Corrigé de l'examen de Mécanique Quantique II

Exercice 1: (05 points)

1. $\psi = N \left(-3 \left(\frac{8\pi}{15} \right)^{1/2} Y_2^1 - 2 \left(\frac{32\pi}{15} \right)^{1/2} Y_2^2 \right)$. (2 point)
2. $(\psi, \psi) = 1 \implies N = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{15}{8\pi}}$ et $\psi = -\frac{3}{5} Y_2^1 - \frac{4}{5} Y_2^2$. (1 point)
3. $L^2 \psi = 6\hbar^2 \psi$ et $L_z \psi \neq \alpha \psi$. Donc ψ est fonction propre de L^2 mais pas de L_z . (1 point)
4. Les valeurs propres sont $2\hbar, \hbar$ et $P(\hbar) = |(Y_2^1, \psi)|^2 = \frac{9}{25}$ $P(2\hbar) = |(Y_2^2, \psi)|^2 = \frac{16}{25}$. (1 point)

Problème: (11 points)

Partie I(06 points)

1. $A^+ = \hbar|2\rangle\langle 1| = B$ et $B^+ = \hbar|1\rangle\langle 2| = A$, ils sont non hermitiens et l'un est l'adjoint de l'autre. (1 point)
2. $A = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 point)
3. $C_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $C_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (1 point)
4. La résolution du problème aux valeurs propres donne les valeurs $\pm \frac{\hbar}{2}$ pour les trois observables. Pour les vecteurs propres, on a : $|C_{1\pm}\rangle = \frac{|1\rangle \pm |2\rangle}{\sqrt{2}}$, $|C_{2\pm}\rangle = \frac{|1\rangle \pm i|2\rangle}{\sqrt{2}}$, $|C_{3+}\rangle = |1\rangle$, $|C_{3-}\rangle = |2\rangle$. (3 point)

Partie II(05 points)

1. En écrivant $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$, l'équation de Schrödinger dépendante du temps devient
$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} (-\gamma \sin \omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ point})$$
2. La résolution du système précédent donne
$$\begin{cases} a(t) = \frac{e^{-i\frac{\gamma}{2\omega} \cos \omega t}}{\sqrt{2}} \\ b(t) = \frac{ie^{i\frac{\gamma}{2\omega} \cos \omega t}}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (2.5 \text{ point})$$
3. $C = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ possède une seule valeur propre dégénérée ,
$$P\left(\frac{3\hbar^2}{4}\right) = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 + |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = 1 \quad (1.5 \text{ point})$$

Exercice 2: (05 points)

1. $N^+ = c^+c = N$ il est hermitien.(1 point)
2. $N^2 = c^+cc^+c = c^+(1 - c^+c)c = c^+c = N$ car $c^2 = 0$.(1 point)
3. $N|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \rightarrow N^2|\alpha\rangle = \alpha^2|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \rightarrow \alpha^2 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0, 1$.(1.5 point)
4. L'application de N sur $c^+|0\rangle$ et $c|1\rangle$ et l'utilisation de la normalisation des kets $|1\rangle$ et $|0\rangle$ donnent le résultat recherché. (1.5 point)