Série N°1

Exercice N°1

Deux boules conductrices identiques portent des charges Q_1 et Q_2, on les met en contact puis on les sépare. Quelles sont alors leurs charges après contacte si :
$Q_1 = 5.10^{-9}\,C, Q_2 = 0.$
$Q_1 = 4.10^{-9}\,C, Q_2 = -6.10^{-9}.$

Exercice N°2

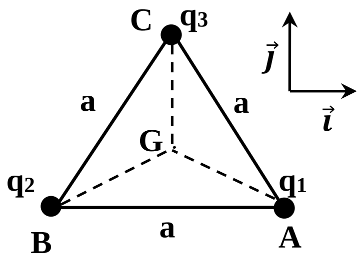
Deux charges ponctuelles $q_1 = +9q$ $(q > 0)$ et $q_2 = -q$ sont fixées respectivement aux points A et O (origine de l'axe $X'OX$) tel que $AO = a$ avec $a > 0$.

a) Exprimer la force résultante qui s'exercerait sur une charge ponctuelle $q_3 = +q$ placée en un point M d'abscisse x positive.
b) Pour quelle(s) valeurs de x cette force résultante est-elle nulle ?
c) Pour quelle(s) valeurs de x cette force résultante est-elle attractive ?
d) Pour quelle(s) valeurs de x cette force résultante est-elle répulsive ?

Exercice N°3

Deux charges ponctuelles, identiques $(q_a = q_b = q > 0)$ sont placées respectivement en A et B suivant l'axe OZ $(OA = OB = a)$. Une troisième charge $Q > 0$ est placée en M sur l'axe à l'abscisse $OM = x$.
Déterminer la force résultante $\vec{F}$ exercée par q_a et q_b sur la charge Q .
Expriment sont module. Trouver la position x pour que F soit maximal.
Trouver l'expression de la force résultante $\vec{F}$ si $q_a = q$ et $q_b = -q$ avec $q > 0$.

Exercice N°4



On dispose trois charges ponctuelles $q_1 = q_2 = q_3 = q$ $(q > 0)$ aux somment d'un triangle équilatérale de côté a.
Trouver l'expression de la force électrostatique totale qui agisse sur la charge q1.
Quelle charge ponctuelle Q de signe contraire faut-il placer au centre du triangle pour que la résultante des forces appliquées sur q_1 soit nulle. $\overline{\mathrm{AG}} = \overline{\mathrm{BG}} = \overline{\mathrm{CG}} = \frac{\mathrm{a}}{\sqrt{3}}$

Solution

Exercice 01 :

Les boules sont identiques, donc, la charge finale portée par chaque boule est la même $Q_1^f = Q_2^f$

De la conservation de la charge : $\sum Q_{initiale} = \sum Q_{finale}$

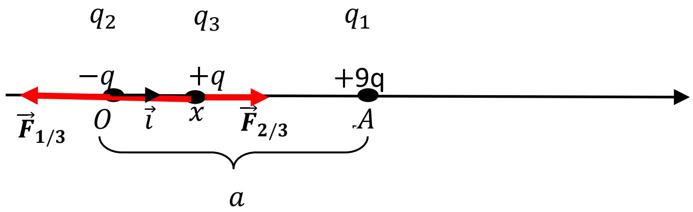
$Q_1^i + Q_2^i = Q_1^f + Q_2^f O$

Donc ; $Q_1^f = Q_2^f = \frac{Q_1^i + Q_2^i}{2}$

$Q_1^i = 5.10^{-9}c \; et \; Q_2^i = 0c \quad Q_1^f = Q_2^f = 2.5.10^{-9}c$

$Q_1^i = 4.10^{-9}c \; et \; Q_2^i = -6.10^{-9}c \quad Q_1^f = Q_2^f = -1.10^{-9}c$

Exercice 02 :



Force résultante sur $\boldsymbol{q_3} = +\boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{0 < x < a}$

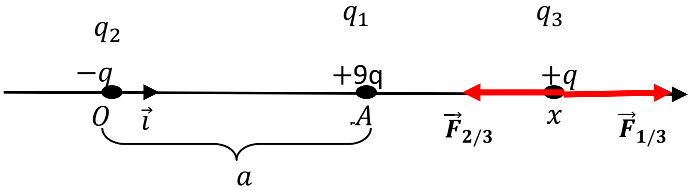
$\vec{F}_{1/3} = \frac{Kq_1q_3}{(a-x)^2}(\vec{u}_{13}) \; et \; \vec{F}_{2/3} = \frac{Kq_2q_3}{x^2}(\vec{u}_{23})$ *avec :*

$\vec{u}_{13} = -\vec{\imath} \; et \; \vec{u}_{23} = \vec{\imath}$

$\vec{F}_{1/3} = \frac{Kq_1q_3}{(a-x)^2}(-\vec{\imath}) \; et \; \vec{F}_{2/3} = \frac{Kq_2q_3}{x^2}\vec{\imath}$

$\vec{F}_R = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3} = \left[-\frac{Kq_1q_3}{(a-x)^2} + \frac{Kq_2q_3}{x^2}\right]\vec{\imath}$

$$\boxed{\vec{F}_R = K\left[\frac{9q^2}{(a-x)^2} - \frac{q^2}{x^2}\right]\vec{\imath}}$$



$\boldsymbol{x > a}$

$\vec{F}_{1/3} = \frac{Kq_1q_3}{(x-a)^2}(\vec{u}_{13}) \; et \; \vec{F}_{2/3} = \frac{Kq_2q_3}{x^2}(\vec{u}_{23})$ *avec :*

$\vec{u}_{13} = \vec{u}_{23} = \vec{\imath}$

$\vec{F}_{1/3} = \frac{Kq_1q_3}{(x-a)^2}\vec{\imath} \; et \; \vec{F}_{2/3} = \frac{Kq_2q_3}{x^2}\vec{\imath}$

$\vec{F}_R = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3} = \left[\frac{Kq_1q_3}{(x-a)^2} + \frac{Kq_2q_3}{x^2}\right]\vec{\imath}$

$$\boxed{\vec{F}_R = K\left[\frac{9q^2}{(x-a)^2} - \frac{q^2}{x^2}\right]\vec{\imath}}$$

Valeur de $\boldsymbol{x}$ *pour laquelle* $\vec{F}_R = \vec{0}$

$\boldsymbol{0 < x < a}$

$\vec{F}_R = 0 \Longrightarrow q^2[9(x)^2 - (x+a)^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \\ x_2 = -\frac{a}{4} \text{ (à } \boldsymbol{rejeter}) \end{cases}$; $\vec{F}_R$ *est nulle pour* $\boxed{x = x_1 = \frac{a}{2}}$

$\boldsymbol{x > a}$

$$\boldsymbol{Si\ \vec{F}_R = 0, on\ aurait: q^2[9(x)^2 - (x-a)^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a}{8} < a;\ donc\ à\ rejeter \\ x_2 = -\frac{5a}{4} < 0 < a;\ donc\ à\ rejeter\ aussi \end{cases}}$$

$\vec{F}_R$ ne peut donc pas s'annuler pour $x > a$

d) Il faut rappeler le signe d'un polynôme du 2ième degré : signe de –a entre les deux racines ($x_1 < x_2$) et signe de +a ailleurs.

$\boldsymbol{0 < x < a}$

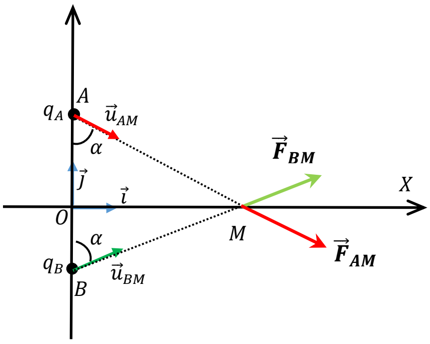
$9(x)^2 - (x+a)^2]$ est un polynôme du 2ième degré qui a le signe négatif lorsque $x < \frac{a}{2}$ et positif pour $x > \frac{a}{2}$ $(a = 9 \Longrightarrow signe\ de - a < 0)$. $\vec{F}_R$ est donc négative (force attractive par rapport à l'origine O) pour $x < \frac{a}{2}$ et positive pour $x > \frac{a}{2}$ (force répulsive par rapport à l'origine O).

$\boldsymbol{x > a}$

$\vec{F}_R$ a le signe de a>0 ; la force est répulsive par rapport à l'origine.

Exercice 03 :

1. Calcul de la force exercée sur la charge q



La charge q est soumise aux forces électrostatiques suivantes :

- $\vec{F}_1 = \frac{Kq_A.q_M}{\|\overrightarrow{AM}\|^2}\vec{u}_{AM} = \frac{KQq}{x^2+a^2}(\cos\alpha\,\vec{\imath} - \sin\alpha\,\vec{k}\,)$
- $\vec{F}_2 = \frac{Kq_O.q_M}{\|\overrightarrow{BM}\|^2}\vec{u}_{BM} = \frac{KQq}{x^2+a^2}(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{k}\,)$

La résultante des forces exercée sur la charge Q est :

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = KQq\left(\frac{2\cos\alpha}{y^2+a^2}\right)\vec{\imath}$

Or, la figure ci-contre nous donne :

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

La force devient :

$$\vec{F} = 2KQq\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right)\vec{\imath}$$

$$\|\vec{F}\| = 2K|Qq|\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right)$$

2- $\|\vec{F}\|$ est maximal si $\frac{d\|\vec{F}\|}{dx} = 0$

$$\frac{d\|\vec{F}\|}{dx} = 0 \to\to 2K|Qq|\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = 0 \to 2K|Qq|\left(\frac{a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = 0$$

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Résultante $\vec{F}$ si $q_a = q$ et $q_b = -q$

La force $\vec{F}_1$reste inchangée, par contre la force $\vec{F}_2$ change de direction (elle devienne attractive), donc :

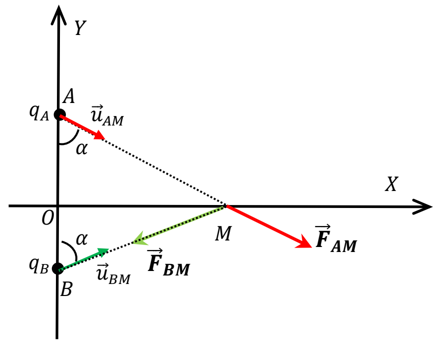
- $\vec{F}_1 = \frac{Kq_A.q_M}{\|\overrightarrow{AM}\|^2}\vec{u}_{AM} = \frac{KQq}{x^2+a^2}(\cos\alpha\,\vec{\imath} - \sin\alpha\,\vec{k}\,)$
- $\vec{F}_2 = \frac{Kq_O.q_M}{\|\overrightarrow{BM}\|^2}\vec{u}_{BM} = \frac{KQq}{x^2+a^2}(-\cos\alpha\,\vec{\imath} - \sin\alpha\,\vec{k}\,)$

La résultante des forces exercée sur la charge Q est :

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -KQq\left(\frac{2\sin\alpha}{y^2+a^2}\right)\vec{\jmath}$

Or, la figure ci-contre nous donne :

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$$



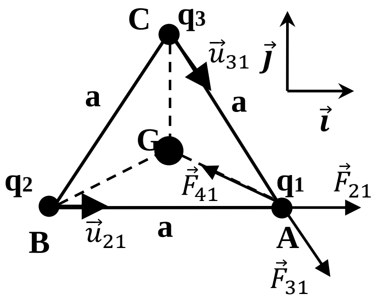
La force devient :

$$\boldsymbol{\vec{F} = -2KQq\left(\frac{a}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right)\vec{\jmath}}$$

$$\boldsymbol{\|\vec{F}\| = 2K|Qq|\left(\frac{a}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right)}$$

Exercice 04 :

La force résultante $\vec{F}_{321} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$



$\vec{F}_{31} = \frac{Kq_3q_1}{r_{31}^2}\vec{u}_{31}$ et $\vec{F}_{21} = \frac{Kq_2q_1}{r_{21}^2}\vec{u}_{21}$ avec$\vec{u}_{31} = \cos 60\,\vec{\imath} - \sin 60\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$ et $\vec{u}_{21} = \vec{\imath}$

$$r_{31} = r_{21} = a$$

$$\vec{F}_{321} = k\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\,\right) + k\frac{q^2}{a^2}\vec{\imath} = k\frac{\sqrt{3}q^2}{a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}\,\right)$$

La force totale appliquée sur q1 est nulle : $\sum\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_{321} + \vec{F}_{41} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_{41} = -\vec{F}_{321}$

$\vec{F}_{41} = \frac{KQq}{r_{41}^2}\vec{u}_{41}$ avec $\vec{u}_{41} = \cos 30\,\vec{\imath} - \sin 30\vec{\jmath} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}$ alors $\vec{F}_{41} = \frac{3KQq}{a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right)$

$$\frac{3KQq}{a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right) = -k\frac{\sqrt{3}q^2}{a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}\,\right) \rightarrow Q = -\frac{q}{\sqrt{3}}$$