ? Il ne faut pas que J1 s'il est de type L souhaite dévier. Nous avons déjà vu que cette condition s'écrivait $\rho \leq \frac{1}{2}$. De manière symétrique, (A, P, A, A) est aussi un équilibre de Nash dans ce cas. Ensuite, il est donc immédiat que (A, P, A, P) est un équilibre de Nash si $\rho \geq \frac{1}{2}$. Enfin, exactement comme à la question (2) (et en utilisant la symétrie), si $\rho \leq \frac{1}{2}$, il existe un équilibre de Nash en stratégies mixtes où J1 et J2 jouent A avec la probabilité $\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2(1-\rho)}$.

8.10 Apprendre la demande en Cournot**

Objectif de l'exercice : Déterminer la valeur de l'information dans un jeu de concurrence à la Cournot.

Soit un duopole à la Cournot avec $P(Q) = a - bQ$, $a = a_H$ avec la probabilité ρ et $a = a_L$ avec la probabilité $1-\rho$, avec $a_H > a_L$. Soit $\overline{a} = \rho a_H + (1-\rho) a_L$ la demande moyenne. Pour simplifier il sera supposé que les coûts marginaux sont constants et nuls : $c_1 = c_2 = 0$. La taille de la demande est choisie de manière aléatoire par la nature : $a = a_H = 60$ avec la probabilité $\rho = \frac{1}{2}$ et $a = a_L = 30$ avec la probabilité $1-\rho = \frac{1}{2}$. Soit $\overline{a} = \rho a_H + (1-\rho) a_L = 45$ la demande moyenne.

1. *Rappelez l'équilibre d'un jeu de concurrence à la Cournot lorsque la demande est $a-bQ$. On notera $\pi(a)$ le profit. En déduire les profits des deux entreprises lorsqu'elles ignorent la valeur de a.*
2. *Supposons que l'entreprise 1 connaisse a et que l'entreprise 2 ignore a. Déterminer l'équilibre bayesien de ce jeu. On notera π_{1H} le profit de l'entreprise 1 de type H, π_{1L} le profit de l'entreprise 1 de type L et π_{2I} le profit espéré de l'entreprise 2.*
3. *Déterminez l'espérance du profit d'une entreprise (dont on sait qu'elle sera) informée face à une entreprise (dont on sait qu'elle restera) ignorante et comparez le avec $\pi(\overline{a})$.*
4. *Comparer l'espérance du profit d'une entreprise (dont on sait qu'elle sera) informée face à une entreprise (dont on sait qu'elle sera) informée et comparez le avec $\pi(\overline{a})$.*
5. *Que se passe-t-il si les entreprises (ignorant a) peuvent acheter une étude de marché leur révélant la valeur de a ? Discuter selon les valeurs de f le coût d'achat de l'étude de marché.*

Correction

1. Chaque entreprise maximise l'espérance de son profit qui s'écrit :

$$\rho(a_H - bq_j - bq_i) q_i + (1-\rho)(a_L - bq_j - bq_i) q_i = (\overline{a} - bq_j - bq_i) q_i.$$

Il s'agit donc d'un jeu équivalent à celui où les deux entreprises feraient face avec certitude à une demande de niveau $\overline{a}$. Il en résulte que

$$\pi(\overline{a}) = \frac{1}{9b}\overline{a}^2.$$

2. Puisque l'entreprise 2 ignore a (mais sait que son concurrent le connaît) elle maximise l'espérance de son profit qui s'écrit :

$$\rho(a_H - bq_1(H) - bq_2) q_2 + (1-\rho)(a_L - bq_1(L) - bq_2) q_2 = (\overline{a} - b\overline{q_1} - bq_2) q_2,$$

où $\overline{q_1} = \rho q_1(H) + (1-\rho) q_1(L)$. L'entreprise 1 de type θ maximise son profit :

$$(a_\theta - bq_2 - bq_1(\theta))\, q_1(\theta).$$

L'équilibre de Nash s'obtient en résolvant le système :

$$\begin{cases} q_1(H) = \frac{1}{2b}(a_H - bq_2) \\ q_1(L) = \frac{1}{2b}(a_L - bq_2) \\ q_2 = \frac{1}{2b}(\overline{a} - b\overline{q_1}) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} q_1^*(H) = \frac{1}{3b}\frac{3a_H - \overline{a}}{2} \\ q_1^*(L) = \frac{1}{3b}\frac{3a_L - \overline{a}}{2} \\ q_2^* = \frac{1}{3b}\overline{a} \end{cases}$$

Pour calculer les profits, il faut déterminer le prix, $p(\theta)$ selon l'état de la nature :

$$\begin{cases} p^*(H) = \frac{3a_H - \overline{a}}{6} \\ p^*(L) = \frac{3a_L - \overline{a}}{6} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \pi_{1H} = \frac{1}{36b}(3a_H - \overline{a})^2 \\ \pi_{1L} = \frac{1}{36b}(3a_L - \overline{a})^2 \end{cases}$$

Le profit de l'entreprise 2 s'obtient en calculant :

$$\rho p^*(H)\, q_2^* + (1-\rho)\, p^*(L)\, q_2^*,$$

ce qui conduit à

$$\pi_{2I} = \pi(\overline{a}) = \frac{1}{9b}\overline{a}^2.$$

3. Ex ante, une entreprise qui sait qu'elle sera informée a une espérance de profit égale à :

$$\rho\frac{1}{36b}(3a_H - \overline{a})^2 + (1-\rho)\frac{1}{36b}(3a_L - \overline{a})^2.$$

En utilisant $\pi(a) = \frac{1}{9b}a^2$. Nous avons : $\pi_{1H} = \pi\left(\frac{3a_H - \overline{a}}{2}\right)$ et $\pi_{1L} = \pi\left(\frac{3a_L - \overline{a}}{2}\right)$. Observons ensuite que

$$\rho\pi_{1H} + (1-\rho)\pi_{1L} - \pi(\overline{a}) = \rho(\pi_{1H} - \pi(\overline{a})) + (1-\rho)(\pi_{1L} - \pi(\overline{a})),$$

ensuite en utilisant l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, il vient que

$$\pi_{1H} - \pi(\overline{a}) = \frac{1}{9b}\left(\frac{3a_H - \overline{a}}{2} + \overline{a}\right)\left(\frac{3a_H - \overline{a}}{2} - \overline{a}\right) = \frac{1}{9b}\frac{3}{4}(1-\rho)(3a_H + \overline{a})(a_H - a_L),$$

et

$$\pi_{1L} - \pi(\overline{a}) = \frac{1}{9b}\left(\frac{3a_L - \overline{a}}{2} + \overline{a}\right)\left(\frac{3a_L - \overline{a}}{2} - \overline{a}\right) = -\frac{1}{9b}\frac{3}{4}\rho(3a_L + \overline{a})(a_H - a_L),$$

d'où

$$\rho\pi_{1H} + (1-\rho)\pi_{1L} - \pi(\overline{a}) = \frac{\rho(1-\rho)}{12b}(a_H - a_L)(3a_H + \overline{a} - 3a_L - \overline{a}),$$

soit

$$\rho\pi_{1H} + (1-\rho)\pi_{1L} - \pi(\overline{a}) = \frac{\rho(1-\rho)}{4b}(a_H - a_L)^2.$$

4. Si les deux entreprises sont informées, elles réalisent un profit égal à $\pi(a_\theta)$. L'espérance de profit ex ante est donc :

$$\rho\pi(a_H) + (1-\rho)\pi(a_L),$$

or,

$$\rho\pi(a_H) + (1-\rho)\pi(a_L) - \pi(\overline{a}) = \rho(\pi(a_H) - \pi(\overline{a})) + (1-\rho)(\pi(a_L) - \pi(\overline{a}))$$

donc en utilisant la même astuce qu'en (3) et en remarquant que :

$$a_H^2 - \overline{a}^2 = (1-\rho)(a_H - a_L)(a_H + \overline{a}),$$

et que

$$a_L^2 - \overline{a}^2 = -\rho(a_H - a_L)(a_L + \overline{a}),$$

il vient que

$$\rho\pi(a_H) + (1-\rho)\pi(a_L) - \pi(\overline{a}) = \frac{\rho(1-\rho)}{9b}(a_H - a_L)^2.$$

5. Notons π_I le profit espéré ex ante d'une entreprise qui sait qu'elle sera informée et qu'elle fera face à un concurrent ignorant. Notons π_{II} le profit espéré ex ante d'une entreprise qui sait qu'elle sera informée et qu'elle fera face à un concurrent informé. Notons f le coût d'acquisition de l'information. Notons A la stratégie qui consiste à acheter l'information, et PA pour ne pas acheter. Les entreprises prennent leur décision d'acheter ou pas de manière simultanée. Elles font donc face au jeu décrit dans la table 8.4.

		J2	
		A	PA
J1	A	$(\pi_{II} - f, \pi_{II} - f)$	$(\pi_I - f, \pi(\overline{a}))$
	PA	$(\pi(\overline{a}), \pi_I - f)$	$(\pi(\overline{a}), \pi(\overline{a}))$

TAB. 8.4 – Achat d'information sur la demande

Trois cas de figures sont donc possibles selon les valeurs de f :
Si $f < \frac{\rho(1-\rho)}{9b}(a_H - a_L)^2$, alors les deux entreprises ont intérêt à acheter et l'équilibre de Nash est (A, A).

Si $\frac{\rho(1-\rho)}{9b}\left(a_H-a_L\right)^2 < f < \frac{\rho(1-\rho)}{4b}\left(a_H-a_L\right)^2$, alors il n'est pas rentable d'acheter l'information si l'autre achète aussi, en revanche il est rentable d'acheter si l'autre n'achète pas. D'où deux équilibres de Nash[12] : (A, PA) et (PA, A).

Finalement, si $\frac{\rho(1-\rho)}{4b}\left(a_H-a_L\right)^2 < f$, il n'est pas rentable d'acquérir l'information et donc l'équilibre de Nash est (PA, PA).

[12]Plus un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

8.11 Apprendre la demande et Bertrand**

Objectif de l'exercice : Déterminer la valeur de l'information dans un jeu de concurrence à la Bertrand avec produits différenciés.

Reprendre l'exercice 8.10 avec un jeu de concurrence en prix avec produits différenciés : $q_i = \frac{a}{1+\sigma} + \frac{1}{1-\sigma^2}(-p_i + \sigma p_j)$. *(Il sera utile de poser* $\beta = \frac{1-\sigma}{(2-\sigma)^2(1+\sigma)}$ *lors de la comparaison des profits.)*

Correction

1. Lorsque les deux entreprises ignorent la valeur de a elles raisonnent toutes les deux comme si la demande était au niveau $\overline{a}$ d'où l'équilibre de Nash :

$$p_i^*(\overline{a}) = \frac{1-\sigma}{2-\sigma}\overline{a},$$

et

$$\pi(\overline{a}) = \frac{1-\sigma}{(2-\sigma)^2(1+\sigma)}a^2 = \beta\overline{a}^2.$$

Supposons maintenant que l'entreprise 1 connaisse la demande mais que l'entreprise 2 l'ignore. L'équilibre de Nash de ce jeu bayesien est donné par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} p_1(H) = \frac{1}{2}((1+\sigma)a_H + \sigma p_2) \\ p_1(L) = \frac{1}{2}((1+\sigma)a_L + \sigma p_2) \\ p_2 = \frac{1}{2}((1+\sigma)\overline{a} + \sigma\overline{p_1}) \end{cases}$$

dont la résolution conduit à

$$\begin{cases} p_1^*(H) = \frac{1-\sigma}{2-\sigma}\frac{(2-\sigma)a_H + \sigma\overline{a}}{2} \\ p_1^*(L) = \frac{1-\sigma}{2-\sigma}\frac{(2-\sigma)a_L + \sigma\overline{a}}{2} \\ p_2^* = \frac{1-\sigma}{2-\sigma}\overline{a} \end{cases}$$

Une série de calculs élémentaires conduit ensuite à

$$\begin{cases} \pi_1^*(H) = \beta\left(\frac{(2-\sigma)a_H + \sigma\overline{a}}{2}\right)^2 \\ \pi_1^*(L) = \beta\left(\frac{(2-\sigma)a_L + \sigma\overline{a}}{2}\right)^2 \\ \pi_2^* = \beta\overline{a}^2 \end{cases}$$

Il faut ensuite comparer $\rho\pi_1^*(H) + (1-\rho)\pi_1^*(L)$ avec $\beta\overline{a}^2$. Comme β est en facteur de tous ces termes, il suffit de calculer :

$$\rho\left(\left(\frac{(2-\sigma)a_H+\sigma\overline{a}}{2}\right)^2-\overline{a}^2\right)+(1-\rho)\left(\left(\frac{(2-\sigma)a_L+\sigma\overline{a}}{2}\right)^2-\overline{a}^2\right).$$

or,

$$\left(\frac{(2-\sigma)a_H+\sigma\overline{a}}{2}\right)^2-\overline{a}^2=\frac{1}{4}\left((2-\sigma)a_H+\sigma\overline{a}+2\overline{a}\right)\left((2-\sigma)a_H+\sigma\overline{a}-2\overline{a}\right)$$

soit

$$\frac{1}{4}\left((2-\sigma)a_H+(2+\sigma)\overline{a}\right)(2-\sigma)(1-\rho)(a_H-a_L).$$

De la même manière, il vient que

$$\left(\frac{(2-\sigma)a_L+\sigma\overline{a}}{2}\right)^2-\overline{a}^2=-\frac{1}{4}\left((2-\sigma)a_L+(2+\sigma)\overline{a}\right)(2-\sigma)\rho(a_H-a_L).$$

D'où :

$$\rho\pi_1^*(H)+(1-\rho)\pi_1^*(L)=\frac{\rho(1-\rho)}{4}\frac{1-\sigma}{1+\sigma}(a_H-a_L)^2.$$

Si les deux entreprises sont informées, elles ont un profit égal à βa_θ^2. Il faut donc comparer : $\rho\beta a_H^2+(1-\rho)a_L^2$ avec $\beta\overline{a}^2$. Or,

$$\rho\beta a_H^2+(1-\rho)a_L^2-\beta\overline{a}^2=\beta\rho(1-\rho)(a_H-a_L)^2.$$

Finalement, soit f le coût d'acquisition de l'information. Comme :

$$\begin{aligned}\beta\rho(1-\rho)(a_H-a_L)^2 &= \frac{1-\sigma}{(2-\sigma)^2(1+\sigma)}\rho(1-\rho)(a_H-a_L)^2\\ &> \frac{\rho(1-\rho)}{4}\frac{1-\sigma}{1+\sigma}(a_H-a_L)^2\end{aligned}$$

Il vient que si $f<\beta\rho(1-\rho)(a_H-a_L)^2$, les deux concurrents achètent l'information. Équilibre A, A.
Tandis que si $\beta\rho(1-\rho)(a_H-a_L)^2<f$, alors personne n'achète l'information.
À la différence du cas où la concurrence est à la Cournot, il n'y a jamais ici d'équilibre où une seule firme achète de l'information. En fait, si une firme possède l'information elle réalise (ex ante) un meilleur profit face à un concurrent lui même informé que face à un concurrent ignorant.

Chapitre 9

Signal

De nombreux jeux à information imparfaite ont la forme suivante : le joueur 1 peut être de différents types, il apprend (de manière privée) son type. Une fois qu'il connaît son type, il choisit une action qui est observée par les autres joueurs qui prennent en réponse une décision. Ce cadre est connu sous le terme générique de jeu de signal : l'action choisie par le joueur 1 est interprétée comme un signal pour dévoiler (ou pas) son type. Les exercices de ce chapitre explorent ce thème. À strictement parler les exercices 9.4 (où les joueurs non informés jouent les premiers) et 9.8 (où il n'y a pas de problème d'information mais où le concept de sélection d'équilibre est proche de ceux utilisés pour les jeux de signaux) ne sont pas des jeux de signaux proprement dits mais leurs thèmes sont suffisamment proche pour qu'ils aient leur place dans ce chapitre. Même dans les jeux de signaux relativement simples (avec deux joueurs, et deux types pour le joueur 1) les équilibres peuvent être complexes à déterminer. Il est important de rechercher systématiquement des équilibres séparateurs (où le joueur 1 joue différemment selon son type et où donc il le signale parfaitement) et les équilibres non-séparateurs (où le joueur 1 joue la même action quel que soit son type). Mais il existe aussi des équilibres semi-séparateurs (par exemple s'il est fait usage de stratégies mixtes). Outre la difficulté à caractériser les équilibres, un autre problème surgit fréquemment : il existe souvent un nombre trop important d'équilibres et notamment des équilibres contraires à l'intuition. Pour résoudre cette question les théoriciens ont mis au point plusieurs méthodes pour sélectionner un équilibre. Celles qui sont les plus utilisées en pratique, sont présentées dans ce chapitre.

Les exercices de ce chapitre proposent d'explorer plusieurs jeux de signaux importants en économie industrielle. L'exercice 9.1 présente, dans un cadre simple, un raffinement usuel dans les jeux de signaux. L'exercice 9.2 évoque un article séminal de George Akerlof sur le marché des voitures d'occasion. Dans l'exercice 9.3 l'éducation sert de signal à la productivité. L'exercice 9.4 combine assurance et signal. Les exercices 9.5 et 9.6 détaillent le modèle de prix limite. Dans l'exercice 9.7 la qualité d'un produit est signalée par le prix et la publicité. L'exercice 9.8 présente une procédure originale de sélectionner un équilibre de Nash. L'exercice 9.9 s'intéresse au paradoxe de la chaîne de magasins qui cherche à lutter contre l'entrée de concurrents.

9.1 Cho et Kreps**

Objectif de l'exercice : Étudier un raffinement de l'équilibre Bayésien parfait qui s'appelle le critère de Cho et Kreps. L'idée est que dans certains jeux il existe des équilibres peu intuitifs qu'il est possible d'éliminer en faisant des hypothèses supplémentaires.

Le jeu de la figure 9.1 est issu d'un article de In-Koo Cho et de David Kreps[1]*. Le joueur 1 (J1) peut être de deux types (H ou L). Avec la probabilité ρ (resp.*

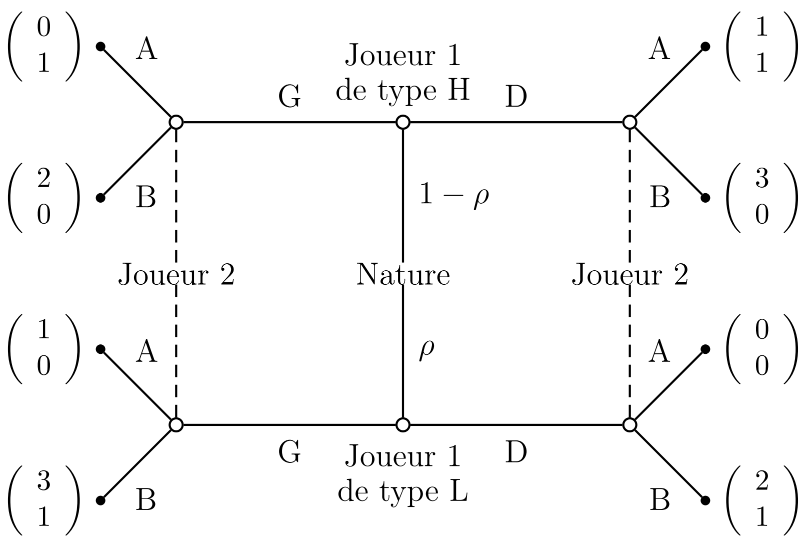


Fig. 9.1 – Jeu de Cho et Kreps

$1-\rho$), la nature décide que ce type est L (resp. H). J1 apprend son type mais J2 l'ignore. Une fois son type connu, J1 choisit entre deux actions : G ou D[2]*. Le joueur 2 (J2) observe l'action jouée par J1 et (connaissant la probabilité ρ) choisit à son tour entre deux actions A ou B.*

1. *Déterminer les équilibres bayésiens parfaits de ce jeu (distinguer deux cas selon que ρ est plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2}$).*
2. *Soit $\rho > \frac{1}{2}$. Le critère "intuitif" de sélection de Cho-Kreps marche de la ma-*

[1]In-Koo Cho and David M. Kreps "Signaling games and stable equilibria" *Quarterly Journal of Economics*, vol. 102, issue 2, May 1987.

[2]Dans l'article de Cho et Kreps, il s'agit de l'histoire suivante : J2 aimerait se bagarrer (A) avec J1 qui prend tranquillement son petit déjeuner dans un bar. Cependant si J1 est fort (type L ici), ce n'est pas une bonne idée. Tandis que la bagarre est une bonne option si J1 est faible (type H). Indépendamment de son type, J1 n'aime pas la bagarre. De plus, toute chose égale par ailleurs, un type L aime boire de la bière au petit déjeuner et un H préfère manger de la quiche pour son petit déjeuner. J2 observe si J1 boit de la bière ou mange de la quiche et décide d'engager une dispute ou pas. Toutefois, l'alternative boire de la bière ou manger de la quiche semble tellement peu intuitive (pourquoi se priver du plaisir de boire une bonne bière avec une bonne quiche au petit déjeuner ?) qu'il semble préférable de s'en tenir à des notations neutres (sans parler de l'idée saugrenue d'une dispute dans un bar).

nière suivante[3]*. Soit un équilibre. Soit une action non attendue à l'équilibre*[4]*. Soit S l'ensemble des types qui (quelle que soit la croyance après cette déviation) préfèrent strictement l'issue de l'équilibre à toutes les issues possibles après la déviation. Si J2 observe une telle action, il ne croit pas que cette action provienne d'un type dans S. Étant données ces croyances hors du chemin d'équilibre existe-t-il un type de J1 (forcément, J1 n'appartient pas à S) qui gagne à dévier ? Si oui, l'équilibre ne passe pas le test de Cho-Kreps. Déterminer les équilibres qui survivent à l'application de ce critère intuitif.*

Correction

1. Un équilibre bayésien parfait est décrit par des stratégies qui doivent être optimales (étant données les stratégies et les croyances des autres joueurs) et des croyances obtenues à l'aide de la règle de Bayes. Notons s_H (resp. s_L) la stratégie du premier joueur de type H (resp. L), $r(s)$ la stratégie du joueur en second et $\mu(s)$ la probabilité avec laquelle J2 pense que J1 est de type L après avoir observé l'action s.

   Remarque : quelle que soit la valeur de ρ, il n'existe pas d'équilibre séparateur (où H choisit une stratégie différente de L) comme il est facile de le vérifier. Par exemple, si H joue G et L joue D, alors J2 joue A après G et B après D et il est clair que H a intérêt à dévier.

   (a) Premier cas : $\rho \geq \frac{1}{2}$.

      i. Il existe, tout d'abord, une famille[5] d'équilibres où $s_H = s_L = G$, $r(G) = B$, $r(D) = A$, $\mu(G) = \rho$ et $\mu(D) = \nu \leq \frac{1}{2}$ (la valeur de ν est fixée de manière arbitraire puisque D n'appartient pas au chemin d'équilibre et qu'en conséquence ν ne peut pas être obtenu à l'aide de la règle de Bayes)[6].

      ii. Il existe, ensuite, une famille d'équilibres où $s_H = s_L = D$, $r(G) = A$, $r(D) = B$, $\mu(D) = \rho$ et $\mu(G) = \nu \leq \frac{1}{2}$.

   (b) Deuxième cas : $\rho \leq \frac{1}{2}$. Dans ce cas, il n'existe pas d'équilibre non séparateur (où les deux types choisissent la même stratégie). En effet, si les deux types jouent D (resp. G), J2 répond A (resp. A) auquel cas quelle que soit la réponse de J2 à G (resp. D), un type L (resp. H) augmente strictement son utilité en déviant vers G (resp. D). Comme il n'existe pas non plus d'équilibre séparateur, cela signifie qu'il faut chercher un/des équilibre(s) avec des stratégies mixtes. Voici alors (sans détailler les calculs) l'unique équilibre : $s_L = G$, $s_H = \left(\frac{\rho}{1-\rho}, \frac{1-2\rho}{1-\rho}\right)$ (c'est-à-dire qu'il joue G avec la probabilité $\frac{\rho}{1-\rho}$), $r(G) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $r(D) = A$.

---

[3] Pour une définition plus formelle et plus complète se référer à l'article original.

[4] Rappel : l'équilibre joué est connaissance commune.

[5] Au sens où ces équilibres ont le même chemin d'équilibre (les coups effectivement joués à l'équilibre) mais hors de ce chemin d'équilibre les stratégies diffèrent.

[6] Pour être complet, si $\nu = \frac{1}{2}$, il existe le même chemin équilibre avec J2 qui joue une stratégie mixte après D : J2 joue A (resp. B) avec la probabilité $\alpha \geq \frac{1}{2}$ (resp. $1 - \alpha$)

Enfin, $\mu(G) = \frac{1}{2}$ et $\mu(D) = 0$. À cet équilibre, H et indifférent entre jouer G ou D, il joue G suffisamment peu fréquemment pour que J2 pense (révision bayésienne) qu'il y a autant de chance que J1 soit H ou L après l'observation de G, auquel cas J2 est indifférent entre jouer A ou B. Le choix $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de J2 et celui qui rend justement un J1 de type H indifférent entre jouer G ou D.

2. Soit l'équilibre où : $s_L = s_H = D$. Soit la déviation G. En jouant D un type H gagne 3. En déviant vers G il gagne au plus 2. Il en résulte que $H \in S$. En revanche, s'il joue G un type L peut espérer gagner $3 > 2$, donc $L \notin S$. Supposons donc que cet équilibre soit attendu et que G soit observé. J2 ne peut pas croire que cette déviation provienne d'un H puisque $H \in S$. Dans ce cas, la meilleure réponse de J2 n'est pas A (comme planifié à l'équilibre) mais B. Or, si J2 joue B après G, un type L gagne à dévier vers G. Il en résulte que cet équilibre ne passe pas le test intuitif de Cho-Kreps.

   Vérifions que l'autre équilibre passe le critère intuitif. Soit l'équilibre où : $s_L = s_H = G$. Si D est joué, il est clair que $S = \{L\}$. Dans ce cas, la meilleure réponse de J2 à D est A. Mais alors, un type H n'a pas intérêt à dévier vers D.

9.2 George vend sa voiture*

Objectif de l'exercice : Illustrer le problème du signal de la qualité sur un marché tel que soulevé par George Akerlof[7].

George se demande s'il n'est pas temps de remplacer sa voiture. Il cherche donc à savoir à quel prix il pourrait la revendre sachant qu'il existe n vendeurs de voitures d'occasion. Chaque voiture peut être de deux types : soit une bonne voiture (type H avec la probabilité $1-\rho$) soit une mauvaise occasion (type L avec la probabilité ρ).Un vendeur connaît toujours la qualité de sa voiture. Un acheteur l'ignore. S'il garde sa voiture un vendeur de type H (resp. L) en retire une utilité mesurée en monnaie égale à v_H (resp. v_L). Il existe $m > n$ acheteurs de voitures d'occasion, tous de même type. Un acheteur valorise une bonne (resp. mauvaise) voiture à a_H (resp. a_L). Il est possible d'effectuer la normalisation $v_L = 0$. De plus, pour que des échanges soient possibles il faut supposer $0 < a_L$ et $v_H < a_H$. Pour simplifier il sera supposé que $a_L < v_H$.

Les stratégies sont les suivantes : un vendeur affiche une offre à prendre ou à laisser (s'il n'affiche aucune offre, cela signifie qu'il garde sa voiture). Un vendeur reçoit au plus une offre et décide de l'accepter ou de la refuser.

1. *Quelles sont les offres d'équilibre en information parfaite sur la qualité des voitures ?*
2. *Lorsque les acheteurs ignorent la qualité, existe-t-il un équilibre non séparateur où tous les vendeurs (et quel que soit leur type) affiche le même prix ?*
3. *Lorsque les acheteurs ignorent la qualité, existe-t-il un équilibre séparateur où les vendeurs de type H affichent un prix différent des vendeurs de type L ?*
4. *Qu'arrive-t-il si tous les vendeurs doivent afficher le même prix et si $\rho a_L + (1-\rho)\, a_H < v_H$? Généraliser ce point en présence d'un continuum de vendeurs. Chaque vendeur est caractérisé par la qualité v de sa voiture avec v uniformément distribuée sur $[0,1]$. L'utilité d'un vendeur est p s'il vend au prix p et v s'il garde sa voiture. L'utilité de l'acheteur est $av-p$ s'il achète une voiture de qualité v au prix p et 0 sinon.*

Correction

1. En information parfaite les vendeurs profitent du fait qu'il y a plus d'acheteurs que de voitures ($m > n$) pour fixer le prix le plus élevé possible. En particulier, un vendeur de type H (resp. L) affiche un prix égal à a_H (resp. a_L) et tous les acheteurs acceptent l'offre qu'ils reçoivent.

[7] Voir l'article séminal de George Akerlof "The Market for 'Lemons' : Quality Uncertainty and the Market Mechanism", *Quarterly Journal of Economics* ; 84(3), Aug. 1970, pages 488-500. George Akerlof a reçu le prix Nobel d'économie en 2001 (voir sur le web : `http://nobelprizes.com`).

2. Information imparfaite sur la qualité. Supposons qu'il existe un équilibre où tous les vendeurs affichent le même prix p. La stratégie d'un acheteur est acheter si le prix est inférieur à p, ne pas acheter sinon. L'achat d'une voiture procure à un acheteur un gain espéré de $\rho a_L + (1-\rho)\, a_H$. L'achat n'a lieu que si
$$p \leq \rho a_L + (1-\rho)\, a_H.$$
Un vendeur de type L a clairement intérêt à vendre à tout prix $p \geq 0 = v_L$. Un vendeur de type H a intérêt si et seulement si˜ :
$$p \geq v_H.$$
Pour qu'un équilibre non séparateur existe il faut donc que :
$$\rho a_L + (1-\rho)\, a_H \geq v_H.$$
Si cette condition est vérifiée, alors pour tout prix p, supérieur à v_H et inférieur à $\rho a_L + (1-\rho)\, a_H$ on a un équilibre non séparateur sur le modèle : tous les vendeurs affichent p, tous les acheteurs achètent, si un prix $p' > 0$ différent de p est proposé aucun acheteur n'achète.
3. Soit un candidat équilibre séparateur de la forme : un vendeur de type H affiche un prix $p_H \geq v_H$ et un vendeur de type L affiche un prix $p_H > p_L \geq 0$. Si les acheteurs acceptaient toute offre, il est clair que tout type L profiterait de l'asymétrie pour vendre au prix p_H. Supposons donc qu'un acheteur accepte une offre p_L avec une probabilité 1, tandis qu'il n'accepte une offre p_H qu'avec une probabilité α. Pour cela, un acheteur doit être indifférent entre accepter et refuser une offre p_H. S'il refuse il obtient 0. S'il accepte il obtient $a_H - p_H$. Cela implique donc
$$p_H = a_H.$$
Il ne faut pas qu'un vendeur de type L trouve profitable d'afficher a_H plutôt que p_L. En affichant p_L, il vend à coup sûr et obtient donc p_L. En déviant vers a_H il obtient une espérance de gain αa_H. Il en résulte la condition nécessaire suivante :
$$\alpha \leq \frac{p_L}{a_H}.$$
Il existe donc des équilibres séparateurs de la forme : un vendeur de bonne qualité affiche un prix p_H, un vendeur de mauvaise qualité affiche un prix p_L compris strictement entre zéro et a_L, un acheteur achète si le prix est p_L, tandis que si le prix est $p_H = a_H$ il n'achète qu'avec une probabilité $\alpha \leq \frac{p_L}{a_H}$.
4. Si $\rho a_L + (1-\rho)\, a_H < v_H$, et si tous les vendeurs doivent afficher le même prix (hypothèse d'Akerlof), alors seuls les vendeurs de type L sont présents sur le marché et le prix d'équilibre se trouve entre 0 et a_L. Les bonnes voitures sont donc chassées du marché. En particulier, cette situation apparaît lorsque $\rho \to 1$.

   Cette idée a été introduite par Akerlof dans un cadre “continu”. Soit p un prix d'équilibre. Un vendeur tel que $v > p$ préfère ne pas vendre. Un vendeur tel que $v < p$ préfère vendre. L'espérance de l'utilité d'un acheteur est alors : $a\frac{p}{2} - p = \frac{p}{2}(a-2)$. Si $a < 2$ (dans l'article original $a = \frac{3}{2}$), le seul prix d'équilibre est zéro. À nouveau les bonnes qualités ne sont pas présentes. L'idée est simple (mais bonne !) si le prix d'une qualité moyenne est trop bas, les bonnes qualités sont retirées du marché, ce qui entraîne une baisse de la qualité moyenne et donc du prix à un niveau encore plus bas et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus que la qualité la plus basse sur le marché.

9.3 Éducation, productivité et salaire*

Objectif de l'exercice : Étudier le rôle de signal que peut jouer l'éducation à l'aide du modèle développé par Michael Spence[8].

Un individu peut être plus ou moins apte à occuper un emploi. Soit un métier particulier et une population d'individus souhaitant travailler dans ce secteur. La nature choisit (de manière indépendante) le type, noté t, de chaque travailleur. Avec la probabilité ρ (resp. $1-\rho$) un individu est relativement peu productif : $t=1$ (resp. plutôt productif : $t=2$). Ces individus peuvent être recrutés par des entreprises qui sont supposées être en plus grand nombre. Avant de postuler pour un emploi, chaque agent choisit un niveau d'éducation noté e, avec $e \in [0, \overline{e}]$. Un travailleur de type t, d'éducation e, payé un salaire w rapporte à son entreprise : $t.e-w$. De plus, il obtient une utilité égale à $w-\frac{e^2}{t}$. Une entreprise sans travailleur réalise un profit nul et un individu qui ne travaille pas a une utilité normalisée à 0.

1. *Information parfaite : quels sont les choix d'éducation et les salaires lorsque les entreprises peuvent observer t et e ?*
2. *Information imparfaite : les entreprises observent e mais pas t.*
   (a) *Équilibre séparateur : si un individu de type t choisit le niveau d'éducation e_t avec $e_1 \neq e_2$, quel sont les salaires ? Sous quelles conditions un couple $(\widehat{e_1}, \widehat{e_2})$ forme-t-il un équilibre ? Déterminer les équilibres séparateurs.*
   (b) *Parmi tous les équilibres séparateurs possibles, lequel domine les autres au sens de Pareto ?*
   (c) *Que donne l'application du critère intuitif de Cho-Kreps ?*

Correction

1. En information parfaite, comme les firmes sont plus nombreuses que les travailleurs, le salaire proposé à un type t de niveau e est : $w(t,e) = t.e$ (concurrence à la Bertrand). Anticipant cela, un travailleur maximise son utilité en choisissant e pour rendre $t.e - \frac{e^2}{t}$ le plus grand possible soit : $e^*(t) = \frac{t^2}{2}$.
2. Information imparfaite.
   (a) Soit $\mu(e)$ la probabilité d'être de type 1 qu'une firme assigne à un individu de niveau e. Si à l'équilibre $e_1 \neq e_2$, l'observation de e permet aux firmes d'en déduire parfaitement t. C'est-à-dire $\mu(e_1) = 1$ et $\mu(e_2) = 0$. Une firme propose donc à un individu possédant un niveau d'éducation e_1 le salaire $w_1 = e_1$ et à un agent qui a choisi e_2 un salaire $w_2 = 2e_2$. Si

[8] Michael Spence "Job Market Signaling", *Quarterly Journal of Economics* ; 87(3), Aug. 1973, pages 355-74. Michael Spence a reçu le prix Nobel d'économie en 2001 (voir sur le web : `http://nobelprizes.com`).

un agent choisit un niveau d'éducation $e \neq e_1$ et $e \neq e_2$, nous sommes hors du chemin d'équilibre et il est possible de fixer $\mu(e) = 1$. Un travailleur de type 1 ne souhaite pas dévier si d'une part e_1 maximise $e_1 - e_1^2$ et d'autre part si $e_1 - e_1^2 \geq 2e_2 - e_2^2$. Un travailleur de type 2 ne souhaite pas dévier si pour tout e', $2e_2 - \frac{e_2^2}{2} \geq e' - \frac{e'^2}{2}$.
Il en résulte qu'à un équilibre séparateur, le choix d'éducation d'un type 1 est

$$\widehat{e_1} = e_1^* = \frac{1}{2}.$$

Soient les conditions :

$$\frac{1}{4} \geq 2\widehat{e_2} - \widehat{e_2}^2 \Leftrightarrow \widehat{e_2} \notin \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

et

$$2\widehat{e_2} - \frac{\widehat{e_2}^2}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{e_2} \in \left[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\right].$$

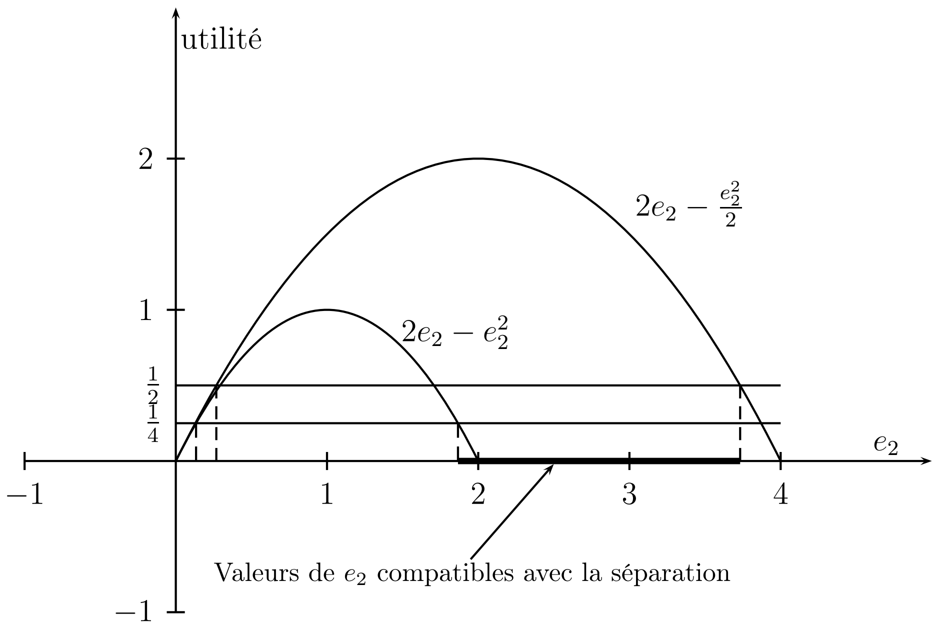


FIG. 9.2 – Conditions de séparation

La figure 9.2 illustre ces conditions. Un équilibre séparateur est donc un couple

$$\left(\widehat{e_1} = \frac{1}{2}, \widehat{e_2} \in \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 + \sqrt{3}\right]\right).$$

(b) Parmi tous les équilibres séparateurs décrits par $\widehat{e_2}$ dans l'intervalle $\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 + \sqrt{3}\right]$, l'équilibre $\left(\widehat{e_1} = \frac{1}{2}, \widehat{e_2} = 2\right)$ domine tous les autres au sens de Pareto. En effet, l'utilité des travailleurs de type 1 est identique quel que soit l'équilibre séparateur, tandis que l'utilité d'un travailleur de type 2 est maximale pour $e_2 = 2$ (par ailleurs les entreprises ont un profit nul quel que soit l'équilibre séparateur).

(c) Par construction, si $e > 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors l'utilité maximale que peut espérer obtenir un type 1 avec un tel e est strictement inférieure à celle qu'il obtient en jouant $\widehat{e_1} = \frac{1}{2}$. Il en résulte que si une firme observe un tel e (et bien qu'il s'agisse d'une déviation) elle doit croire que seul un type 2 a pu faire un tel choix et donc elle est prête à offrir un salaire $2e$. Il en résulte que seul l'équilibre $\left(\widehat{e_1} = \frac{1}{2}, \widehat{e_2} = 2\right)$ passe le critère de Cho-Kreps. Notons que cet équilibre s'obtient aussi en éliminant les stratégies dominées.

9.4 Marché de l'assurance**

Objectif de l'exercice : Présenter le travail fondateur de Rothschild et Stiglitz[9] sur le marché de l'assurance.

Soit un agent face à un risque d'accident. Il existe deux états de la nature possibles : pas d'accident (état 1) et accident (état 2). Soit W la richesse de l'agent en l'absence d'accident et soit $W-d$ sa richesse si l'accident a lieu. Un accident survient avec la probabilité π. Le vecteur (W_1, W_2) décrit la richesse d'un agent selon l'état de la nature. Soit (α_1, α_2) un contrat d'assurance tel que si l'agent accepte ce contrat sa richesse devienne : $(W-\alpha_1, W-d+\alpha_2)$. Le montant α_1 est la prime, tandis que $\alpha_1+\alpha_2$ est le dédommagement en cas d'accident. Il existe de nombreux agents dont la probabilité, π, d'avoir un accident peut varier. Les agents maximisent leur espérance d'utilité : $(1-\pi)\,u(W_1)+\pi u(W_2)$. Les entreprises qui sont neutres vis-à-vis du risque, proposent des contrats et cherchent à maximiser leur espérance de profit. Par exemple, le passage d'un contrat (α_1, α_2) avec un agent dont la probabilité d'accident est π conduit à un profit espéré égal à $(1-\pi)\,\alpha_1-\pi\alpha_2$. Les entreprises connaissent la distribution des probabilités dans la population mais ignore la probabilité avec laquelle un agent particulier risque d'avoir un accident. Il est supposé qu'une entreprise préfère avoir un profit nul mais des clients plutôt qu'un profit nul mais pas de clients.

1. *Déterminer l'équilibre de Nash de ce jeu lorsque tous les consommateurs ont la même probabilité π d'avoir un accident.*
2. *Soient deux types d'individus : ceux de type L dont la probabilité, π_L, d'accident est relativement faible, et ceux de type H dont la probabilité, $\pi_H > \pi_L$ est plutôt élevée. Un agent est de type L (resp. H) avec la probabilité λ (resp. $1-\lambda$). Chaque consommateur connaît son type mais les compagnies l'ignorent.*
   - *(a) Montrer qu'il n'existe pas d'équilibres non-séparateurs. C'est-à-dire d'équilibres où les compagnies d'assurance proposent un seul contrat.*
   - *(b) Montrer que le couple de contrat $\{(\pi_H d, (1-\pi_H)\,d), (\pi_L d, (1-\pi_L)\,d)\}$ n'est pas séparateur. Montrer qu'à un équilibre séparateur le contrat $(\pi_H d, (1-\pi_H)\,d)$ doit être proposé.*
   - *(c) Caractériser l'unique équilibre séparateur possible.*
3. *Un équilibre séparateur existe-t-il toujours ?*

Correction

1. S'il n'existe qu'un seul type d'agents, les compagnies d'assurance sont en information parfaite. Il faut bien voir que les offres de contrat sont simulta-

[9] Michael Rothschild et Joseph Stiglitz, "Equilibrium in Competitive Insurance Markets : An Essay on the Economics of Imperfect Information" *Quarterly Journal of Economics* ; 90(4), Nov. 1976, pages 630-49. Joseph Stiglitz a reçu le prix Nobel d'économie en 2001 (voir sur le web : `http://nobelprizes.com`)

nées puis les consommateurs choisissent. Il en résulte que si une firme fait une offre plus avantageuse du point de vue des consommateurs, elle sera choisie par tous. En conséquence, à l'équilibre les entreprises proposent des contrats dont l'espérance de profit est zéro. C'est-à-dire un contrat tel que $(1-\pi)\,\alpha_1 - \pi\alpha_2$. Parmi tous ces contrats, les entreprises proposent celui que préfèrent les consommateurs[10]. Soit un contrat $\left(\alpha, \frac{1-\pi}{\pi}\alpha\right)$ et soit f l'espérance d'utilité d'un agent qui choisit ce contrat :

$$f(\alpha) = (1-\pi)\,u(W-\alpha) + \pi u\left(W - d + \frac{1-\pi}{\pi}\alpha\right).$$

Il est facile de vérifier que la concavité de u implique celle de f ainsi que $f'(0) > 0$ et $f'(W) < 0$. La condition du premier ordre montre alors que :

$$\max_{\alpha} f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \pi d.$$

Dans ce cas, $W_1 = W_2 = W - \pi d$, c'est-à-dire que l'assurance est complète ce qui est "naturel" puisque les agents ont une aversion vis-à-vis du risque. Il est facile de vérifier que la situation où toutes les entreprises proposent ce contrat est bien un équilibre de Nash.

2. (a) Supposons que toutes les entreprises proposent un seul contrat (α_1, α_2), comme l'espérance du profit doit être nulle il en découle que :

$$\lambda\left((1-\pi_L)\,\alpha_1 - \pi_L\alpha_2\right) + (1-\lambda)\left((1-\pi_H)\,\alpha_1 - \pi_H\alpha_2\right) = 0,$$

en posant

$$\rho = \lambda\pi_L + (1-\lambda)\,\pi_H \text{ il vient } \alpha_2 = \frac{1-\rho}{\rho}\alpha_1.$$

S'il existe un équilibre non séparateur, il doit donc être de la forme $\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}\right)$.

Soit la fonction $f(\alpha_1, \alpha_2, q)$ décrivant l'utilité d'un consommateur de type q ($q = L, H$) lorsqu'il choisit un contrat (α_1, α_2). En particulier :

$$f\left(\alpha_1, \frac{1-\pi}{\pi}\alpha_1, q\right) = (1-\pi_q)\,u(W-\alpha_1) + \pi_q u\left(W - d + \frac{1-\pi}{\pi}\alpha_1\right),$$

est l'utilité d'un agent de type q pour un contrat dont l'espérance de profit est nulle si la probabilité (moyenne) d'accident est π. Comme la fonction $\frac{1-\pi}{\pi}$ décroît avec π, un agent (quel que soit son type) préfère (pour un même α_1) un contrat "destiné" (au sens dont l'espérance de profit est nulle pour ce risque) à un type moins risqué.

Montrons alors que si un contrat $\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}\right)$ est proposé, il existe un contrat d'espérance de profit strictement positive, préféré par un type

[10] D'où l'hypothèse : une entreprise préfère avoir un profit nul mais des clients plutôt qu'un profit nul mais pas de clients.

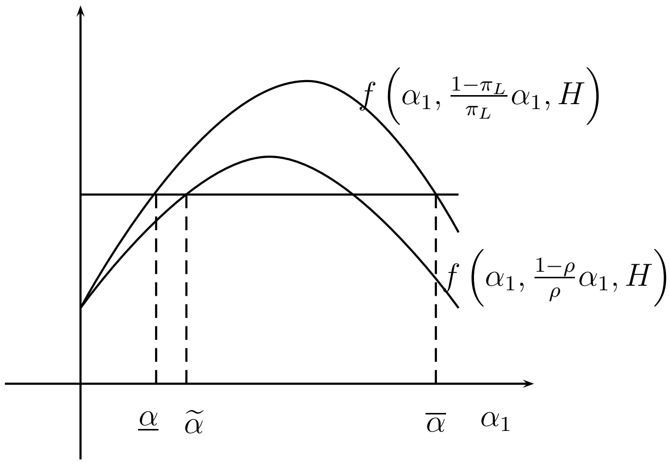


FIG. 9.3 – Détermination du α seuil

L à ce contrat non séparateur mais pas par un type H. En effet, soit $\underline{\alpha} < \widetilde{\alpha}$ tel que

$$f\left(\underline{\alpha}, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\underline{\alpha}, H\right) = f\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}, H\right).$$

Un tel $\underline{\alpha}$ existe car la fonction $f\left(\alpha_1, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\alpha_1, q\right)$ est concave en α_1 et $f\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\pi}{\pi}\widetilde{\alpha}, H\right) > f\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}, H\right)$. Cela est illustré sur la figure 9.3. C'est-à-dire qu'un agent de type H est indifférent entre un contrat destiné à un risque moyen $\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}\right)$ et un contrat destiné à un risque faible $\left(\underline{\alpha}, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\underline{\alpha}\right)$. En utilisant le fait que

$$f\left(\alpha, \frac{1-\pi}{\pi}\alpha, H\right) = f\left(\alpha, \frac{1-\pi}{\pi}\alpha, L\right) - (\pi_H - \pi_L) \left(u\left(W - d + \frac{1-\pi}{\pi}\alpha\right) - u\left(W - \alpha\right)\right)$$

il vient que

$$f\left(\underline{\alpha}, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\underline{\alpha}, L\right) = f\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}, L\right) + (\pi_H - \pi_L) \left[u\left(W - d + \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\alpha\right) - u\left(W - d + \frac{1-\rho}{\rho}\alpha\right) - u\left(W - \underline{\alpha}\right) + u\left(W - \widetilde{\alpha}\right)\right],$$

or, $f\left(\underline{\alpha}, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\underline{\alpha}, H\right) = f\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}, H\right)$ implique

$$u\left(W - d + \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\alpha\right) - u\left(W - d + \frac{1-\rho}{\rho}\alpha\right) - u\left(W - \underline{\alpha}\right) + u\left(W - \widetilde{\alpha}\right) = \frac{1}{\pi_H}\left[u\left(W - \widetilde{\alpha}\right) - u\left(W - \underline{\alpha}\right)\right]$$

d'où l'on déduit que

$$f\left(\underline{\alpha}, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\underline{\alpha}, L\right) > f\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}, L\right).$$

Il en résulte qu'un agent de type L préfère strictement le contrat $\left(\underline{\alpha}, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\underline{\alpha}\right)$ au contrat $\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}\right)$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel qu'un agent de type L préfère toujours strictement le contrat $\left(\underline{\alpha}+\varepsilon, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\underline{\alpha}\right)$ au contrat $\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}\right)$ tandis qu'un type H préfère $\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}\right)$. Or le contrat $\left(\underline{\alpha}+\varepsilon, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}\underline{\alpha}\right)$ (qui n'est accepté uniquement que par des types L) conduit à une espérance de profit strictement positive, c'est-à-dire qu'une compagnie d'assurance aurait intérêt à le proposer, ce qui détruit le candidat équilibre non-séparateur.
Toutefois, la démonstration précédente est un peu fastidieuse. Rothschild et Stiglitz donnent une preuve géométrique élégante qui est devenue classique. Sur la figure 9.4, la courbe $\widetilde{U}_L$ (resp. $\widetilde{U}_H$) est la courbe

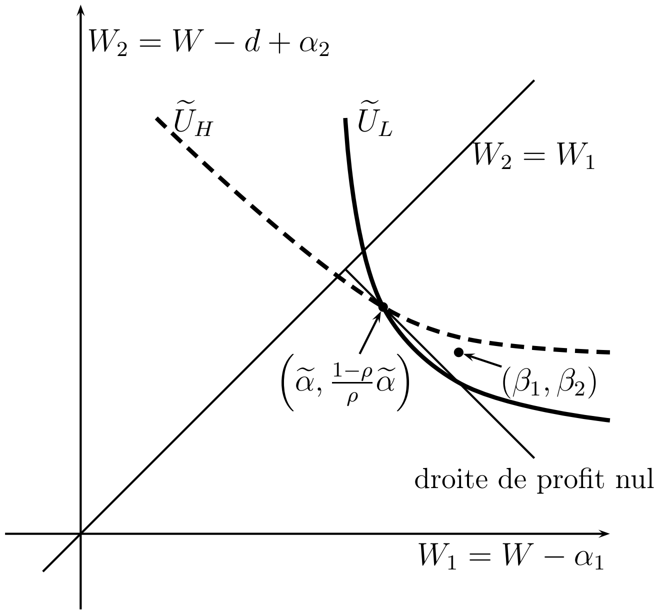


FIG. 9.4 – Pas d'équilibre non séparateur

d'indifférence d'un agent de type L (resp. H) le long de laquelle l'utilité est la même qu'avec le contrat $\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}\right)$. Un calcul élémentaire montre que $\pi_H > \pi_L$ implique que la pente de $\widetilde{U}_L$ est plus forte au point $\left(\widetilde{\alpha}, \frac{1-\rho}{\rho}\widetilde{\alpha}\right)$ que la pente de la courbe $\widetilde{U}_H$. Il est donc toujours possible de trouver un contrat (β_1, β_2) rejeté par un H (en dessous de $\widetilde{U}_H$) mais préféré par un L (au dessus de $\widetilde{U}_L$) et dont l'espérance de profit est positive (au dessus de la droite de profit nul).

(b) Le contrat $(\pi_H d, (1-\pi_H)\,d)$ est le meilleur contrat (sous contrainte que les compagnies fassent un profit nul) pour un type H lorsque l'informa-

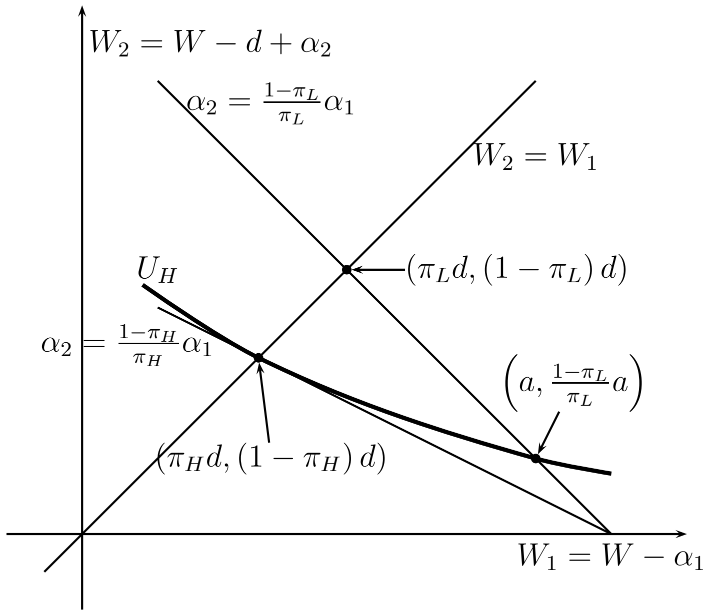


FIG. 9.5 – Équilibre séparateur

tion est parfaite. Si ce contrat n'était pas proposé à l'équilibre séparateur, une compagnie pourrait proposer un contrat du type $(\pi_H d - \varepsilon, (1-\pi_H)\, d)$ (avec $\varepsilon > 0$) qui serait préféré (par tous les H) au contrat destiné aux types H et il assure un profit strictement positif. Il en résulte que les agents les plus risqués sont totalement assurés à l'équilibre séparateur.

En revanche, les agents de type L ne peuvent pas être complètement assurés. En effet, si le contrat $(\pi_L d, (1-\pi_L)\, d)$ était proposé, il serait certes choisi par les L mais aussi par les H (assurance complète à un prix inférieur par rapport à $(\pi_H d, (1-\pi_H)\, d)$) ce qui entraînerait que les espérances de profits des firmes seraient négatives.

(c) À l'équilibre séparateur, il faut que le contrat $(\pi_H d, (1-\pi_H)\, d)$ soit proposé. L'autre contrat proposé (destiné aux types L) doit conduire à profit nul, il a donc la forme $\left(a, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}a\right)$ avec $a \in [0, d]$. La quantité a d'assurance achetée doit être telle qu'un type H ne choisisse pas ce contrat. D'autre part, a doit être le plus grand possible de telle sorte à maximiser l'utilité d'un type L. La valeur de a est donc donnée par l'équation :

$$f\left(\pi_H d, (1-\pi_H)\, d, H\right) = f\left(a, \frac{1-\pi_L}{\pi_L}a, H\right)$$

Le graphique 9.5 montre comment se construit un tel équilibre séparateur. L'équilibre séparateur s'il existe est unique. À cet équilibre les types les plus risqués (H) obtiennent une assurance complète (comme en information parfaite), tandis que les types moins risqués (L) doivent se contenter d'une assurance partielle ($a < d$).

3. L'équilibre séparateur caractérisé est bien un équilibre s'il n'existe pas lorsque les deux contrats séparateur sont proposés de contrat (β_1, β_2) accepté par un

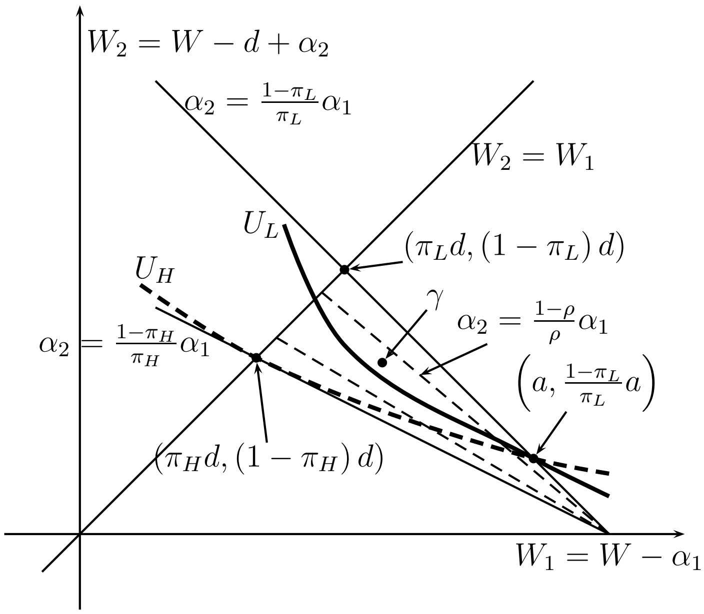


FIG. 9.6 – Existence d'un équilibre

type ou les deux et qui conduise à un profit strictement positif. Comme le montre un examen de la figure 9.6, une déviation vers un contrat en dessous de la courbe U_L n'attirerait que des H et entraînerait un profit négatif. En revanche, une déviation vers un contrat au dessus de la courbe U_L et au dessus de la courbe U_H attire tous les consommateurs. La question est donc : une telle déviation permet-elle de réaliser un profit strictement positif ? Tout dépend de la position de ce contrat par rapport à la droite $\alpha_2 = \frac{1-\rho}{\rho}\alpha_1$ le long de laquelle un contrat accepté par les H et les L donne une espérance de profit nulle. Si le contrat proposé est en dessous de cette droite, alors son espérance de profit est strictement positive. Si ρ est proche de π_L (c'est-à-dire si la proportion de type L est élevée), alors il existe un contrat γ qui attire tous les consommateurs et qui permet de réaliser un profit strictement positif. En revanche, si ρ est proche de π_H alors la droite $\alpha_2 = \frac{1-\rho}{\rho}\alpha_1$ est toujours en dessous de la courbe U_L et il n'existe pas de déviation vers un contrat profitable qui attire à la fois les L et les H.

9.5 Prix limite : équilibre séparateur***

Objectif de l'exercice : Un monopole en place peut-il décourager l'entrée d'un concurrent en pratiquant avant l'entrée un prix inférieur à son prix de monopole ? Cette question centrale en économie industrielle a suscité un large débat jusqu'à l'article fondateur de Milgrom et Roberts[11] qui a jeter une lumière nouvelle sur ce problème. L'étude de cet article est décomposé en deux exercice : celui-ci où l'accent est mis sur la recherche des équilibres séparateurs et le suivant (exercice 9.6) où l'on caractérise les équilibres non-séparateurs.

Soit le jeu bayésien décrit (partiellement) par l'arbre de la figure 9.7 est construit. La nature choisit le type d'un monopole en place parmi deux choix possibles : H et L. Un monopole de type H possède des coûts marginaux de production élevés,

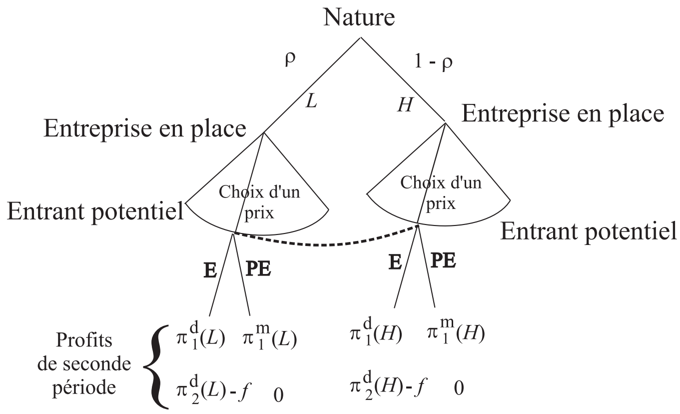


Fig. 9.7 – Jeu d'entrée avec efficacité de la firme en place incertaine

tandis qu'un monopole de type L dispose de coûts marginaux de production bas. Formellement, pour toute quantité q,

$$C'_L(q) < C'_H(q).$$

Quel que soit son type, le monopole en place fixe un prix pour la première période (où il est le seul vendeur), les consommateurs achètent une quantité définie par la fonction de demande $D(P)$ et le monopole réalise un profit (qui n'est pas indiqué dans la figure 9.7). Un entrant potentiel observe le prix pratiqué en première période mais ignore le type de l'entreprise en place. Sur la base de cette information (et des croyances a priori) il décide d'entrer ou pas. Soit $C_E(q)$ la fonction de coût de production de l'entrant. L'hypothèse centrale (sans laquelle le modèle deviendrait trivial) est que le profit de duopole de l'entrant permet de recouvrir les coûts fixes d'entrée si la firme en place est de type H mais pas si son type est L :

$$\pi_2^d(L) < f < \pi_2^d(H).$$

En information parfaite sur le type de l'entreprise en place, l'entrée a lieu s'il s'agit de H tandis que l'entrée est bloquée s'il s'agit de L.

[11] Paul Milgrom and John Roberts, "Limit Pricing and Entry under Incomplete Information : An Equilibrium Analysis", *Econometrica*, Vol. 50, No. 2. (Mar., 1982), pp. 443-460.

En information imparfaite, l'entrant potentiel utilise le prix de première période pour réviser de manière bayesienne la croyance a priori sur le type du monopole. Soit

$$\mu(P) = Prob\,[q = L|P]\,,$$

où P est le prix observé en première période. La décision d'entrer ou pas dépend de la valeur de μ. Le point de vue du monopole en place est simple, quel que soit son type, il préfère rester en monopole plutôt que de subir la présence d'un concurrent :

$$\text{pour } q = H \text{ ou } L,\ \ \pi_1^m(q) > \pi_1^d(q)\,.$$

De plus, il sera commode de noter : $G_q = \pi_1^m(q) - \pi_1^d(q)$ le gain pour le monopole de type q à dissuader l'entrée. Enfin, on notera δ le facteur avec lequel l'entreprise en place actualise le profit de seconde période[12].

1. *Déterminer μ^* tel que si $\mu > \mu^*$ l'entrée n'a pas lieu tandis que si $\mu < \mu^*$ elle est profitable en espérance.*
2. *À l'équilibre séparateur, par définition, l'entreprise en place joue différemment selon son type. Soit P_L (resp. P_H) la stratégie du monopole en place s'il est de type L (resp. H). Déterminer dans ce cas $\mu(P)$. En déduire la stratégie de l'entrant si l'équilibre est séparateur.*
3. *Écrire sous quelle condition un monopole en place de type L préfère jouer P_L plutôt que P_H ou un autre prix. En déduire l'ensemble S_L des prix qui s'ils permettent de dissuader l'entrée incitent le type L à les pratiquer.*
4. *Écrire sous quelle condition un monopole en place de type H préfère jouer P_H plutôt que P_L. En déduire Σ_H l'ensemble des prix que ne souhaite pas pratiquer l'entreprise en place de type H même s'ils permettent de dissuader l'entrée.*
5. *Représenter sur un graphique les ensembles S_L et Σ_H.*
6. *Caractériser les équilibres séparateurs. Montrer que si $P^m(L) \in \Sigma_H$, alors les prix d'information parfaite sont séparateurs.*
7. *Jusqu'à la fin, il sera supposé que $P^m(L) \notin \Sigma_H$ (c'est-à-dire que les prix d'information parfaite ne sont pas séparateurs).*
   Soit $\underline{P} < P^m(H)$ tel que
   $$\pi_1(\underline{P}, H) = \pi_1^m(H) - \delta G_H,$$
   montrer que si $\underline{P} \in S_L \cap \Sigma_H$, alors il existe des équilibres séparateurs, et qu'en revanche si $\underline{P} \notin S_L \cap \Sigma_H$, il n'existe pas d'équilibres séparateurs.
8. *Montrer que si le gain d'une entreprise en place de type L à dissuader l'entrée est plus important que le gain d'un type H : $G_L > G_H$, alors il existe au moins un équilibre séparateur.*
9. *Si l'intersection $\Sigma_H \cap S_L$ ne se réduit pas à un seul prix, il existe beaucoup d'équilibres séparateurs. Or, si tous ces équilibres séparateurs sont équivalents du point de vue du type H (qui joue toujours $P^m(H)$ à ces équilibres), ils*

[12] Si une entreprise réalise un profit π_1 en première période et π_2 en seconde, elle a un profit total égal à $\pi_1 + \delta\pi_2$.

ne sont pas équivalents du point de vue du type L. Déterminer l'équilibre séparateur préféré par L. En utilisant l'élimination des stratégies dominées montrer que cet équilibre est le plus plausible.

10. *Quelles sont les propriétés de l'équilibre séparateur après l'élimination des stratégies dominées ? Notamment en termes de bien-être social.*

Correction

1. Soit μ^* tel que :
$$\mu^* \pi_2^d (L) + (1 - \mu^*) \pi_2^d (H) = f,$$
clairement si $\mu > \mu^*$ l'espérance de profit liée à l'entrée est négative. En revanche, si $\mu < \mu^*$ l'espérance de profit est positive en cas d'entrée. Il est immédiat que
$$\mu^* = \frac{\pi_2^d (H) - f}{\pi_2^d (H) - \pi_2^d (L)}.$$

2. Comme $P_L \neq P_H$ il vient en utilisant la règle de Bayes que :
$$\mu (P_L) = 1 \text{ et } \mu (P_H) = 0,$$
tandis que si $P \neq P_L$ et $P \neq P_H$ alors $\mu (P)$ n'est pas défini par la règle de Bayes et peut prendre n'importe quelle valeur en 0 et 1.
La stratégie de l'entrant est donc (pour un équilibre séparateur) d'entrer si $P = P_H$, de ne pas entrer si $P = P_L$. Il faut aussi définir cette stratégie pour toute autre valeur de P [13], ici il sera supposé que si $P \neq P_L$, alors $\mu (P) = 0$ et que donc tout prix différent de P_L entraîne l'entrée.

3. Pour avoir un équilibre de Nash de ce jeu bayesien, il faut que le monopole en place ne souhaite pas dévier quel que soit son type. Si un type L dévie, il provoque l'entrée en seconde période il faut donc que pour tout $P \neq P_L$:
$$\pi_1 (P_L, L) + \delta \pi_1^m (L) \geq \pi_1 (P, L) + \delta \pi_1^d (L),$$
comme cela doit être vrai pour tout P c'est vrai en particulier pour P_L^m et donc :
$$\pi_1 (P_L, L) + \delta \pi_1^m (L) \geq \pi_1^m (L) + \delta \pi_1^d (L),$$
équation qu'il est commode d'écrire sous la forme :
$$\delta \left(\pi_1^m (L) - \pi_1^d (L) \right) \geq \pi_1^m (L) - \pi_1 (P_L, L), \qquad (9.1)$$
dont l'interprétation est que le gain (escompté) à dissuader l'entrée doit être supérieur à la perte de profit à court terme qu'entraîne la dissuasion.

[13]Comme les autres valeurs de P ne seront pas jouées à l'équilibre, cela peut sembler inutile. Toutefois, cela est en fait très important puisqu'il faut tester toutes les déviations possibles de l'entreprise en place. Donc pour chaque déviation il faut que l'entrant ait prévu une décision d'entrer ou pas. Cette décision repose sur des croyances dites hors équilibres.

Notons $G_L = \pi_1^m(L) - \pi_1^d(L)$, et définissons l'ensemble des prix S_L qui s'ils permettent de dissuader l'entrée incitent le type L à les pratiquer :

$$S_L = \{P \text{ tels que } \pi_1(P, L) \geq \pi_1^m(L) - \delta G_L\}.$$

4. S'il est de type H, le monopole en place n'a rien à perdre (puisque de toute façon P_H est suivi de l'entrée) à jouer son prix de monopole, donc $P_H = P_H^m$. En revanche il peut espérer dissuader l'entrée en imitant la stratégie du type L. À l'équilibre cette imitation ne doit pas être profitable donc :

$$\pi_1^m(H) + \delta\pi_1^d(H) \geq \pi_1(P_L, H) + \delta\pi_1^m(H),$$

soit encore :

$$\delta\left(\pi_1^m(H) - \pi_1^d(H)\right) \leq \pi_1^m(H) - \pi_1(P_L, H), \tag{9.2}$$

qui se lit de la manière suivante : le gain escompté à dissuader l'entrée (pour un monopole de type H) doit être inférieur à la perte (courante) qu'il faut endurer pour dissuader l'entrée. Soit $G_H = \pi_1^m(H) - \pi_1^d(H)$, définissons Σ_H l'ensemble des prix que ne souhaite pas pratiquer l'entreprise en place de type H même s'ils permettent de dissuader l'entrée :

$$\Sigma_H = \{P \text{ tels que } \pi_1(P, H) \leq \pi_1^m(H) - \delta G_H\}.$$

5. Les figures 9.8 et 9.9 montrent les ensembles S_L et Σ_H.

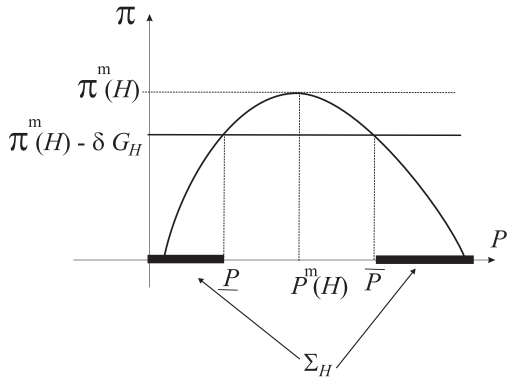


FIG. 9.8 – Prix que ne souhaite pas imiter un type H

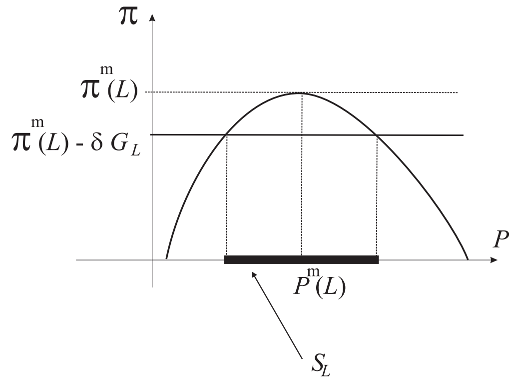


FIG. 9.9 – Prix séparateur que souhaite pratiquer un type L

6. Soit P un prix appartenant à la fois à S_L et à Σ_H, alors le couple $\{P, P^m(H)\}$ forme un équilibre séparateur. La figure 9.10 montre une intersection possible de S_L et de Σ_H. De plus, il est immédiat que $P^m(L) \in S_L$, donc si $P^m(L) \in \Sigma_H$ le couple $\{P^m(L), P^m(H)\}$ des prix d'information parfaite forme un équilibre séparateur.
7. Tout d'abord, si $\underline{P} \in S_L \cap \Sigma_H$, alors il existe comme équilibre séparateur $(\underline{P}, P^m(H))$.
   Ensuite, si $\underline{P} \notin S_L$ seul un prix élevé supérieur à $\overline{P}$ peut se trouver à la fois dans Σ_H et dans S_L, où $\overline{P}$ est tel que

$$\pi_1\left(\overline{P}, H\right) = \pi_1^m(H) - \delta G_H,$$

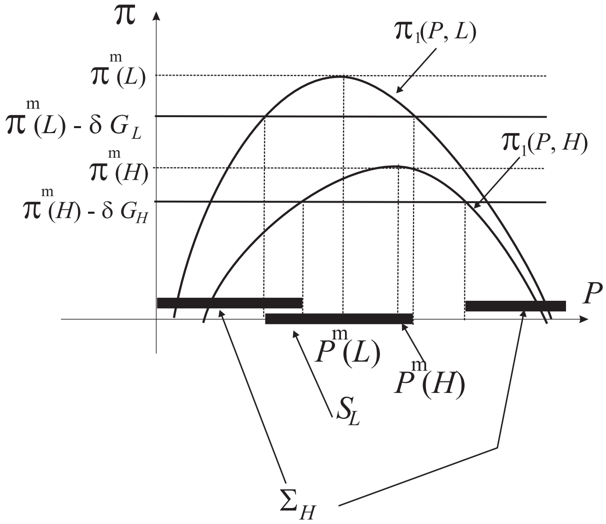


FIG. 9.10 – Superposition des conditions de séparation

or, notons

$$\Delta(P) = C_H(D(P)) - C_L(D(P)),$$

il est facile de vérifier que la fonction $\Delta(P)$ est strictement décroissante avec P. Cette fonction est celle qui permet de passer du profit d'un type H au profit d'un type L (et vice-versa) puisque :

$$\pi_1(P, L) = \pi_1(P, H) + \Delta(P).$$

Nous avons donc

$$\pi_1(\underline{P}, L) = \pi_1(\underline{P}, H) + \Delta(\underline{P}),$$

en utilisant le fait que $\pi_1(\underline{P}, H) = \pi_1(\overline{P}, H)$ il vient donc que

$$\pi_1(\underline{P}, L) = \pi_1(\overline{P}, H) + \Delta(\underline{P}),$$

et finalement que

$$\pi_1(\underline{P}, L) = \pi_1(\overline{P}, L) + \Delta(\underline{P}) - \Delta(\overline{P}),$$

or la décroissance de la fonction Δ nous indique que

$$\Delta(\underline{P}) - \Delta(\overline{P}) > 0$$

et donc que

$$\pi_1(\underline{P}, L) > \pi_1(\overline{P}, L),$$

donc si $\underline{P} \notin S_L$ c'est que

$$\pi_1^m(L) - \delta G_L \geq \pi_1(\underline{P}, L),$$

et donc aussi que

$$\pi_1^m(L) - \delta G_L \geq \pi_1(\overline{P}, L),$$

et donc que $\overline{P} \notin S_L$. Ce qui montre bien que si $\underline{P}$ n'est pas séparateur, alors il n'existe pas d'autres prix séparateurs.

8. Pour prouver qu'il existe bien des équilibres séparateurs, commençons par montrer que :

   pour tout $P < P^m(L) < P^m(H)\,,\;\; \pi_1^m(H) - \pi_1(P, H) > \pi_1^m(L) - \pi_1(P, L)$

   En effet, soit $f(P) = \pi_1^m(L) - \pi_1^m(H) - \Delta(P)$ la différence de ces deux termes. Il est immédiat que $f'(P) > 0$ et que $f(P^m(L)) < 0$ donc $f(P) < 0$ pour tout $P < P^m(L)$ ce qu'il fallait démontrer comme l'illustre la figure 9.11. En particulier, pour $\underline{P}$ qui est inférieur à $P^m(L)$, $f(\underline{P}) < 0$

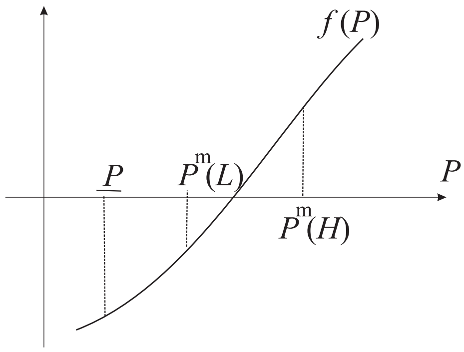


Fig. 9.11 – Fonction $f(P)$

   soit
$$\pi_1^m(H) - \pi_1(\underline{P}, H) > \pi_1^m(L) - \pi_1(\underline{P}, L)$$
   en ajoutant $-\delta G_H$ à gauche et $-\delta G_L$ à droite (puisque $G_L > G_H$) et en utilisant le fait que $\pi_1^m(H) - \delta G_H - \pi_1(\underline{P}, H) = 0$ il vient que
$$0 > \pi_1^m(L) - \delta G_L - \pi_1(\underline{P}, L)$$
   et donc bien que $\underline{P} \in S_L$.

9. Le monopole en place de type L préfère l'équilibre séparateur $\{\underline{P}, P^m(H)\}$ à tous les autres. En effet, il s'agit du prix le plus proche de son prix de monopole parmi les prix inférieurs à $P^m(L)$ et d'autres part nous avons déjà montré que $\pi_1(\underline{P}, L) > \pi_1\left(\overline{P}, L\right)$ (au cas où il existerait des équilibres séparateurs avec un prix pour le type L supérieur à $P^m(L)$).

   Il est donc intuitif de vouloir sélectionner l'équilibre séparateur $\{\underline{P}, P^m(H)\}$. Toutefois, du point de vue de la théorie des jeux cet argument intuitif est insuffisant. Heureusement, un argument permet de concilier l'intuition avec la rigueur : par construction, tous les prix $P \in \Sigma_H$ constituent pour le type H des stratégies dominées par la stratégie $P^m(H)$. Il est donc possible d'éliminer ces prix de l'espace des stratégies du type H. Une fois cette élimination effectuée, si l'entrant observe un prix $P \in \Sigma_H$, il en déduit qu'il ne peut s'agir d'un prix provenant d'un type H. L'entrant associe donc un tel prix à un monopole de type L. Formellement, pour tout $P \in \Sigma_H$, $\mu(P) = 1$. Il en résulte que le prix $\underline{P}$ qui permet au type L de se séparer au moindre coût est le seul qui résiste à l'élimination des stratégies dominées.

10. Les propriétés de cet unique équilibre séparateur après l'élimination des stratégies dominées sont importantes à souligner. Le type H joue comme en information parfaite son prix de monopole, la maximisation du profit inter temporel correspond à maximiser son profit à court terme car il lui serait trop coûteux de dissuader l'entrée. Le type L ne joue pas comme en information parfaite. Il affiche un prix inférieur à son prix de monopole ce qui lui permet de dissuader l'entrée car ce prix transmet à l'entrant potentiel l'information que l'entrée n'est pas profitable puisque les coûts marginaux de production de l'entreprise en place sont faibles.

    D'une certaine manière, l'intuition qu'un prix limite dissuade l'entrée était valide. Toutefois, **trois distinctions importantes** sont à faire ici. Premièrement (à l'équilibre séparateur) le prix limite ne trompe pas l'entrant. Au contraire, il transmet à l'entrant une information utile sur la rentabilité du marché. Deuxièmement, l'entrée n'est pas plus dissuadée qu'en information parfaite. En effet, exactement comme en information parfaite l'entrée a lieu si le monopole en place est de type H tandis qu'elle n'a pas lieu s'il est de type L. Finalement, le bien-être n'est pas réduit par rapport au bien-être d'information parfaite. Au contraire le bien-être est plus important à l'équilibre séparateur qu'en information parfaite[14]. En effet, en information parfaite, le bien-être espéré est :

    $$W^{IP} = \rho\left(W_L^m + \delta W_L^m\right) + (1-\rho)\left(W_H^m + \delta W_H^d\right),$$

    tandis qu'à l'équilibre séparateur l'espérance du bien-être s'établit à

    $$W^S = \rho\left(W_L\left(\underline{P}\right) + \delta W_L^m\right) + (1-\rho)\left(W_H^m + \delta W_H^d\right),$$

    or, comme $\underline{P} < P^m(L)$, $W_L^m < W_L\left(\underline{P}\right)$ et donc

    $$W^{IP} < W^S.$$

[14]Cette propriété de l'équilibre séparateur est importante puisqu'elle montre qu'un prix limite n'est pas forcément préjudiciable même lorsqu'il dissuade effectivement l'entrée.

9.6 Prix limite : équilibre non-séparateur***

Objectif de l'exercice : Voir l'exercice 9.5.

Le cadre est exactement celui de l'exercice 9.5 auquel il faut se référer pour la description du jeu. Ici d'autres équilibres sont caractérisés. Un équilibre est dit non-séparateur si le monopole en place joue le même prix quel que soit son type. Soit $\widetilde{P}$ le prix joué à l'équilibre par les deux types.

1. *Déterminer la croyance de l'entrant $\mu\left(\widetilde{P}\right)$ sur le type du monopole (c'est-à-dire la probabilité qu'il soit de type L) après l'observation du prix $\widetilde{P}$. En déduire que si μ^* (cf. exercice 9.5 question 1) est strictement supérieur à ρ, alors il n'existe pas d'équilibre non séparateur.*
2. *Jusqu'à la fin il sera supposé que $\rho > \mu^*$. Caractériser les conditions sous lesquelles un équilibre non-séparateur peut exister. Exprimer ces conditions à l'aide de l'ensemble S_L des prix qui, s'ils permettent de dissuader l'entrée, incitent le type L à les pratiquer et de l'ensemble S_H des prix qui, s'ils permettent de dissuader l'entrée, incitent le type H à les pratiquer.*
3. *Représenter sur un graphique (dans le plan prix, profit) les ensembles S_L et S_H.*
4. *L'exercice 9.5 a montré que si $P^m(L) \in S_H$, alors les prix d'information parfaite ne forment pas un équilibre séparateur. Sous cette hypothèse montrer qu'il existe toujours un équilibre non-séparateur.*
5. *Quelles sont les caractéristiques de l'équilibre pooling $\{P^m(L), P^m(L)\}$?*
6. *Discuter de la plausibilité des autres équilibres non-séparateurs.*

Correction

1. Si le monopole en place joue le même prix quel que soit son type, alors l'entrant ne peut rien déduire de l'observation de ce prix. Il continue donc à penser que l'entreprise installée est de type L avec la probabilité ρ et de type H avec la probabilité $1-\rho$. Si $\rho < \mu^*$, alors l'entrée a toujours lieu (puisque l'entrant a une espérance de gain positive en entrant). Or, si l'entrée a lieu l'entreprise en place n'a rien de mieux à faire que de maximiser son profit de première période. C'est-à-dire pour un type L jouer $P^m(L)$ et pour un type H jouer $P^m(H)$ ce qui est contradictoire avec le fait qu'à l'équilibre non-séparateur, les deux types jouent le même prix.
2. Soit $\widetilde{P}$ joué à l'équilibre par les deux types. Si l'un des types dévie, il peut accroître son profit de première période (en déviant exactement vers son prix de monopole) mais il provoque l'entrée (il est toujours possible de supposer qu'une déviation provoque l'entrée, puisqu'il existe une grande liberté dans le choix des croyances hors équilibre). À l'équilibre cette déviation ne doit

pas être profitable d'où les deux conditions suivantes qui caractérisent les équilibres non-séparateurs :

$$\pi_1\left(\widetilde{P}, H\right) + \delta\pi_1^m(H) \geq \pi_1^m(H) + \delta\pi_1^d(H),$$
$$\pi_1\left(\widetilde{P}, L\right) + \delta\pi_1^m(L) \geq \pi_1^m(L) + \delta\pi_1^d(L),$$

soit encore

$$\delta G_H \geq \pi_1^m(H) - \pi_1\left(\widetilde{P}, H\right),$$
$$\delta G_L \geq \pi_1^m(L) - \pi_1\left(\widetilde{P}, L\right).$$

Soit $S_H = \{P \text{ tels que } \pi_1(P, H) \geq \pi_1^m(H) - \delta G_H\}$ et soit $S_L = \{P \text{ tels que } \pi_1(P, L) \geq \pi_1^m(L) - \delta G_L\}$. Un prix $\widetilde{P}$ peut former un équilibre non séparateur si et seulement si

$$\widetilde{P} \in S_L \cap S_H.$$

3. La figure 9.12 illustre les prix qui sont compatibles avec ces conditions.

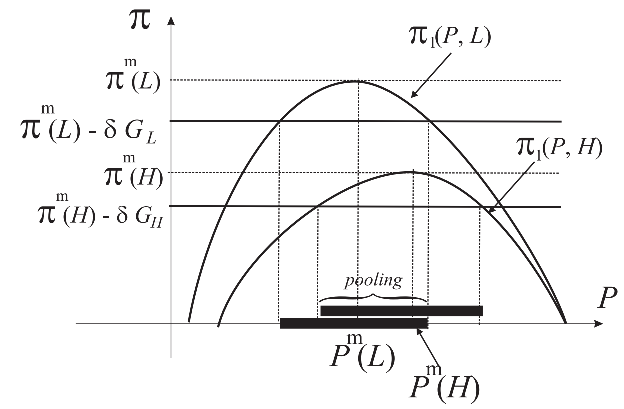


FIG. 9.12 – Équilibres non-séparateur

4. Si les prix d'information parfaite ne sont pas séparateurs, alors le prix de monopole de la firme en place de type L peut constituer un équilibre non séparateur. En effet, il est clair que le type L ne souhaite pas dévier, tandis que l'hypothèse $P^m(L) \in S_H$ indique justement que le type H ne souhaite pas dévier non plus. Cela prouve que l'ensemble des équilibres non-séparateurs n'est pas vide.
5. **Trois éléments importants** sont liés à l'équilibre pooling $\{P^m(L), P^m(L)\}$: premièrement *il s'agit d'un prix limite* (le monopole de type H pratique un prix strictement inférieur à son prix de monopole de court terme). Deuxièmement, *l'entrant* est induit en erreur avec la probabilité $1-\rho$ (c'est-à-dire lorsque la firme en place est de type H) et *n'entre pas alors que cela serait profitable.* Finalement *l'effet sur le bien-être est ambigu.* Avec la probabilité ρ le monopole est de type L et le bien-être à l'équilibre non-séparateur est identique à celui d'information parfaite. En revanche, avec la probabilité $1-\rho$

la firme est de type H et le bien-être diffère entre l'équilibre non séparateur et l'information parfaite. À court terme le bien-être augmente grâce au prix limite. En revanche en seconde période le bien-être diminue puisque le monopole perdure (le prix remonte) alors qu'en information parfaite l'entrée aurait permis au bien-être de s'accroître.

6. Comme pour les équilibres séparateurs, se pose le problème de la multitude des équilibres non séparateurs. En particulier certains prix $\widetilde{P}$ peuvent être au dessus des prix de monopole d'information parfaite du type L ou même de celui du type H. Par construction même ces stratégies ne sont pas dominées, l'élimination des stratégies dominées ne permet donc pas de les éliminer. Or, certains de ces équilibres ne sont pas très intuitifs. Par exemple si $\widetilde{P} > P^m(H)$, les deux types de monopole aurait un profit plus grand s'ils s'étaient "coordonnés" sur un équilibre non-séparateur avec un prix légèrement plus bas.

   La théorie des jeux nous donne un critère de sélection des équilibres plus fin que l'élimination des stratégies dominées. Il s'agit de l'élimination des stratégies dominées à l'équilibre, ou encore du critère de Cho-Kreps[15]. Jusqu'à présent, lorsque nous avons testé la rentabilité d'une déviation nous avons supposé qu'elle entraînait l'entrée. L'hypothèse implicite était que l'entrant supposait que cette déviation provenait plus probablement d'un type H. La liberté totale avec laquelle il est possible de choisir les croyances hors du chemin d'équilibre nous a permi de le faire. Il semble pourtant que dans certains cas la déviation provienne plus vraisemblablement du type L que du H. Prenons comme exemple le cas où $\widetilde{P} = P^m(H)$, le type H obtient le profit maximal auquel il peut rêver : profit de monopole à court comme à long terme ! Que doit penser un entrant qui observe un prix inférieur $\widetilde{P} = P^m(H)$? Comme il semble improbable que ce prix puisse avoir été choisi par un type H il est concevable qu'il s'agisse d'un signal envoyé par le type L pour augmenter son profit tout en indiquant que l'entrée n'est pas rentable. Imaginons que la déviation consiste en $P^m(L)$. Même si l'entrée n'a pas lieu après une telle déviation (croyance la plus favorable), le type H n'a pas intérêt à dévier ainsi de $P^m(H)$. En revanche, le type L aurait intérêt à dévier vers ce prix, si cette déviation est reconnue comme provenant d'un type L. Cela est illustré par la figure 9.13

   Le critère de Cho-Kreps permet ainsi d'éliminer tous les équilibres non-séparateurs dont le prix est supérieur à $P^m(L)$. Cela ne réduit pas l'ensemble des équilibres non-séparateur à un unique équilibre, mais cela montre qu'à l'équilibre non-séparateur le prix est au plus égal à $P^m(L)$. Il s'agit donc bien d'un prix limite. Maintenant, parmi tous ces équilibres survivant au critère de Cho-Kreps, il en est un qui est préféré à la fois par le monopole de type L et par celui de type H, il s'agit de $\{P^m(L), P^m(L)\}$. Est-il possible de le sélectionner ? Après tout partant d'un équilibre non-séparateur $\left\{\widetilde{P}, \widetilde{P}\right\}$ avec $\widetilde{P} < P^m(L)$, les deux types sont désireux de dévier vers $P^m(L)$ si cette déviation n'entraîne pas l'entrée. Comme $\{P^m(L), P^m(L)\}$ est bien un équi-

[15]In-Koo Cho et David M. Kreps, "Signaling Games and Stable Equilibria", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 102, No. 2. (May, 1987), pp. 179-222.

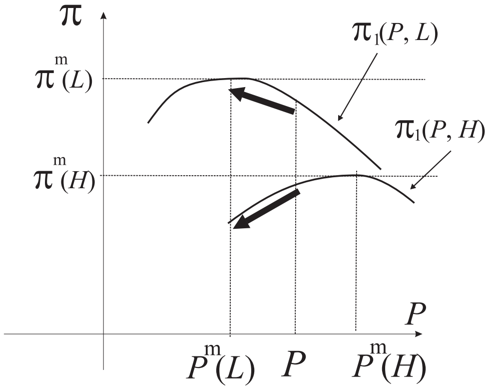


FIG. 9.13 – Élimination de certains équilibres non-séparateurs

libre, il s'agit là du critère de sélection appelé "undefeated equilibrium" par Mailath, Okuno-Fujiwara et Postelwaite[16].

[16]George J. Mailath, Masahiro Okuno-Fujiwara, Andrew Postlewaite "Belief-Based Refinements in Signalling Games ", *Journal of Economic Theory* ; 60(2), August 1993, pages 241-76.

9.7 Prix et publicité signaux de la qualité***

Objectif de l'exercice : Étudier le rôle du prix et de la publicité pour signaler la qualité d'un produit dont les consommateurs ne découvrent la qualité qu'après l'achat. Cet exercice repose sur un article de 1986 écrit par Milgrom et Roberts[17].

Soit une entreprise en situation de monopole produisant un bien de bonne qualité ($q = H$) ou de mauvaise qualité ($q = L$). Le monopole connaît sa qualité (qui est exogène à ce stade) tandis que les consommateurs ignorent la qualité avant l'achat[18]*. Les consommateurs préfèrent la bonne qualité à la mauvaise. Soit $D_H(P)$ (resp. $D_L(P)$) la demande pour la bonne (resp. mauvaise) qualité en information parfaite, pour tout P, $D_H(P) \geq D_L(P)$. Il est plus coûteux de produire de la bonne qualité plutôt que de la mauvaise. Soit $C_H(x)$ (resp. $C_L(x)$) le coût de production de x unités de bonne (resp. mauvaise) qualité. Il est supposé que pour tout x, le coût marginal de production de la bonne qualité est supérieur à celui de la mauvaise : $C'_H(x) \geq C'_L(x)$. Il est connaissance commune que le monopole est de bonne (resp. mauvaise) qualité avec la probabilité ρ (resp. $1-\rho$). En plus du prix, le monopole détermine un niveau A de dépense de publicité. Cette publicité est une pure dépense : elle n'a pas une influence directe sur les consommateurs. En revanche, si la firme dépense A en publicité, alors tous les consommateurs le savent. Le monopole annonce donc un vecteur (prix, publicité) (P, A) que tous les consommateurs observent. Les consommateurs décident d'acheter ou pas, ceux qui ont acheté apprennent la qualité. Puis une nouvelle période commence : le monopole fixe un nouveau prix, de nouvelles dépenses de publicités, les consommateurs (informés ou pas) achètent ou pas. Bien entendu un tel jeu est très compliqué et il faut l'aborder en faisant des hypothèses simplificatrices. Suivant Milgrom et Roberts, nous allons tout d'abord étudier un jeu de signal assez général en supposant que les éventuelles interactions répétées sont résumées par la fonction de profit suivante :*

$$\pi(P, \mu, q) - A$$

supposée strictement quasi-concave en P, croissante en μ, pour un monopole de type q perçu par les consommateurs comme étant de type H avec la probabilité μ et dont la stratégie est (P, A). On notera P^L (resp. P^H) le prix (supposé unique) qui rend maximum le profit d'information parfaite d'un monopole de type L (resp. H) :

$$\forall P,\ \pi(P, 0, L) \leq \pi\left(P^L, 0, L\right) \ \ \textit{(resp. } \forall P,\ \pi(P, 1, H) \leq \pi\left(P^H, 1, H\right) \textit{)}.$$

1. *Écrire les conditions d'existence d'un équilibre bayésien parfait séparateur. (C'est-à-dire un équilibre où le monopole joue une stratégie différente selon son type)*

[17]Paul Milgrom et John Roberts, "Price and advertising signals of product quality", *Journal of Political Economy* ; 94 (4), August 1986, pages 796-821, article qui formalise les idées introduites par Philip Nelson "Advertising as Information", *Journal of Political Economy*, Vol. 82, No. 4. (Jul. - Aug., 1974), pp. 729-754.

[18]Un tel bien s'appelle un bien à expérimenter ou *experience good* en anglais selon la terminologie introduite par Philip Nelson "Information and Consumer Behavior", *Journal of Political Economy*, Vol. 78, No. 2. (Mar. - Apr., 1970), pp. 311-329.

2. *En déduire que si l'équilibre est séparateur un monopole de type L joue sa stratégie d'information parfaite.*
3. *En notant* π_0^L *le profit d'information parfaite d'un type L,* π_0^H *le profit maximal d'un type H perçu comme étant de type L, écrire les conditions d'existence d'un équilibre séparateur. Représenter sur un graphique la condition de séparation d'un type L puis d'un type H.*
4. *En supposant que les prix d'information parfaite ne sont pas séparateurs, représenter dans le plan* (P, A)*, les équilibres séparateurs.*
5. *À l'aide de l'élimination des stratégies dominées et en supposant l'existence d'équilibres séparateurs, écrire le programme qui permet de sélectionner celui qui rend le profit d'un monopole de type H maximal.*
6. *Nous construisons maintenant explicitement la fonction de profit* $\pi(P, \mu, q)$*. Tout d'abord dans un jeu sans achats répétés.*
   (a) *Écrire la fonction* $\pi(P, \mu, q)$ *en l'absence d'achats répétés.*
   (b) *Caractériser l'équilibre séparateur qui survit à l'élimination des stratégies dominées.*
7. *Supposons maintenant que le monopole serve le marché pendant deux périodes.*
   (a) *Tout d'abord analyser la situation où tous les consommateurs apprennent la qualité du bien en seconde période.*
   (b) *Étudier le cas où il existe une rigidité des prix et de la demande d'une période à l'autre. C'est-à-dire que seuls peuvent acheter en seconde période les consommateurs qui ont déjà acheté en première période et que le prix de seconde période est égal au prix de première période. De plus, il sera supposé qu'un consommateur achète une ou zéro unité du bien. Soit* δ *le taux d'escompte d'une période à l'autre.*
      i. *Écrire* $\pi(P, \mu, q) - A$ *pour* $q \in \{H, L\}$ *et* μ *prenant la valeur 0 ou 1.*
      ii. *Caractériser l'équilibre séparateur qui survit à l'élimination des stratégies dominées en supposant* $D_L = 0$*.*

Correction

1. Un équilibre séparateur est décrit par un couple de stratégies (une stratégie pour le monopole de type H et une pour le type L) : $\{(P_H, A_H), (P_L, A_L)\}$ tel que $(P_H, A_H) \neq (P_L, A_L)$ et par une fonction de croyance μ des consommateurs qui a tout couple (P, A) associe la probabilité $\mu(P, A)$ avec laquelle le bien est de bonne qualité. La croyance μ doit satisfaire la règle de Bayes qui impose ici que $\mu(P_H, A_H) = 1$ et $\mu(P_L, A_L) = 0$ mais qui n'impose aucune restriction sur $\mu(P, A)$ pour les autres couples.

Si l'équilibre est séparateur, un monopole de type L peut se faire passer pour un type H en adoptant la stratégie (P_H, A_H). À l'équilibre une telle déviation ne doit pas être profitable donc :

$$\pi(P_L, 0, L) - A_L \geq \pi(P_H, 1, L) - A_H,$$

de manière plus large (étant donné μ) une déviation vers un couple (P, A) ne doit pas être profitable :

$$\pi(P_L, 0, L) - A_L \geq \pi(P, \mu(P, A), L) - A.$$

De manière symétrique pour le type H : pour tout P, A :

$$\pi(P_H, 1, H) - A_H \geq \pi(P, \mu(P, A), H) - A.$$

2. Puisque pour tout (P, A)

$$\pi(P, \mu(P, A), L) - A \geq \pi(P, 0, L) - A,$$

on doit avoir que pour tout (P, A)

$$\pi(P_L, 0, L) - A_L \geq \pi(P, 0, L) - A.$$

En particulier, cela doit être vrai pour $P = P^L$ et $A = 0$, d'où

$$\pi(P_L, 0, L) - A_L \geq \pi\left(P^L, 0, L\right).$$

Par ailleurs, par définition du maximum :

$$\pi\left(P^L, 0, L\right) \geq \pi(P_L, 0, L) \geq \pi(P_L, 0, L) - A_L,$$

d'où l'égalité :

$$\pi(P_L, 0, L) - A_L = \pi\left(P^L, 0, L\right)$$

et donc $P_L = P^L$ et $A_L = 0$. Intuitivement, à l'équilibre séparateur le monopole de type L est perçu comme tel, il maximise donc son profit en agissant comme en information parfaite (où justement il est perçu comme de type L).

3. Un équilibre séparateur existe, s'il se trouve P_H et A_H tels que :

$$\begin{cases} \pi_0^L & \geq & \pi(P_H, 1, L) - A_H \\ \pi_0^H & \leq & \pi(P_H, 1, H) - A_H \end{cases}$$

Les fonctions de profit d'un monopole de type H sont représentées pour différentes valeurs de A dans la figure 9.15. Le prix P_1^H est le prix qui maximise le profit d'un monopole de type H en information parfaite sur la qualité (ou lorsque les consommateurs pensent qu'il est de type H). De la même manière, la figure 9.14 présente des fonctions de profit du monopole de type L. Le prix P_1^L est le prix qui maximise le profit d'un monopole de type L lorsque les consommateurs pensent qu'il est de type H. Soit l'ensemble $S_H = \left\{(P, A) \,|\, \pi(P, 1, H) - A \geq \pi_0^H\right\}$ des couples (P, A) qui incitent un monopole de type H à rester séparé puisqu'ils lui assurent un profit supérieur au

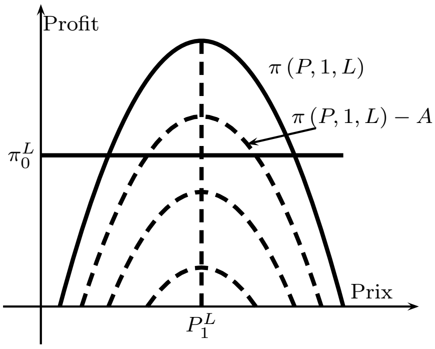


FIG. 9.14 – Profits d'un L pour différentes valeurs de A

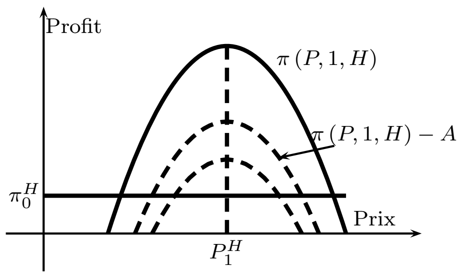


FIG. 9.15 – Profits d'un H, pour différentes valeurs de A

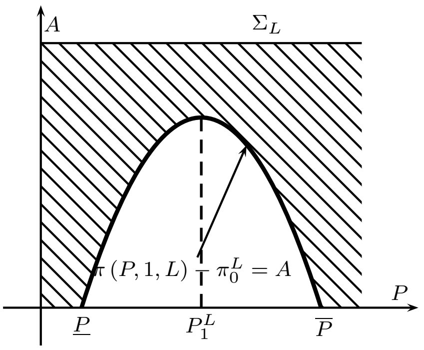


FIG. 9.16 – Séparation d'un L

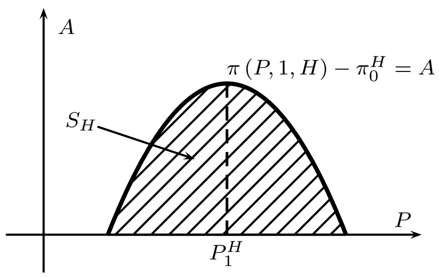


FIG. 9.17 – Séparation d'un H

profit (maximum) qu'il peut obtenir lorsqu'il est cru de type L. La figure 9.17 montre l'ensemble S_H dans le plan (P,A) (zone hachurée). De manière symétrique, soit $\Sigma_L = \left\{(P,A)\,|\pi(P,1,L) - A \leq \pi_0^L\right\}$, l'ensemble des couples (P,A) qu'un monopole de type L ne souhaite pas imiter puisque malgré la croyance la plus favorable, ils conduisent à un profit inférieur à celui obtenu par le monopole de type L qui se révèle de type L. La figure 9.16 montre l'ensemble Σ_L (zone hachurée) dans le plan (P,A).

4. Il existe un équilibre séparateur (en général plusieurs) si l'intersection $S_H \cap \Sigma_L$ n'est pas vide. Dans la figure 9.18 la zone doublement hachurée contient les équilibres séparateurs. Du point de vue du monopole de type H la stratégie la plus profitable serait $\left(P_1^H, 0\right)$ (comme en information parfaite). Cependant (dans les conditions de la figure 9.18) le monopole de type L trouve profitable de vendre au prix P_1^H et d'être cru comme étant de bonne qualité. La figure 9.18 permet d'illustrer l'arbitrage entre les dépenses de publicité et la baisse du prix. En l'absence de publicité, le monopole de qualité élevé ne peut pas se signaler avec un prix inférieur à $\overline{P}$. Or, (en l'absence de publicité) son profit est maximal pour $P_1^H < \overline{P}$. S'il souhaite pratiquer un prix compris entre P_1^H et $\overline{P}$ il doit pour continuer à se signaler engager des dépenses de publicité au moins égales à $\pi(P,1,L) - \pi_0^L$ (mais inférieures à $\pi(P,1,H) - \pi_0^H$ car sinon son profit serait trop faible). Il reste à déterminer le couple prix

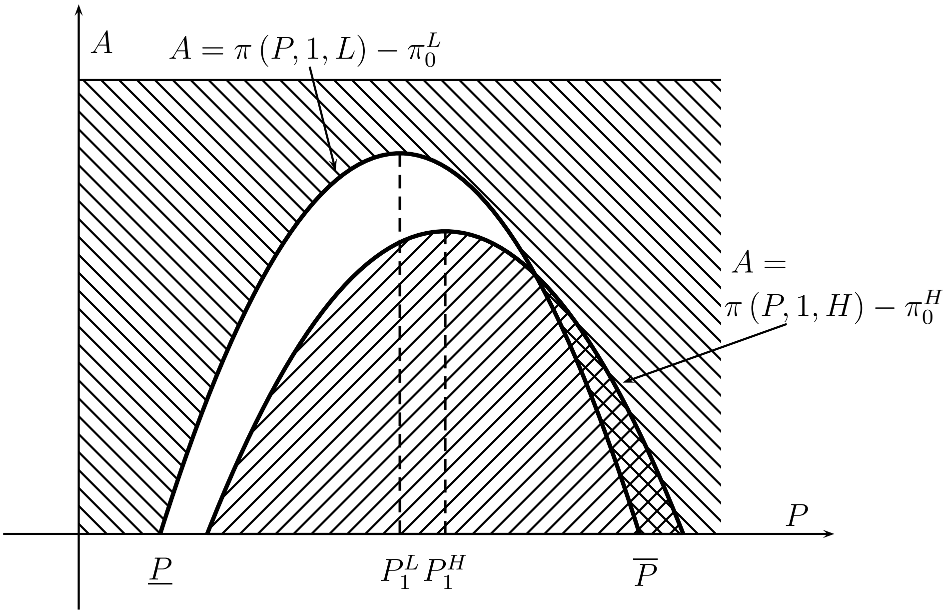


FIG. 9.18 – Équilibres séparateurs

publicité qui assure la séparation et pour lequel le profit est maximal.

5. Si un couple (P, A) se trouve dans Σ_L, il est (par construction) dominé par le couple $(P^L, 0)$. Le jeu étant connaissance commune, les consommateurs savent cela. Il n'est donc pas raisonnable qu'ils croient qu'une telle stratégie puisse avoir été jouée par un type L. En conséquence, si $(P, A) \in \Sigma_L$, alors $\mu(P, A) = 1$. C'est-à-dire que le monopole de type H peut se signaler comme tel en choisissant n'importe quelle stratégie dans Σ_L. L'équilibre séparateur qui rend maximal le profit d'un monopole de type H est donné par la résolution du programme :

$$\max_{(P,A)} (\pi(P,1,H) - A)$$
$$\text{s.c. } \pi(P,1,L) - \pi_0^L \le A \text{ et}$$
$$\text{s.c. } \pi(P,1,H) - A \ge \pi_0^H$$

Vu la forme de la contrainte $\pi(P,1,H) - A \ge \pi_0^H$, s'il existe des prix satisfaisant ces deux contraintes (c'est-à-dire $S_H \cap \Sigma_L \neq \emptyset$), alors ce programme est équivalent au programme :

$$\max_{(P,A)} (\pi(P,1,H) - A)$$
$$\text{s.c. } \pi(P,1,L) - \pi_0^L \le A$$

Puisque la fonction à maximiser décroît strictement avec A, la contrainte doit être saturée tant qu'elle implique $A \ge 0$ (il est inutile de dépenser en publicité plus que le strict nécessaire pour décourager l'imitation), tandis qu'elle est automatiquement vraie si elle indique $A < 0$. Le programme peut être séparé en deux et s'écrit finalement

$$\begin{cases} \max\limits_{P} (\pi(P,1,H) - \pi(P,1,L)) & \text{si } \pi(P,1,L) - \pi_0^L \ge 0 \\ \max\limits_{P} (\pi(P,1,H)) & \text{si } \pi(P,1,L) - \pi_0^L \le 0 \end{cases} \quad \text{(PS)}$$

La résolution de ce programme conduit à l'équilibre séparateur (ou aux équilibres séparateurs) qui survivent à l'élimination des stratégies dominées.

6. (a) Soit D_μ la demande qui s'adresse à un monopole perçu comme étant de bonne qualité avec la probabilité μ. En l'absence d'achats répétés, il vient :

$$\pi\left(P,\mu,q\right)-A=PD_\mu\left(P\right)-C_q\left(D_\mu\left(P\right)\right)-A.$$

(b) Il s'agit de résoudre le programme PS lorsque

$$\pi\left(P,\mu,q\right)-A=PD_\mu\left(P\right)-C_q\left(D_\mu\left(P\right)\right)-A.$$

Tout d'abord, caractérisons l'ensemble des prix tels que $\pi\left(P,1,L\right)-\pi_0^L\geq 0$. Soient $\underline{P}\leq\overline{P}$ tels que :

$$\pi\left(\underline{P},1,L\right)=\pi\left(\overline{P},1,L\right)=\pi_0^L.$$

Si $P\in\left[\underline{P},\overline{P}\right]$, alors $\pi\left(P,1,L\right)-\pi_0^L\geq 0$. La première partie du programme PS s'écrit donc :

$$\max_{P\in\left[\underline{P},\overline{P}\right]}\left(\pi\left(P,1,H\right)-\pi\left(P,1,L\right)\right),$$

soit encore ici

$$\min_{P\in\left[\underline{P},\overline{P}\right]}\left(C_H\left(D_H\left(P\right)\right)-C_L\left(D_H\left(P\right)\right)\right),$$

or, l'hypothèse $C'_H\left(x\right)\geq C'_L\left(x\right)$ implique que la fonction C_H-C_L est croissante. Pour minimiser C_H-C_L il faut donc choisir la quantité la plus faible soit le prix le plus élevé soit ici $\overline{P}$.

La deuxième partie du programme PS s'écrit

$$\max_{P\in[0,\underline{P}]\sqcup\left[\overline{P},+\infty\right]}\left(\pi\left(P,1,H\right)\right),$$

or par hypothèse les prix d'information parfaite ne sont pas séparateurs, c'est-à-dire que $\left(P_1^H,0\right)\notin\Sigma_L$ soit $\pi\left(P_1^H,1,L\right)\geq\pi_0^L$, soit $P_1^H\in\left[\underline{P},\overline{P}\right]$. Donc la résolution de ce programme conduit à $\underline{P}$ ou à $\overline{P}$. Toutefois, la résolution de la première partie a montré que $\pi\left(\overline{P},1,H\right)\geq\pi\left(\underline{P},1,H\right)$. Pour l'existence, il reste à vérifier que

$$\pi\left(\overline{P},1,H\right)\geq\pi_0^H.$$

Toutefois, la démonstration de ce point est un peu fastidieuse et il est préférable d'admettre que cela est vrai.

Conclusion : en l'absence d'achats répétés (et avec des coûts marginaux croissants avec la qualité) il existe toujours un équilibre séparateur. Cet équilibre séparateur est constitué d'un prix élevé ($\overline{P}\geq P_1^H$) et d'une publicité nulle.

7. (a) Si l'information est parfaite en seconde période, le monopole peut fixer son prix d'information parfaite et maximiser son profit. Son profit de seconde période est donc indépendant des actions de première période. L'étude de l'équilibre séparateur est alors ramenée à celle du jeu avec une seule période et la publicité dissipative n'est pas utilisée à l'équilibre séparateur.

   (b) i. Tout d'abord pour $q = H$ et $\mu = 1$

$$\pi(P, 1, H) - A = (1+\delta)(PD_H(P) - C_H(D_H(P))) - A,$$

en effet les consommateurs s'attendent à acheter de la bonne qualité, ils ne sont pas déçus et ils rachètent tous en seconde période. Pour $q = H$ et $\mu = 0$:

$$\pi(P, 0, H) - A = (1+\delta)(PD_L(P) - C_H(D_L(P))) - A,$$

en effet, les consommateurs s'attendent à acheter de la mauvaise qualité, ils découvrent qu'il s'agit en fait d'un produit de bonne qualité, ils rachètent en seconde période mais ils sont les seuls car les autres consommateurs n'ont pas appris la qualité. Ils n'achètent pas plus car il a été supposé que chaque consommateur achetait au plus une unité par période.
Ensuite pour $q = L$ et $\mu = 1$:

$$\pi(P, 1, L) - A = PD_H(P) - C_L(D_H(P)) + \delta(PD_L(P) - C_L(D_L(P))) - A$$

les consommateurs s'attendent à acheter de la bonne qualité, ils sont déçus par leur achat, le prix de seconde période ne varie pas mais la demande diminue car certains consommateurs ne sont plus disposés à payer P pour de la mauvaise qualité (imaginer le consommateur qui était juste indifférent entre acheter une unité de bonne qualité et ne rien acheter).
Enfin, pour $q = L$ et $\mu = 0$:

$$\pi(P, 0, L) - A = (1+\delta)(PD_L(P) - C_L(D_L(P))) - A.$$

ii. Tout d'abord à l'équilibre séparateur, le monopole de type L joue comme en information parfaite : $\left(P^L, 0\right) = (0, 0)$. De plus, comme nous l'avons déjà vu, le maximum de (PS) lorsque $A = 0$ est obtenu en $P = \overline{P}$ nous pouvons nous consacrer à la résolution de (PS) pour P dans l'intervalle $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$. Cela correspond à l'intervalle des prix où $PD_H(P) - C_L(D_H(P))$ est positif. Le programme dont la résolution conduit aux équilibres séparateurs survivant à l'élimination des stratégies dominées s'écrit après simplification :

$$\max_P \left[\delta(PD_H(P) - (C_H(D_H(P)))) - (C_H - C_L)(D_H(P))\right]$$

en mettant δ en facteur, il s'agit du même programme de maximisation qu'en information parfaite sauf que le monopole de bonne qualité fait face à un coût marginal plus élevé, il choisit donc un prix P^*

(appartenant à $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$ et défini de manière unique) plus élevé et il dépense $A^* = P^* D_H(P^*) - C_L(D_H(P^*))$ en publicité. Dans ce cas extrême : le monopole de bonne qualité fait des pertes en première période (puisque $C_L(D_H(P^*)) - C_H(D_H(P^*)) < 0$) afin d'obtenir une base de consommateurs en seconde période. Une autre manière de voir ce résultat est la suivante : en première période le monopole distribue gratuitement son produit aux consommateurs qui le valorisent le plus (mais cela ne lui coûte que $(C_H - C_L)(D_H(P))$). En seconde période il “monopolise” la demande ainsi créée. Comme la distribution gratuite a un coût élevé, il n'est pas profitable d'atteindre la même demande qu'en information parfaite.

9.8 De l'utilité à brûler de l'argent ?**

Objectif de l'exercice : Étudier le rôle de la «forward induction» dans la sélection d'un équilibre parmi plusieurs. Cet exercice s'appuie sur les articles de Van Damme[19] et de Ben-Porath et Dekel[20].

Considérer le jeu[21] de la table 9.1

		J2 G	J2 D
J1	H	$(5,1)$	$(0,0)$
J1	B	$(0,0)$	$(1,5)$

Tab. 9.1 – Jeu sans signal

1. *Déterminer les équilibres de Nash du jeu de la table 9.1.*
2. *Il est maintenant supposé que le joueur 1 peut «brûler» ou ne «pas brûler» deux unités avant le début du jeu simultané avec le joueur 2. Cette décision est observée par le joueur 2[22]. Le jeu devient alors celui de la table 9.2. Écrire*

J1 ne brûle pas		J2 G	J2 D
J1	H	$(5,1)$	$(0,0)$
J1	B	$(0,0)$	$(1,5)$

J1 brûle		J2 G	J2 D
J1	H	$(3,1)$	$(-2,0)$
J1	B	$(-2,0)$	$(-1,5)$

Tab. 9.2 – Jeu avec signal

   ce jeu sous forme normale.
3. *Montrer que J1 a une stratégie strictement dominée dans le jeu sous forme normale. Une fois cette stratégie éliminée quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures ?*
4. *Une fois la stratégie strictement dominée de J1 éliminée, J2 n'a pas de stratégie strictement dominée. Montrer, toutefois, que J2 possède des stratégies faiblement dominées. Si ces stratégies de J2 faiblement dominées sont éliminées, est-il possible d'éliminer une autre stratégie de J1 ? À quel résultat conduit ce processus ?*

[19]Eric Van Damme "Stable equilibria and forward induction", *Journal of Economic Theory* ; 48(2), August 1989, pages 476-496.

[20]Elchanan Ben-Porath et Eddie Dekel "Signaling Future Actions and the Potential for Sacrifice", *Journal of Economic Theory* ; 57(1), June 1992, pages 36-51.

[21]Ce jeu est du type "bataille des sexes" voir la table 1.5 dans le chapitre 1

[22]Remarquer que brûler de l'argent joue le même rôle que la publicité dans l'exercice 9.7.

Correction

1. Ce jeu possède deux équilibres de Nash en stratégies pures : (H, G) et (B, D). Du point de vue de J1 l'équilibre (H, G) est préféré, tandis que J2 a l'opinion inverse. Il existe aussi un équilibre en stratégies mixtes qui est ignoré dans cet exercice.
2. Pour écrire ce jeu sous forme normale, il faut commencer par identifier les ensembles de stratégies de chacun des joueurs. Pour J1 tout d'abord il est possible de noter $S_1 = \{pH, pB, bH, bB\}$ où la première lettre (p ou b) indique s'il ne brûle pas (p) ou s'il brûle (b) et la deuxième lettre indique son choix dans le jeu simultané. Pour J2 l'ensemble de ses stratégies peut s'écrire : $S_2 = \{GG, GD, DG, DD\}$, où la première lettre indique son choix si J1 n'a pas brûlé tandis que la seconde correspond à son action si J1 brûle. Finalement la table 9.3 décrit les paiements. Dans le jeu sous forme normale,

		J2			
		GG	GD	DG	DD
J1	pH	$(5, 1)$	$(0, 0)$	$(5, 1)$	$(0, 0)$
	pB	$(0, 0)$	$(1, 5)$	$(0, 0)$	$(1, 5)$
	bH	$(3, 1)$	$(3, 1)$	$(-2, 0)$	$(-2, 0)$
	bB	$(-2, 0)$	$(-2, 0)$	$(-1, 5)$	$(-1, 5)$

TAB. 9.3 – Jeu avec signal sous forme normale

   la stratégie bB de J1 est strictement dominée par la stratégie pH ainsi que par la stratégie pB.

   Les équilibres de Nash, en stratégies pures, sont après cette élimination : (pH, GG), (pH, DG), (pB, DD) et (bH, GD).

   D'une certaine manière, l'équilibre (bH, GD) signifie qu'en brûlant, J1 peut s'assurer une utilité de 3. L'idée de la suite est d'utiliser ce point pour sélectionner l'équilibre où J1 ne brûle pas et reçoit 5. Formellement, il s'agit d'utiliser l'élimination itérative des stratégies faiblement dominées.
3. Une fois la stratégie bB éliminée, les stratégies DG et DD sont faiblement dominées pour J2 (respectivement par GG et par GD). Si DG et DD sont éliminées, la stratégie pB devient strictement dominée par bH. Si à son tour pB est éliminée, la stratégie GD de J2 devient faiblement dominée par GG et finalement l'élimination de GD conduit J1 à sélectionner pH (plutôt que bH).

   Il en résulte que de manière surprenante la simple possibilité de brûler de l'argent permet à J1 d'imposer l'équilibre de Nash qu'il préfère. Dans leur article, Ben-Porath et Dekel généralisent ce résultat à une classe de jeux plus vaste. Ils montrent aussi que cette propriété dépend de manière cruciale du fait que l'autre joueur n'a pas la possibilité de brûler de l'argent.

9.9 Chain-Store Paradox***

Objectif de l'exercice : Étudier la résolution du paradoxe présenté par Selten[23] en 1978 à l'aide de la modélisation introduite par Kreps-Wilson (1982) et Milgrom-Roberts (1982)[24].

Soit la situation suivante : un monopole possède une chaîne de N magasins, un par ville, et fait face dans chaque ville à un concurrent potentiel qui menace d'entrer en ouvrant un magasin. Le timing du jeu est crucial : l'entrant potentiel de la ville 1 fait en premier le choix d'entrer ou non. Le monopole en place peut, si l'entrée a lieu, adopter deux attitudes : soit être agressif, soit être accommodant. L'économie est supposée telle qu'une action agressive entraîne la faillite de l'entrant tandis que l'accommodation lui permet de survivre. Ensuite, l'entrant de la ville 2 *(qui observe le choix de son prédécesseur et du monopole en place) prend sa décision, et ainsi de suite, jusqu'à l'entrant potentiel de la ville N qui observe les choix de tous ses prédécesseurs et les réponses de la firme installée. Le monopole en place souhaite, naturellement, dissuader l'entrée. Pour cela, il compte sur la peur des entrants de faire face à une politique agressive. Néanmoins, cette politique offensive est plus coûteuse , à court terme, au monopole que l'accommodation.*

Les paiements sont normalisés de la manière suivante : si l'entrée n'a pas lieu, l'entreprise en place obtient le profit de monopole noté a tandis que l'entrant obtient 0*. Si l'entrée a lieu, une attitude agressive (combattre) donne un profit négatif de* -1 *à l'entreprise en place et de* $(b-1)$ *à l'entrant, tandis qu'accommoder lui rapporte* 0 *et procure à l'entrant un profit de b. Il est de plus supposé que le profit de monopole fait plus que compenser le coût d'une agression* $(a > 1)$ *et que l'entrant préfère rester dehors plutôt que d'être combattu* $(0 < b < 1)$.

1. *Représenter l'arbre de ce jeu pour* $N = 1$ *ainsi que sa forme normale. En déduire les équilibres de Nash.*
2. *À l'aide de la* récurrence arrière*, analyser ce jeu pour N quelconque.*
3. *Il est maintenant supposé que* $N = +\infty$*. Le monopole en place actualise ses profits futurs avec le facteur d'actualisation* δ $(0 < \delta < 1)$*. Sous quelle condition existe-t-il un équilibre de Nash sous-jeux parfait où le monopole dissuade l'entrée ?*
4. *Il est à nouveau supposé que N est fini. Il est supposé que le monopole en place peut être de deux types : un type faible qui a le choix d'être agressif ou d'accommoder (comme dans le jeu de Selten) et un type fort qui combat toujours. Le monopole en place connaît son type mais les différents entrants l'ignorent. La nature sélectionne un type fort avec une probabilité a priori de p_0 et un type faible avec la probabilité complémentaire. À chaque période, l'entrant peut, lui aussi, être de deux types : un type faible qui préfère rester dehors plutôt que d'être combattu (comme dans dans le jeu de Selten), et un*

[23] Reinhardt Selten "The Chain-Store Paradox", *Theory and Decision*, 9, 127-159. Né en 1930, R. Selten est un économiste allemand. Il a reçu en 1994 le prix Nobel d'économie conjointement avec J. Nash et J. Harsanyi.

[24] David Kreps et Robert Wilson "Reputation and Imperfect Information", 1982, *Journal of Economic Theory*, 27, 253-279 et Paul Milgrom et John Roberts "Predation, Reputation, and Entry Deterrence",1982, *Journal of Economic Theory*, 27, 280-312.

type fort qui préfère toujours entrer. Un entrant est fort avec une probabilité a priori notée q_0.

(a) Soit $N = 1$. Représentez l'arbre de ce jeu et déterminez en l'équilibre bayésien parfait.

(b) Soit $N = 2$, et le facteur d'escompte δ est supposé égal à 1. En partant de la dernière période, déterminer l'équilibre bayésien parfait de ce jeu. (Pour décrire l'équilibre on pourra se contenter de donner les stratégies des types faibles.)

Correction

1. La forme extensive du jeu statique est décrite par la figure 9.19. Si le concurrent potentiel fait le choix de ne pas entrer (PE), le jeu s'arrête et les paiements sont 0 pour lui et a pour la firme installée. Si au contraire, il décide d'entrer (E) les paiements dépendent le la réaction du monopole en place. Si le monopole décide de combattre (C) les paiements sont de $b-1$ pour l'entrant et de -1 pour la firme en place. Si le monopole accommode (A), alors les paiements sont b pour la nouvelle firme et 0 pour l'ancienne. Sous forme nor-

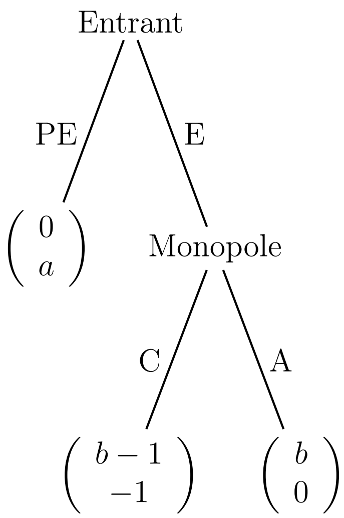


FIG. 9.19 – Jeu d'entrée statique sous forme extensive

male, le jeu se présente sous la forme de la table 9.4. Le jeu statique présente

		Monopole	
		C	A
Entrant	PE	$(0, a)$	$(0, a)$
	E	$(b-1, -1)$	$(b, 0)$

TAB. 9.4 – Jeu d'entrée statique sous forme normale

donc deux équilibres de Nash en stratégies pures (PE, C) et (E, A), et des équilibres de Nash en stratégies mixtes de la forme : $(PE, (\beta C, (1-\beta) A))$ avec $\beta \geq b$. Seul l'équilibre (E, A) est sous-jeux parfait.

2. Si le jeu possède N périodes, il semble tout d'abord intuitif que l'entreprise en place puisse "combattre" afin de dissuader l'entrée. Néanmoins, si toutes les entreprises sont rationnelles (et que la structure du jeu est connaissance commune) cela s'avère impossible à cause de la récurrence suivante (Selten l'appelle *théorie de l'induction*) : à la dernière période ($T = N$), le monopole n'a plus aucune réputation à maintenir puisque le jeu va s'arrêter, il est donc optimal pour lui d'accommoder en cas d'entrée. Cela est parfaitement anticipé par l'entrant en $T = N$ qui s'installe[25]. En période $T = N-1$, l'entreprise en place anticipe qu'en période $T = N$ l'entrée aura lieu (indépendamment de ce qui se sera passé en $T = N-1$). Le monopole n'a donc aucune réputation à maintenir/créer et il est préférable pour lui d'accommoder en cas d'entrée plutôt que de combattre. L'entrant en $T = N-1$ anticipe cela et pénètre sur le marché. Ainsi de suite jusqu'à $T = 1$: le monopole n'a jamais intérêt à combattre. En conséquence, il subit l'entrée dans toutes les périodes. Selten voit là un paradoxe (le *Chain-Store Paradox*) : la théorie des jeux prescrit des stratégies que la plupart des gens ne seraient pas prêts à suivre. Il oppose à la théorie de l'induction la *théorie de la menace* : combattre toute entrée pendant les premières périodes afin de la décourager le plus longtemps possible, quitte à accommoder sur la fin du jeu. Des expériences de laboratoire, comme dans Jung-Kagel-Levin (1994)[26], montrent qu'en effet, la théorie de la menace rend mieux compte des données que la théorie de l'induction.

3. Les stratégies suivantes forment-elles un équilibre de Nash (sous-jeux parfait) : la firme en place combat toutes les entrées, aucun entrant n'entre tant qu'aucune n'entrée n'a eu lieu ou tant que les entrées passées ont donnée lieu à un combat, en revanche si une entrée a été accommodée par le passé, alors tout entrant entre. Pour répondre à cette question, il suffit de voir si lorsqu'une entrée a lieu le monopole a intérêt ou pas à la combattre. Sans perte de généralité, supposons que l'entrée se produise en $T = 0$. S'il combat il obtient
$$-1 + \sum_{T=1}^{+\infty} \delta^T a = -1 + a\delta \sum_{T=0}^{+\infty} \delta^T = -1 + \frac{a\delta}{1-\delta}$$
en revanche, s'il accommode il obtient 0 à court-terme et 0 à long-terme car il provoque l'entrée de tous ses concurrents futurs. Le combat est payant si :
$$-1 + \frac{a\delta}{1-\delta} \geq 0 \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{1+a}.$$
Toutefois, ce résultat n'est qu'une réponse partielle à la question de Selten car il existe toujours comme équilibre de Nash sous-jeux parfait de ce jeu celui où tous les entrants entrent et où le monopole accommode éternellement.

[25] On sélectionne ici l'équilibre de Nash sous-jeux parfait.

[26] Yun Joo Jung, John H. Kagel et Dan Levin "On the Existence of Predatory Pricing : an Experimental Study of Reputation and Entry Deterrence in the Chain-Store Game", 1994, *Rand Journal of Economics*, Spring, 25, pp. 72-93.

Le modèle rend possible (à l'équilibre) la stratégie de la menace, mais il ne prédit pas qu'elle sera jouée.

4. (a) La figure 9.20 présente l'arbre de ce jeu bayésien. Par exemple, avec la probabilité $p_0 q_0$ la Nature sélectionne un entrant fort et un monopole fort. L'entrant ignore le type du monopole en place et il a le choix entre les deux stratégies E et PE. S'il choisit PE son utilité est de $-\infty$ pour traduire l'idée qu'il va toujours entrer.

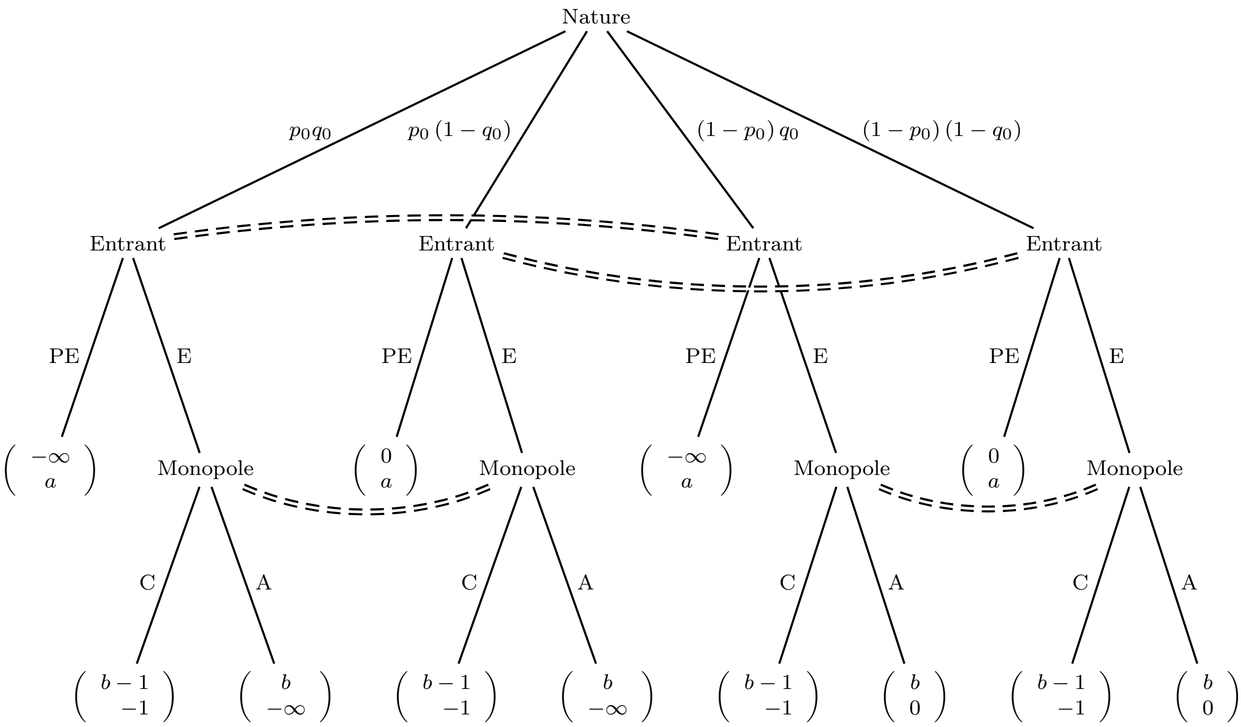


FIG. 9.20 – Jeu d'entrée avec types forts ou faibles

Dans le jeu à une période, l'entreprise en place n'a pas à cacher son type à l'entrant de la période suivante. Le jeu (à l'équilibre sous-jeux parfait) se déroule de manière assez mécanique : le concurrent, quand il entre, n'est combattu que par le monopole fort. Si l'entrant est faible, son espérance de gain est donc :

$$p_0\,(b-1) + (1-p_0)\,b = b - p_0.$$

L'équilibre du jeu statique s'en déduit : si l'entrant est fort, il joue E ; s'il est faible, il joue E si $p_0 < b$ et PE sinon. Un monopole faible joue toujours A tandis qu'un monopole fort joue toujours C.

(b) Dans un jeu à deux périodes, plusieurs cas sont possibles selon les croyances *a priori*.

Tout d'abord, existe-t-il des équilibres séparateurs ? C'est-à-dire où le monopole faible ne combat. Si combattre aujourd'hui n'est pas compensé par le gain de dissuader l'entrée des faibles demain, c'est-à-dire, si

$$-1 + a\,(1-q_0) < 0 \Leftrightarrow q_0 > \frac{a-1}{a},$$

alors un monopole faible ne combat jamais l'entrée en $T = 1$. Un entrant faible en $T = 1$ s'installe donc si $p_0 < b$ et reste dehors si $p_0 > b$. Il en résulte que l'entrant faible en $T = 2$ reste aussi dehors si l'entrée n'a pas eu lieu en $T = 1$ (puisqu'alors $p_0 > b$). Au contraire, si un entrant s'est installé en $T = 1$, l'entrant faible fait de même en $T = 2$ s'il a observé une accommodation et reste dehors s'il y a eu combat.

Supposons maintenant que

$$-1 + a\,(1 - q_0) \geq 0 \Leftrightarrow q_0 \leq \frac{a-1}{a}.$$

Sous cette condition, il n'existe plus d'équilibres séparateurs. Cherchons un équilibre non-séparateur. Comme précédemment, si $p_0 > b$, un entrant faible en $T = 1$ ne souhaite pas s'établir. En cas d'entrée en $T = 1$, (par exemple parce que l'entrant est fort), le monopole faible combat pour dissuader l'entrée d'un faible en $T = 2$. Il s'agit bien d'un équilibre non-séparateur. L'observation d'un combat conduit un entrant faible en $T = 2$ à penser que le monopole en place est fort avec la probabilité p_0 et il n'a pas intérêt à entrer.

En revanche, si $-1 + a\,(1 - q_0) \geq 0 \Leftrightarrow q_0 \leq \frac{a-1}{a}$ et $p_0 < b$, il n'existe ni équilibre séparateur ni équilibre non-séparateur. Un entrant faible serait incité en $T = 1$ à s'installer s'il anticipait une accommodation. Toutefois, il est impossible qu'à l'équilibre le monopole faible accommode toujours sur en $T = 1$ (équilibre séparateur). En effet, si cela était le cas, le fait de combattre en $T = 1$ indiquerait à coup sûr que le monopole est fort, ce qui dissuaderait l'entrée d'un faible en $T = 2$ et donnerait au monopole un profit de $-1 + a\,(1 - q_0)$, qui est justement positif. De plus, il est aussi impossible que le monopole faible combatte avec certitude en $T = 1$ (équilibre non-séparateur). En effet, s'il le faisait, la croyance de l'entrant faible en $T = 2$ serait que le monopole en place est fort avec la probabilité p_0 : $p_1 = p_0 < b$ ce qui l'inciterait à entrer. Or dans ce cas, le monopole faible n'a rien gagné à combattre en $T = 2$. Ces deux points montrent qu'il faut chercher un équilibre en stratégies mixtes (c'est-à-dire un équilibre semi-séparateur).

Le monopole doit donc choisir entre combattre et accommoder de manière aléatoire, de telle sorte que l'entrant faible en $T = 2$ soit indifférent entre entrer ou non. Tandis que l'entrant faible en $T = 2$ doit choisir entre entrer ou pas de manière aléatoire afin de rendre le monopole indifférent entre accommoder ou combattre en $T = 1$.

Soit β la probabilité avec laquelle le monopole combat l'entrée en $T = 1$. En $T = 2$, l'entrant révise de façon bayésienne la probabilité qu'il assigne au fait que le monopole en place est fort, soit :

$$p_1 = \frac{p_0}{p_0 + \beta\,(1 - p_0)}.$$

Or, à l'équilibre on doit avoir $p_1 = b$, car c'est pour cette valeur que l'entrant faible est indifférent entre entrer ou pas en $T = 2$. La résolution de l'équation $p_1 = b$ conduit à

$$\beta = \frac{1-b}{b}\frac{p_0}{1-p_0}.$$

Sachant qu'en $T = 1$, le monopole faible combat avec la probabilité β, un entrant faible n'entre que si son espérance de gain est positive soit

$$p_0\,(b-1) + (1-p_0)\,(\beta\,(b-1) + (1-\beta)\,b) \geq 0$$

qui se simplifie en

$$p_0 \leq b^2.$$

La stratégie d'un entrant faible en $T = 1$ est donc de ne pas entrer si $p_0 \in \left]b^2, 1\right]$ et d'entrer sinon.

En $T = 2$, un entrant faible entre s'il a observé une accommodation en $T = 1$. Sinon, il entre avec la probabilité α telle que l'espérance de gain d'un monopole faible qui combat en $T = 1$ soit identique à celle d'un monopole faible qui accommode en $T = 1$:

$$-1 + q_0\,(0) + (1-q_0)\,(\alpha 0 + (1-\alpha)\,a) = 0$$

(en effet en cas d'entrée en $T = 2$ un monopole faible accommode) ce qui conduit à

$$\alpha = 1 - \frac{1}{a\,(1-q_0)}.$$

(Remarque, comme $a\,(1-q_0) > 1$ ici, on a bien que $\alpha > 0$.)

En résumé : un «effet de réputation» apparaît pour $p_0 \in \left]b^2, b\right[$. Pour une telle croyance *a priori*, le monopole faible subirait l'entrée dans un jeu à une période et réalisait un profit nul. Dans un jeu à deux périodes, l'entrée d'un faible est dissuadée (en $T = 1$), ce qui assure à l'entreprise en place une espérance de profit strictement positive.

Kreps-Wilson, d'une part, et Milgrom-Roberts, d'autre part, montrent que s'il existe N périodes, un entrant faible n'entre pas en $T = 1$ si $p_0 > b^N$. Il s'agit d'un résultat très fort puisque si N est suffisamment grand, même pour une probabilité *a priori*, p_0, très faible, l'entrée est dissuadée. De plus, il s'agit de l'unique équilibre bayésien parfait de ce jeu. Il conduit aux mêmes comportements que la stratégie de la menace de Selten : le monopole en place (même faible) combat toutes les premières entrées, puis finit par accommoder sur les dernières périodes.

Bibliographie générale

Anderson, Simon ; André de Palma et Jacques-François Thisse *Discrete Choice Theory of Product Differentiation*, MIT press.

Binmore, Ken, 1992, *Fun and games*, D. C. Heath and Company.

Binmore, Ken, 1999, *Jeux et théorie des jeux*, De Boeck-Wesmael.

Chamberlin, Edward, 1953, *La Théorie de la Concurrence Monopolistique*, PUF.

Cournot, Antoine-Augustin, 1838, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses.*

Demange, Gabrielle et Jean-Pierre Ponssard, 1994, *Théorie des jeux et analyse économique*, PUF.

Fudenberg, Drew et Jean Tirole, 1996, *Game Theory*, MIT Press.

Gintis, Herbert, 2000, *Game theory evolving (A problem-centered introduction to modeling strategic interaction)*, Princeton University Press.

Kreps, David, 1990, *A course in Microeconomic theory*, Harvester Wheatsheaf.

Kreps, David, 1996, *Leçons de théorie micréconomique*, PUF.

Mas-Colell, Andreu ; Michael Whinston et Jerry Green, 1995, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

Moulin, Hervé, 1981, *Théorie des jeux pour l'économie et la politique*, Herman.

Moulin, Hervé, 1986, *Game Theory for the Social Sciences (with a companion volume : 89 exercises with solutions)*, 2nd and revised edition, New York University Press.

Moulin, Hervé, 1995, *Cooperative Micro-economics : A Game Theoretic Introduction*, Princeton, New Jersey : Princeton University Press and London : Prentice Hall.

Perrot, Anne, ed., 1996, *Concurrence et réglementation*, Economica.

Salanié, Bernard, 1994, *Théorie des contrats*, Economica.

Salanié, Bernard, 1998, *Microéconomie : les défaillances du marché*, Economica.

Shapiro, Carl, 1989, Theories of Oligopoly Behavior, in *Handbook of Industrial Organization*, vol. I, chapter 6, North Holland, Amsterdam.

Tirole, Jean, 1988, *The Theory of Industrial Organization*, MIT press.

Tirole, Jean, 1993, *Théorie de l'organisation industrielle*, 2 volumes, Economica.

Varian, Hal, 1990, *Analyse Microéconomique*, De Bœck.

Table des matières