Université A/ Mira de Bjéaia Année Universitaire 2020/2021
Faculté des Sciences Exactes
Département d'informatique
Première Année Licence

Corrigé de la série de T.D. N°4

Exercice 1 :

(1) *(a)* $f(\{1/2\}) = \{f(x) \in [0,2]/x = 1/2\}$,
$f(1/2) = 3/2 \in [0,2]$, *alors :*

$$f(\{1/2\}) = \{3/2\}.$$

(b) $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [-1,1]/f(x) = 0\}$.
On a $f(x) = 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \notin [-1,1]$, *alors :*

$$f^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$

(c) $g([-1,1]) = \{g(x) \in [0,2]/x \in [-1,1]\}$, *on a* $x \in [-1,0] \cup]0,1]$.

$$\begin{aligned} x \in [-1,0] &\Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in [1,2] \subset [0,2] \end{aligned}$$

d'où $g([-1,0]) = [1,2]$

$$\begin{aligned} x \in]0,1] &\Rightarrow 0 < x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 < x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 < x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in]1,2] \subset [0,2] \end{aligned}$$

d'où $g(]0,1]) =]1,2]$, $g([-1,1]) = [1,2]$.

(d) $g^{-1}([0,2]) = \{x \in [-1,1]/g(x) \in [0,2]\}$, *on a*

$$\begin{aligned} g(x) \in [0,2] &\Rightarrow 0 \leq x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow -1 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow (-1 \leq x^2 < 0) \vee (0 \leq x^2 \leq 1) \end{aligned}$$

l'ingalité $(-1 \leq x^2 < 0)$ *n'a pas de solutions.*

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

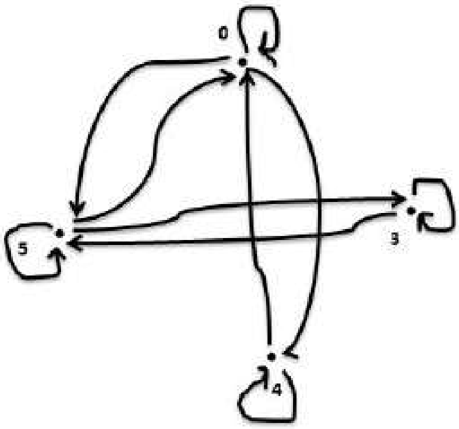
Ainsi

$$g^{-1}([0,2]) = \emptyset \cup [-1,1] = [-1,1].$$

(2) *Comme* $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ *c'est à dire l'élément* $0 \in [0,2]$ *n'admet pas d'antécédent par* f *dans* $[-1,1]$ *donc* f *n'est pas surjetive et par suite n'est pas bijective.*

(3) *L'application* g *est paire donc* $g(-1) = g(1)$ *or* $-1 \neq 1$ *donc* g *n'est pas injective d'où* g *ne peut être bijective, aussi on remarque que* $g([-1,1]) = [1,2] \neq [0,2]$ *donc* g *n'est pas surjecive, alors n'est pas aussi bijective.*

Exercice 2. 1. le graphe représentatif de $\mathcal{R}$



2. $\mathcal{R}$ est réflexive car on a $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$

$$0\mathcal{R}0,\ 3\mathcal{R}3,\ 4\mathcal{R}4 \text{ et } 5\mathcal{R}5.$$

3. $\mathcal{R}$ est symétrique car on a $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

$$\begin{aligned}
0\mathcal{R}0 &\Rightarrow 0\mathcal{R}0\\
0\mathcal{R}4 &\Rightarrow 4\mathcal{R}0\\
3\mathcal{R}3 &\Rightarrow 3\mathcal{R}3\\
4\mathcal{R}4 &\Rightarrow 4\mathcal{R}4\\
5\mathcal{R}5 &\Rightarrow 5\mathcal{R}5\\
0\mathcal{R}5 &\Rightarrow 5\mathcal{R}0\\
3\mathcal{R}5 &\Rightarrow 5\mathcal{R}3.
\end{aligned}$$

4. $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique car par exemple, on a $0\mathcal{R}4$ et $4\mathcal{R}0$ mais $0 \neq 4$.
5. $\mathcal{R}$ n'est pas transitive car par exemple, on a $0\mathcal{R}5$ et $5\mathcal{R}3$ mais $0 \not\mathcal{R} 3$.

Exercice 3. a) Sur $\mathbb{Z}$, on considère la relation $\triangle$ définie par :

$$x \triangle y \Leftrightarrow x + y \text{ est pair},$$

la relation $\triangle$ peut s'écrire :

$$x \triangle y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k.$$

Montrons que $\triangle$ est une relation d'équivalence.

i) Réflexivité de $\triangle$: Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned} x + x = 2x &\Rightarrow \exists k = x \in \mathbb{Z} : x + x = 2k \\ &\Rightarrow x \triangle x \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x \triangle x$. D'où la réflexivité de $\triangle$.

ii) Symétrie de $\triangle$: soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \triangle y$. Montrons que $y \triangle x$. On a

$$\begin{aligned} x \triangle y &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y + x = 2k \\ &\Rightarrow y \triangle x. \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x \triangle y \Rightarrow y \triangle x$. D'où la symétrie de $\triangle$.

iii) Transitivité de $\triangle$: Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x \triangle y$ et $y \triangle z$. Montrons que $x \triangle z$. On a

$$\left\{ \begin{array}{c} x \triangle y \\ \text{et} \\ y \triangle z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k ... (1) \\ \text{et} \\ \exists k_1 \in \mathbb{Z} : y + z = 2k_1 ... (2) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow \exists k, k_1 \in \mathbb{Z} : x + y + y + z = 2k + 2k_1 \\ &\Rightarrow \exists k, k_1 \in \mathbb{Z} : x + z = 2k + 2k_1 - 2y \\ &\Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} : x + z = 2k_2 \text{ tel que } k_2 = 2\left(k + k_1 - y\right) \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x \triangle z. \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x \triangle y$ et $y \triangle z \Rightarrow x \triangle z$. D'où la transitivité de $\triangle$.
De (i), (ii), (iii) on a $\triangle$ est une relation d'équivalence.

b) Déterminons la classe d'équivalence de 0 et 1.

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z}, x \triangle 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\} \\ &= \{2k / k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{1} &= \{x \in \mathbb{Z}, x \triangle 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x + 1 = 2k\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k - 1\} \\ &= \{2k - 1 / k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

.

c) Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\triangle$.

Par définition, l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\triangle$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\triangle$. Pour identifier cet ensemble, on va déterminer quelque classes d'équivalences.

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\}\\ \overline{1} &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k-1\}\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}\overline{2} &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k-2\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2\,(k-1)\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k^{'} \in \mathbb{Z} : x = 2k^{'}\}\\ &= \overline{0}\\ \overline{-2} &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k+2\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2(k+1)\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k' = k+1 \in \mathbb{Z} : x = 2k'\}\\ &= \overline{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{3} &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k-3\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k-2-1\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2\,(k-1)-1\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k^{'} \in \mathbb{Z} : x = 2k^{'}-1\}\\ &= \overline{1}\\ \overline{-1} &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k+1\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k+2-1\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2(k+1)-1\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}, \exists k' \in \mathbb{Z} : x = 2k'-1\}\\ &= \overline{1}\end{aligned}$$

On peut remarquer que tous les éléments en relation avec 0 sont les entiers pairs, tandis que tous les éléments en relation avec 1 sont les entiers impairs. Donc

$$\mathbb{Z}/\triangle = \{\overline{0}, \overline{1}\}.$$

Exercice 4. a) Sur $\mathbb{N}^2$, on considère la relation $\mathcal{S}$ définie par :

$$(a,b)\,\mathcal{S}\left(a^{'},b^{'}\right) \Leftrightarrow a+b^{'} = b+a^{'} ,$$

Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

i) Réflexivité de $\mathcal{S}$: Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$a+b = b+a.$$

Donc $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\,(a,b)$. D'où la réflexivité de $\mathcal{S}$.

ii) Symétrie de $\mathcal{S}$: soient $(a,b)\,,\left(a',b'\right) \in \mathbb{N}^2$ tels que$(a,b)\,\mathcal{S}\left(a',b'\right)$.
Montrons que $\left(a',b'\right)\mathcal{S}\,(a,b)$. On a

$$\begin{aligned}
(a,b)\,\mathcal{S}\left(a',b'\right) &\Rightarrow a+b'=b+a' \\
&\Rightarrow b+a'=a+b' \ \text{(symétrie de l'égalité)} \\
&\Rightarrow a'+b=b'+a \ \text{(commutativité de l'addition)} \\
&\Rightarrow \left(a',b'\right)\mathcal{S}\,(a,b)\,.
\end{aligned}$$

Donc $\forall (a,b)\,,\left(a',b'\right) \in \mathbb{N}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a',b'\right) \Rightarrow \left(a',b'\right)\mathcal{S}\,(a,b)$. D'où la symétrie de $\mathcal{S}$.

iii) Transitivité de $\mathcal{S}$: Soient $(a,b)\,,\left(a',b'\right),\left(a'',b''\right) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a',b'\right)$ et $\left(a',b'\right)\mathcal{S}\left(a'',b''\right)$. Montrons que $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a'',b''\right)$. On a

$$\left\{\begin{array}{c} (a,b)\,\mathcal{S}\left(a',b'\right) \\ \text{et} \\ \left(a',b'\right)\mathcal{S}\left(a'',b''\right) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b'=b+a' \ldots (1) \\ \text{et} \\ a'+b''=b'+a'' \ldots (2) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
(1)+(2) &\Rightarrow a+b'+\left(a'+b''\right)=b+a'+\left(b'+a''\right) \\
&\Rightarrow a+b''=b+a'' \\
&\Rightarrow (a,b)\,\mathcal{S}\left(a'',b''\right).
\end{aligned}$$

Donc $\forall (a,b)\,,\left(a',b'\right),\left(a'',b''\right) \in \mathbb{N}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\left(a',b'\right)$ et $\left(a',b'\right)\mathcal{S}\left(a'',b''\right) \Rightarrow (a,b)\,\mathcal{S}\left(a'',b''\right)$.
D'où la transitivité de $\mathcal{S}$.
De (i), (ii), (iii) on a $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

b) Déterminons la classe d'équivalence de $(1,1)$.

$$\begin{aligned}
\overline{(1,1)} &= \{(a,b) \in \mathbb{N}^2,\ (a,b)\,\mathcal{S}\,(1,1)\} \\
&= \{(a,b) \in \mathbb{N}^2, a+1=b+1\} \\
&= \{(a,b) \in \mathbb{N}^2, a=b\} \\
&= \{(a,a)\,/a \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.

a) Sur $]1,+\infty[$, on considère la relation $\mathcal{T}$ définie par :

$$x\mathcal{T}y \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1},$$

Montrons que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre.

i) Réflexivité de $\mathcal{T}$: Soit $x \in\,]1,+\infty[$. On a

$$\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$

Donc $\forall x \in]1,+\infty[\,,\, x\mathcal{T}\, x$. D'où la réflexivité de $\mathcal{T}$.

ii) Antisymétrie de $\mathcal{T}$: Soient $x, y \in]1,+\infty[$ tels que $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}x$. Montrons que $y{=}x$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{T}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{T}x \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \\ \text{et} \\ \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \\
&\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1} \\
&\Rightarrow x\left(y^2+1\right) = y\left(x^2+1\right) \\
&\Rightarrow xy^2 + x = yx^2 + y \\
&\Rightarrow xy^2 + x - yx^2 - y = 0 \\
&\Rightarrow xy^2 - yx^2 + x - y = 0 \\
&\Rightarrow xy\,(y-x) + x - y = 0 \\
&\Rightarrow -xy\,(x-y) + x - y = 0 \\
&\Rightarrow (x-y)\,(-xy+1) = 0 \\
&\Rightarrow (x-y) = 0 \vee (-xy+1) = 0 \\
&\Rightarrow x = y
\end{aligned}$$

car $x, y \in]1,+\infty[$ entraine $(-xy+1) < 0$ c-à-d $(-xy+1) \neq 0$.

Donc $\forall x, y \in]1,+\infty[, x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}x \Rightarrow x = y$. D'où l'antisymétrie de $\mathcal{T}$.

iii) Transitivité de $\mathcal{T}$: Soient $x, y, z \in]1,+\infty[$ tels que $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z$. Montrons que $x\mathcal{T}z$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{T}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{T}z \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \cdots (1) \\ \text{et} \\ \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{z}{z^2+1} \cdots (2) \end{array}\right. \\
(1) \text{ et } (2) &\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1} \leq \frac{z}{z^2+1} \\
&\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{z}{z^2+1} \\
&\Rightarrow x\mathcal{T}z.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in]1,+\infty[, x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z \Rightarrow x\mathcal{T}z$. D'où la transitivité de $\mathcal{T}$.
De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.

b) Cet ordre est-il total ?

Soit $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1}$ et alors $x\mathcal{T}y$, soit $\frac{y}{y^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$ et alors $y\mathcal{T}x$. Donc $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre total.

Exercice 6. a) Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation $\mathcal{S}$ définie par :

$$(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ et } b \leq d$$

Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

i) Réflexivité de $\mathcal{S}$: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$a \leq a \text{ et } b \leq b.$$

Donc $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\,(a,b)$, d'où la réflexivité de $\mathcal{S}$.

ii) Antisymétrie de $\mathcal{S}$: soient $(a,b)\,,(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(a,b)$.
Montrons que $(a,b) = (c,d)$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} (a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d) \\ \text{et} \\ (c,d)\,\mathcal{S}\,(a,b) \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} [a \leq c \text{ et } b \leq d] \\ \text{et} \\ [c \leq a \text{ et } d \leq b] \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} [a \leq c \text{ et } c \leq a] \\ \text{et} \\ [b \leq d \text{ et } d \leq b] \end{array}\right. \\
&\Rightarrow a = c \text{ et } b = d \\
&\Rightarrow (a,b) = (c,d).
\end{aligned}$$

Donc $\forall (a,b)\,,(c,d) \in \mathbb{R}^2$,$(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(a,b) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$, d'où l'antisymétrie de $\mathcal{S}$.

iii) Transitivité de $\mathcal{T}$: Soient $(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f)$.
Montrons que $(a,b)\,\mathcal{S}\,(e,f)$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} (a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d) \\ \text{et} \\ (c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f) \end{array}\right. &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} [a \leq c \text{ et } b \leq d] \ldots (1) \\ \text{et} \\ [c \leq e \text{ et } d \leq f] \ldots (2) \end{array}\right. \\
(1) \text{ et } (2) &\Rightarrow [a \leq c \leq e \text{ et } b \leq d \leq f] \\
&\Rightarrow a \leq e \text{ et } b \leq f \\
&\Rightarrow (a,b)\,\mathcal{S}\,(e,f).
\end{aligned}$$

Donc $\forall (a,b)\,,(c,d)\,,(e,f) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b)\,\mathcal{S}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f) \Rightarrow (c,d)\,\mathcal{S}\,(e,f)$, d'où la transitivité de $\mathcal{S}$.
De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

b) Cet ordre est-il total ?

L'ordre $\mathcal{S}$ n'est pas total (il est partiel) : en effet, les deux couples $(0,8)$ et $(3,7)$ ne sont pas comparables. On a

$$\begin{aligned}
8 &\not\leq 7 \Rightarrow (0,8)\not\mathcal{S}(3,7) \\
3 &\not\leq 0 \Rightarrow (3,7)\not\mathcal{S}(0,8).
\end{aligned}$$