Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnele

Licence 2 (Licence à programme national)

Analyse complexe

Série de TD N°3

Exercice 1:

Vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions suivantes :

1. $w = z^3$.
2. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
3. $w = \sin z$.

Solution :

1. Pour $w = u + iv = z^3$, on a $u = x^3 - 3xy^2$ et $v = 3x^2y - y^3$,

$$\text{donc} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. Pour $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, on a $u = \frac{1}{2}\frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2}$ et $v = \frac{1}{2}\frac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2}$,

$$\text{donc} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3. Pour $w = \sin z$, on a $u = \sin x \cosh y$ et $v = \cos x \sinh y$,

$$\text{donc} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exercice 2:

Déterminer les conditions sur les constantes réelles a, b, c et d qui rendent la fonction

$$f(z) = ax + by + i(cx + dy) \text{ holomorphe.}$$

Solution :

On a $u = ax + by$ et $v = cx + dy$, d'où $\dfrac{\partial u}{\partial x} = a$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = b$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = c$, et $\dfrac{\partial v}{\partial y} = d$.

dérivées partielles existent et elles sont continues, donc pour que f soit holomorphe, il est nécessaire et suffisant que $a = d$ et que $b = -c$. Ainsi

$$f(z) = ax + -cy + i(cx + ay) = (a + ic)(x + iy) = (a + ic)z.$$

Exercice 3:

1) *Montrer que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires :*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta};\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

2) *Vérifier que la fonction définie pour* $\operatorname{Re} z > 0$ *par* $f(z) = \ln|z| + i\arg z$, *est holomorphe.*

Solution :

En utilisant les coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, f s'écrit

$$f(z) = \ln r + i\theta = u(r,\theta) + iv(r,\theta),$$

d'où $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$, par conséquent f est holomorphe.

Exercice 4:

Soit f une fonction complexe définie par

$$\begin{cases} e^{\frac{-1}{z^4}} & ; z \neq 0 \\ 0 & ; z = 0 \end{cases}$$

Est-ce- que la fonction f est dérivable au point $z = 0$?

Solution :

La fonction f n'est pas dérivable au point $z=0$, car elle n'est pas continue en ce point.

En effet, en choisissant $x=y$ i.e. $z=x+ix$, dans la limite, on obtient

$$\lim_{z\to 0} e^{\frac{-1}{z^4}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-1}{(x+ix)^4}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{4x^4}} = \infty.$$

Exercice 5:

Soit $f=u+iv$ une fonction complexe holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $u=v^2$.
Montrer que f est constante.

Solution :

Par les conditions de Cauchy-Riemann, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ 2v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases},$$

remplaçant la première égalité dans la deuxième, on obtient

$$2v\left(2v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow \left(4v^2+1\right)\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

D'où $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0,$

et comme $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, alors $f'(z)=0$. Ainsi f est constante.

Exercice 6:

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$1)\ f(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad 2)\ f(z) = \cos^2(2z+3i), \quad 3)\ f(z) = (z+i)^z$$

Solution :

1) On a $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)' = \dfrac{(1+z)'(1-z)-(1+z)(1-z)'}{(1-z)^2} = \dfrac{2}{(1-z)^2}$

$$\begin{aligned}
2)\ \left(\cos^2(2z+3i)\right)' &= 2\left(\cos(2z+3i)\right)'\cos(2z+3i)\\
&= 2(2z+3i)'(-\sin(2z+3i))\cos(2z+3i)\\
&= -4\sin(2z+3i)\cos(2z+3i)
\end{aligned}$$

3) En utilisant les fonctions exponentielle et logarithme, on peut écrire

$$(z+i)^z = \exp\log(z+i)^z = \exp(z\log(z+i)),$$

$$\begin{aligned}
\text{d'où}\ \ ((z+i)^z)' &= (z\log(z+i))'\exp(z\log(z+i))\\
&= \left(\log(z+i)+\frac{z}{z+i}\right)(z+i)^z\\
&= (z+i)^z\log(z+i)+z(z+i)^{z-1}
\end{aligned}$$

Exercice 7:

Trouver les limites suivantes. 1) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^{10}+1}{z^6+1}$, 2) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z^2}$

Solution :

1) On a $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^{10}+1}{z^6+1} = \dfrac{0}{0}$,

c'est une forme indéterminée, mais on peut utiliser la règle de l'Hôpital puisque les fonctions

$z^{10}+1$ et z^6+1 sont holomorphes, donc

$$\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1} = \lim_{z\to i}\frac{(z^{10}+1)'}{(z^6+1)'} = \lim_{z\to i}\frac{10z^9}{6z^5} = \frac{10}{6}(i)^4 = \frac{5}{3}$$

2) De même on a $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z^2} = \dfrac{0}{0}$

Comme $1-\cos z$ et z^2 sont holomorphes, alors par la règle de l'Hôpital on obtient

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z} = \frac{0}{0},$$

utilisant encore une fois la règle de l'Hôpital on trouve $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z^2} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z}{2} = \dfrac{1}{2}$