1.1.1 Champ et potentiel électrique

1.1.1.1 Champ et potentiel crée par une charge unique

Soit une charge électrique q_1 située en un point O dans l'espace, exerçant une force électrostatique sur une charge q_2 située en un point M. L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1/2} = k\frac{q_1 q_2}{d^2}\overrightarrow{u_{1,2}}$$

Qu'on peut mettre sous forme

$\vec{F}_{1/2} = q_2\frac{kq_1}{d^2}\overrightarrow{u_{1,2}} = q_2\vec{E}_1$ où $\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{d^2}\overrightarrow{u_{1,2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d^2}\overrightarrow{u_{1,2}}$

L'intérêt de cette séparation vient du fait que l'on distingue clairement ce qui dépend uniquement de la charge qui subit la force (ici q_2), de ce qui dépend de la charge source q_1 origine du champ crée, le vecteur $\vec{E}_1(M)$. Ce champ électrique est crée par la charge électrique en O au point M.

Définition : Une particule chargée de charge q_1 placée en O crée en tout point M de l'espace distinct de O un champ vectoriel

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{d^2}\overrightarrow{u_{1,2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d^2}\overrightarrow{u_{1,2}}$$

appelé champ électrostatique. L'unité est le (Volt/mètre) noté (V/m).

L'état électrique de chaque point M de l'espace aux alentours d'une charge électrique Q peut être caractérisé par deux grandeurs physiques :

- Le vecteur champ électrique

  $$\vec{E} = \frac{kQ}{d^2}\vec{u}$$

  Défini comme étant la force appliquée par la charge Q sur une autre charge unité placée à une distance d.
- Le potentiel électrique

  $$V(M) = k\frac{Q}{d} + Cste$$

  Défini comme l'énergie potentielle d'une charge unité placée à la distance d.

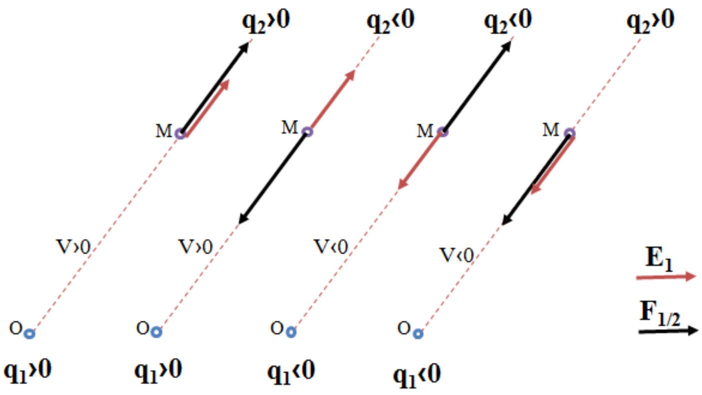


Fig. 1: Champ, potentiel et Force de deux charges en un point M

1.1.1.2 Champ et potentiel crée par deux charges électriques ou plus (principe de superposition)

Dans le souci de simplification, nous considérons le cas de deux charges ponctuelles fixes, q_1 et q_2 agissant sur une troisième charge q. Comme toutes les fores, la force électrostatique est une grandeur vectorielle, le principe de superposition nous laisse admettre que l'action de q_1 sur q n'est pas modifiée par la présence de q_2. La même chose, l'action de q_2 sur q n'est pas modifiée par la présence de q.

L'action conjuguée de q_1 et q_2 sur q est la somme vectorielle des actions séparées de q_1 sur q et q_2 sur q prises séparément.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = k\frac{qq_1}{{d_1}^2}\vec{u}_1 + k\frac{qq_2}{{d_2}^2}\vec{u}_2$$

$$= q\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) = q\,\vec{E}$$

Il vient $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

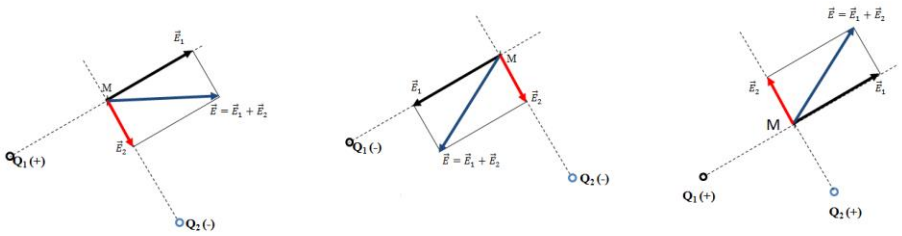


Fig. 2: Superposition de deux champs électriques.

Qu'on peut généraliser au champ crée par n charges q_i ponctuelles en un point M à des distances d_i des charges considérées :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{E_i}$$

Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et est énoncé comme **le principe de superposition,** comme tout principe, il n'est pas démontré.

Le champ électrostatique dérive d'un potentiel

Une charge ponctuelle q placée en O crée en tout point de l'espace un champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

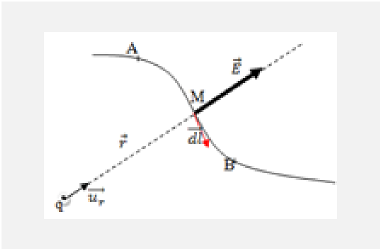


Fig. 3: Circulation du champ électrique entre deux points

La circulation élémentaire dc de $\vec{E}$ correspondant à un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ du point M sur la courbe $\widehat{AB}$ est

$$dc = \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\vec{u}_r.\overrightarrow{dl} \qquad \text{Or} \qquad \vec{u}_r.\overrightarrow{dl} = dr$$

Ainsi

$$dc = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,dr = -d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right) = -dV(r)$$

Avec $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + cste$

La circulation élémentaire dc est la différentielle totale dV(r). Le champ électrostatique dérive donc d'un potentiel V

$\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -dV$ avec $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cste$

1.1.1.3 Energie potentielle électrostatique

L'énergie potentielle électrostatique d'une charge électrique placée en un point M de l'espace baignant dans un potentiel électrique V(M) est définie comme étant le travail à fournir pour ramener cette charge depuis l'infini jusqu'à la position du point M.

Cette énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = q\,V$$

Pour une distribution de charges ponctuelles $q_1, q_2, q_3 \ldots . q_n$ on a

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} k\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} + cste \ ;$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad \text{et} \qquad E_p = qV.$$

Notion de différence de potentiel

La différence de potentiel entre deux points A et B baignant dans un champ électrostatique est égale à la circulation du champ entre ces deux points :

$$\int_{A}^{B} \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dl} = V_A - V_B$$

Lignes de champs et équipotentielles

Les lignes de champs et les équipotentielles sont des courbes et des surfaces qui permettent de représenter la topographie du champ et du potentiel électrique d'une distribution de charges donnée.

Une ligne de champ est une courbe orientée tel qu'en tout point, le champ électrique lui est tangent. Elle est orientée dans le sens du champ électrique. Les lignes de champ se dirigent vers les charges négatives venant des charges positives.

Les surfaces équipotentielles sont telles qu'en tout point le potentiel électrique garde la même valeur. Elles sont constamment perpendiculaires aux lignes de champ.

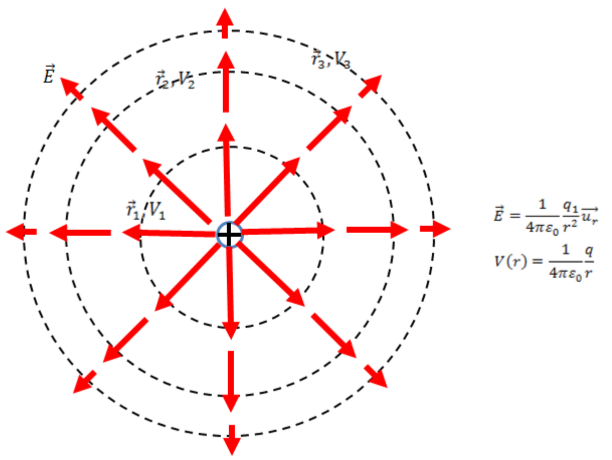


Fig. 4: Lignes de champs et surfaces équipotenteilles

La figure 4 montre des lignes de champ et trois équipotentielles d'une charge ponctuelle positive. Pour une charge négative, les lignes de champ seront dirigées vers la charge.

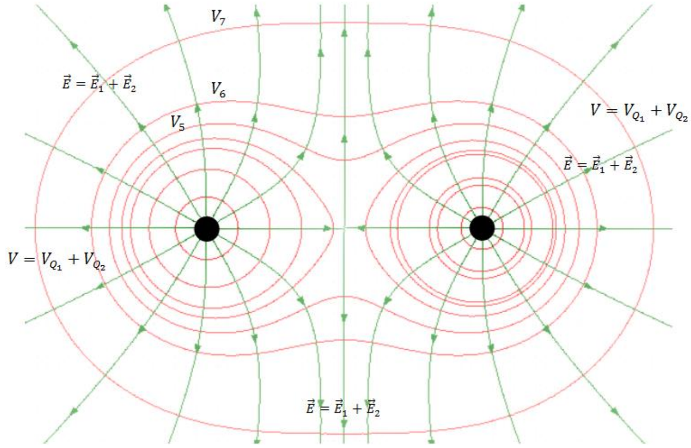


Fig. 5: Lignes de champs et équipotentielles de deux charge adjecentes

La figure 5 montre des lignes de champ et sept équipotentielles de deux charges électriques ponctuelles identiques. D'après http://www.physagreg.fr. Les lignes de champ en vert et les équipotentielles en rouge.

1.1.1.4 Champ et potentiel crée par une distribution continue de charges

Pour des charges électriques réparties en ligne, en surface ou en volume, il est souvent possible de les considérer comme une distribution continue de charges, qu'on peut caractériser par des densités, linéiques, surfacique ou volumique. La densité de charge électrique désigne la quantité de charge électrique par unité de longueur, de surface ou de volume selon qu'on traite un problème à une, deux ou trois dimensions. On défini alors ces trois grandeurs :

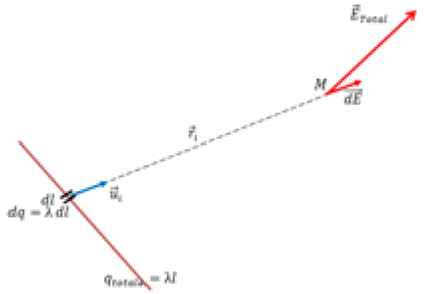
Densité linéique $\lambda=\frac{dQ}{dl}(Coulom/m)$;

Densité surfacique $\sigma=\frac{dQ}{ds}\ (Coulomb/m^2)$;

Densité volumique $\rho=\frac{dQ}{dv}(Coulomb/m^3)$.

Pour calculer le champ et le potentiel crée par une distribution continue de charge électrique, on considère la charge comme constituée d'une infinité de charges ponctuelles élémentaires. Le champ et potentiel sont alors obtenus en additionnant par une intégrale la contribution de tous ces éléments infinitésimaux.

A une dimension

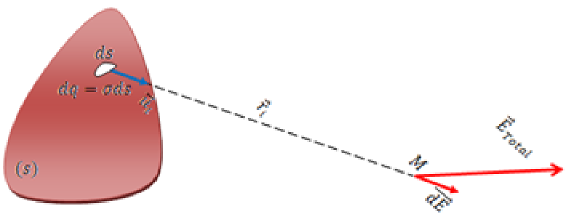


$$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r_i^2}\vec{u}_i$$
$$\vec{E} = k\int\frac{\lambda dl}{r_i^2}\vec{u}_i$$
$$V(M) = k\int\frac{\lambda dl}{r_i} + cste$$

Fig. 6: Champ et potentiel d'une distribution linéique de charges

$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r_i^2}\vec{u}_i$, $\vec{E} = k\int\frac{\lambda dl}{r_i^2}\vec{u}_i$, $V(M) = k\int\frac{\lambda dl}{r_i} + cste.$

A deux dimensions

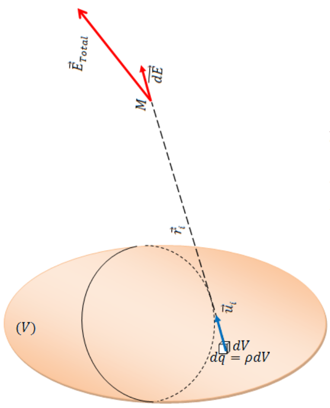


$$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r_i^2}\vec{u}_i$$
$$\vec{E} = k\iint\frac{\sigma ds}{r_i^2}\vec{u}_i$$
$$V(M) = k\iint\frac{\sigma ds}{r_i} + cste$$

Fig. 7: Champ et potentiel électrique d'une distribution surfacique de charges

$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r_i^2}\vec{u}_i$, $\vec{E} = k\iint\frac{\sigma ds}{r_i^2}\vec{u}_i$, $V(M) = k\iint\frac{\sigma ds}{r_i} + cste$

A trois dimensions



$$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r_i^2}\vec{u}_i$$
$$\vec{E} = k\iiint\frac{\rho dv}{r_i^2}\vec{u}_i$$
$$V(M) = k\iiint\frac{\rho dv}{r_i} + cste$$

Fig. 8: Champ et potentiel électrique d'une distribution volumique de charges

$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r_i^2}\vec{u}_i$, $\vec{E} = k\iiint\frac{\rho dv}{r_i^2}\vec{u}_i$, $V(M) = k\iiint\frac{\rho dv}{r_i} + cste$

1.1.1.5 Passage du champ au potentiel et du potentiel au champ

L'espace électrique (espace contenant au moins une charge électrique) est caractérisé en tout point M(x,y,z) par les deux grandeurs électriques. Le champ électrique $\vec{E}(M)$ qui est une grandeur vectorielle et le potentiel $V(M)$ qui est une grandeur scalaire. Nous savons à présent que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérive du potentiel scalaire$V(M)$. Mais aussi, que le potentiel scalaire $V(M)$ a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ$\vec{E}(M)$, c'est le passage du champ au potentiel et du potentiel au champ électrostatique.

Autrement dit :

$$-dV = \vec{E}.\overrightarrow{dl} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Ce qui nous permet le calcul du potentiel $V(x, y, z)$ connaissant le champ électrostatique $\vec{E}(x, y, z)$.

Inversement :

On sait que le potentiel électrostatique $V(x, y, z)$ est fonction des coordonnées d'espace$x, y\ et\ z$, on peut alors écrire sa différentielle totale :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) dz = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl} = -\,E_x dx - E_y dy - E_z dz = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

Ce qui nous conduit à :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$E_x = \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right); E_y = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) et\ E_z = \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

1.1.1.6 Topographie de l'espace électrique

Une topographie de l'espace électrique est une représentation graphique à deux ou à trois dimensions de deux fonctions $\vec{E}\ et\ V$ réalisée par le tracé des lignes de champ et des surfaces équipotentielles. Il faut noter à ce propos quelques propriétés importantes qui traduisent graphiquement les relations entre $\vec{E}\ et\ V$.

- ✓ Deux lignes de champ ne peuvent se couper que si :

- Le champ est nul en ce point,
- Le champ n'est pas défini en ce point.

✓ D'après l'expression du champ généré par une charge ponctuelle, les lignes de champ divergent depuis la charge positive, et convergent vers une charge négative.

✓ Une ligne de champ ne peut pas se refermer sur elle-même.

✓ Une équipotentielle est le lieu des points de même potentiel, à chaque valeur du potentiel V_0 correspond une surface équipotentielle.

✓ Une ligne de champ est localement orthogonale au champ électrique. En effet, une équipotentielle est définie par :

$dV = 0$, or on sait que $dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$ cela veut dire que $\vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0$ ce qui implique que $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{dl}$.

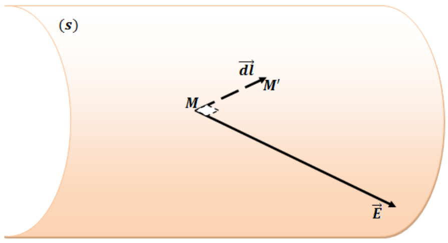


Fig. 9: Une ligne de champ perpendiculaire à une surface équipotentielle

✓ Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ. En effet, $dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$, dans le sens de la ligne de champ, $\vec{E}$ est parallèle à $\overrightarrow{dl}$ ($\vec{E}$ // $\overrightarrow{dl}$)

Ce qui implique que :

$$dV = -|\vec{E}||\overrightarrow{dl}| < 0$$

Le potentiel décroît algébriquement.

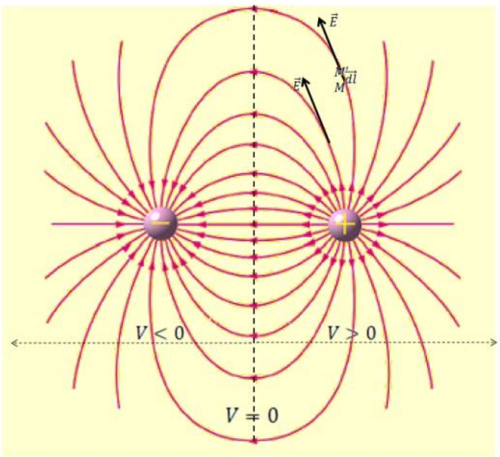


Fig. 10: Le potentiel le long d'une ligne de champ

- ✓ Les surfaces équipotentielles se resserrent en passant d'une région de champ peu intense à une région de champ intense. En effet, pour un même dV, on peut avoir plusieurs endroits correspondants

$$dV = -\vec{E}_1.\vec{dl}_1 = -\vec{E}_2.\vec{dl}_2$$

Il est alors clair que si

$$|\vec{E}_1| > |\vec{E}_2| \; alors \; |\vec{dl}_1| < |\vec{dl}_2|$$

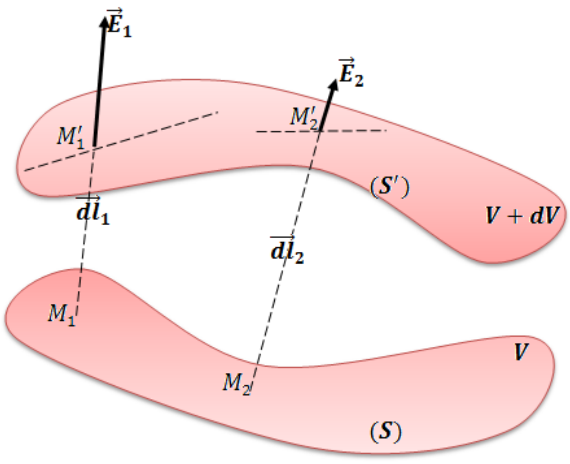


Fig. 11: Deux équipotentielles dans un champ variable

Ce qui nous permet de visualiser sur une carte des équipotentielles, les régions des champs intenses.

Enfin,

- ✓ Le travail des forces électrostatiques appliquées à une charge qui se déplace sur une équipotentielle est nul. En effet,

$$W_{équip} = \int \vec{F}.\overrightarrow{dl} = q\int \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -qdV$$

Et comme nous somme sur une équipotentielle, alors,

$$dV = 0 \quad et \quad W_{équip} = 0$$

1.1.1.7 Quelques applications

a- Champ et potentiel crée par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle q placée à l'origine O(0,0,0) de l'espace muni d'une base orthonormée $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. Calculer les modules des vecteurs $\overrightarrow{OM}_1, \overrightarrow{OM}_2, \overrightarrow{OM}_3\ \overrightarrow{OM}_4$.

2. Calculer le champ (vecteur et module) et le potentiel crée par q en $M_1(1,\sqrt{3}), M_2(1,-\sqrt{3},0), M_3(-1,\sqrt{3},0) et M_4(-1,-\sqrt{3},0)$.

Solution :

1. Calcule des modules des vecteurs $\overrightarrow{OM}_1, \overrightarrow{OM}_2, \overrightarrow{OM}_3\ \overrightarrow{OM}_4$

$$\|\overrightarrow{OM}_{M_1}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_2}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_3}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_4}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

2. Le champ et potentiel crée en M_1, M_2, M_3, M_4 :
   a. Champ :

$$\vec{E}_{M_1} = k\frac{q}{{OM_1}^2}\vec{u}_1 = k\frac{q}{{OM_1}^3}\ \overrightarrow{OM}_{M_1}$$

$$\vec{E}_{M_2} = k\frac{q}{{OM_2}^2}\vec{u}_2 = k\frac{q}{{OM_2}^3}\ \overrightarrow{OM}_{M_2}$$

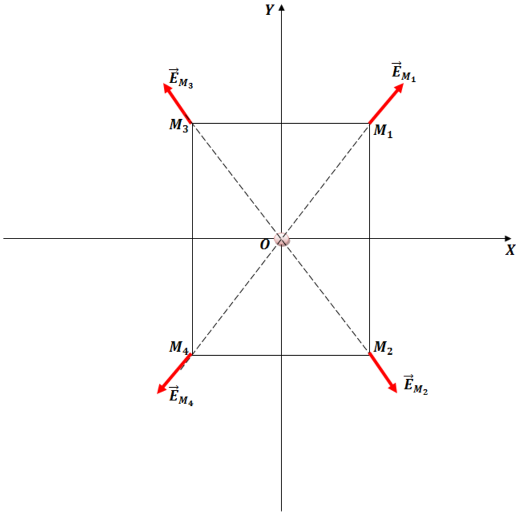
$$\vec{E}_{M_3} = k\frac{q}{{OM_3}^2}\vec{u}_3 = k\frac{q}{{OM_3}^3}\ \overrightarrow{OM}_{M_3}$$

$$\vec{E}_{M_4} = k\frac{q}{{OM_4}^2}\vec{u}_4 = k\frac{q}{{OM_4}^3}\ \overrightarrow{OM}_{M_4}$$

Or :

$$\|\overrightarrow{OM}_{M_1}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_2}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_3}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_4}\| = 2$$

D'où:



$$\vec{E}_{M_1} = k\frac{q}{8}(\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath})$$

$$\vec{E}_{M_2} = k\frac{q}{8}(-\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath})$$

$$\vec{E}_{M_3} = k\frac{q}{8}(\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath})$$

$$\vec{E}_{M_4} = k\frac{q}{8}(-\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath})$$

b. Potentiel

$$V_{M_1} = k\frac{q}{OM_1}$$

$$V_{M_2} = k\frac{q}{OM_2}$$

$$V_{M_3} = k\frac{q}{OM_3}$$

$$V_{M_4} = k\frac{q}{OM_4}$$

Avec

$$\|\overrightarrow{OM}_{M_1}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_2}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_3}\| = \|\overrightarrow{OM}_{M_4}\| = 2$$

$$V_{M_1} = V_{M_2} = V_{M_3} = V_{M_4} = k\frac{q}{2}$$

b- Champ et potentiel crée par un fil uniformément électrisé

1. Calculer en tout point de l'espace, le champ électrique créé par un fil rectiligne AB de longueur finie 2a, portant une densité linéique$\lambda > 0$.

2. Etudier les cas particuliers :

a. Le plan M est dans le plan médiateur de [AB].

b. Le fil a une longueur infinie.

Solution

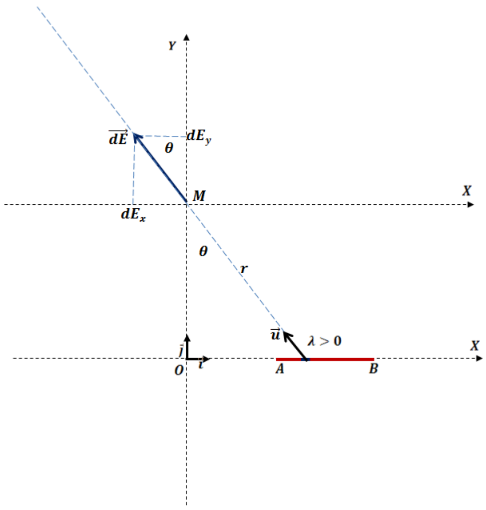


Fig. 12: Champ crée par un segment chargé

Le fil AB porte une charge de densité linéiqueλ, ainsi :

$$q_{AB} = \lambda.AB = \lambda.2a$$

L'élément de longueur dl porte alors une charge élémentaire proportionnelle dq= $\lambda.dl$. Cette charge élémentaire va créer un champ élémentaire en tout point de l'espace $\overrightarrow{dE}$ comme l'indique la figure. Cet élément de champ est alors donné par l'expression :

$$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r^2}\vec{u} = k\frac{\lambda.dl}{r^2}\vec{u} \qquad avec \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire dans la direction joignant l'élément de longueur dl au point M, il s'écrit en fonction de θ et des vecteurs de base $\vec{i}\ et\ \vec{j}$:

$$\vec{u} = -sin\theta\,\vec{i} + cos\theta\,\vec{j}$$

D'où $\overrightarrow{dE} = k\,\frac{dq}{r^2}\vec{u} = k\,\frac{\lambda.dl}{r^2}\vec{u} = \overrightarrow{dE} = k\,\frac{dq}{r^2}\vec{u} = k\,\frac{\lambda.dl}{r^2}(-sin\theta\,\vec{\imath} + cos\theta\,\vec{\jmath})$

Ses composantes sont alors données par :

$$\begin{cases} dE_x = -k\,\dfrac{\lambda}{r^2} sin\theta\,dx \\ dE_y = k\,\dfrac{\lambda}{r^2}\,cos\theta\,dy \end{cases}$$

Avec $tg\theta = \frac{x}{y} \rightarrow x = y\,tg\theta$

$$\rightarrow \quad dx = \frac{y}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

D'autre part : $cos\theta = \frac{y}{r} \rightarrow r = \frac{y}{cos\theta} \rightarrow r^2 = \frac{y^2}{\cos^2\theta}$

Au final, on aura : $dE_x = -k\,\frac{\lambda sin\theta}{y^2}\,\cos^2\theta\,\frac{y}{\cos^2\theta}$

$$dE_x = -k\,\frac{\lambda}{y}\;sin\theta\;\,d\theta$$

Pour calculer le champ électrostatique total crée par le fil chargé de longueur 2a, il faut sommer toutes les contributions des éléments infinitésimaux dl, ce qui revient à calculer l'intégrale suivante :

$$E_x = \frac{k\lambda}{y}\int_{\theta_A}^{\theta_B} -sin\theta\,d\theta \;=\; \frac{k\lambda}{y}\;[cos\theta]_{\theta_A}^{\theta_B} \;=\; k\lambda\,(cos\theta_B - cos\theta_A\,)$$

Or $cos\theta_A = \frac{y}{\sqrt{{x_A}^2+y^2}}$ $et\cos\theta_B = \frac{y}{\sqrt{{x_B}^2+y^2}}$

Alors: $E_x = k\lambda\left[\frac{1}{\sqrt{{x_B}^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{{x_A}^2+y^2}}\right]$

De la même manière, on calcule la composante orthogonale E_y et on trouve :

$E_x = \frac{k\lambda}{y}\left[\frac{x_B}{\sqrt{{x_B}^2+y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{{x_A}^2+y^2}}\right]$.

Cas particuliers

1) Le point M est dans le plan médiateur de [AB]

Dans ce cas, l'axe OM est un axe de symétrie pour le segment chargé [AB], ce qui ce traduit par : $x_A = -x_B$ et en remplaçant dans les expressions de E_x et E_y , on trouve :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \dfrac{2k\lambda}{y}\dfrac{x_B}{\sqrt{{x_B}^2 + y^2}} \end{cases}$$

2) Le fil AB est de longueur infini, cela veut dire que les points A et B sont à l'infini

$$x_A \to +\infty \quad et \quad x_B \to -\infty$$

$$\theta_B = -\frac{\pi}{2} \quad et \quad \theta_A = \frac{\pi}{2}$$

En remplaçant dans les expressions de E_x et E_y , on trouve :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \dfrac{2k\lambda}{y} \end{cases}$$

Il est à remarquer que le champ d'un fil infini ne dépend que de la distance à ce fil.

c- Champ et potentiel électrique crée par un disque uniformément chargé

Soit un disque circulaire de rayon R et uniformément électrisé avec une densité surfacique de charge σ constante. On se propose de calculer le champ et le potentiel en un point M sur l'axe de révolution du disque.

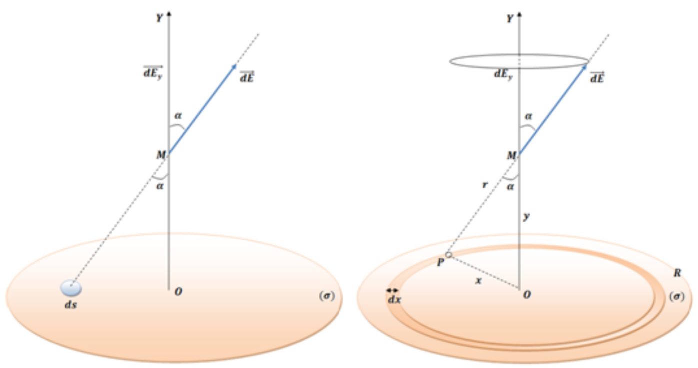


Fig. 13: Champ crée par un disque uniformément chargé en un point sur son axe de révolution

1. Calcul du champ

Le disque de rayon R de surface $s = \pi R^2$, porte une charge électrique totale $Q = \sigma\,\pi R^2$. Cette charge n'est pas ponctuelle, elle est répartie de manière homogène sur toute la surface du disque. La loi de Coulomb est valable pour une charge ponctuelle localisée $q\ en\ un\ point\ M$. C'est pourquoi, pour calculer le champ crée par une telle distribution continue, nous considérons pour commencer, le champ crée par une charge élémentaire dq portée par un élément de surface élémentaire ds tel que $dq = \sigma\ ds$. Ce champ est alors un champ élémentaire $d\vec{E}$.

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\vec{u}$$

Pour des raisons de symétrie, le champ est porté par l'axe , en conséquence :

$$dE_y = dE\cos\alpha$$

Formons maintenant une couronne circulaire, d'épaisseur dx et de rayon intérieur x, cette couronne n'est que la surface obtenue en faisant subir à ds une rotation autour de OM. La charge électrique portée par cette couronne est donnée par :

$$dq = \sigma\, 2\pi\, x.dx$$

La contribution de toutes les charges élémentaires de la couronne au champ $\vec{E}$ est la même :

$$dE_y = k\frac{\sigma\, 2\pi\, x\, dx}{r^2}\, cos\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ce qui donne : $$dE_y = k\frac{\sigma\, 2\pi\, y\, xdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour balayer toute la surface du disque, il suffit de faire varier le rayon x de la couronne depuis le centre du disque o à R. Maintenant, on peut obtenir le champ total en sommant dE_y pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et R.

$$E = \int_0^R dE_y = 2k\,\pi\sigma y \int_0^R \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\left[(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}\right]_{x=0}^{x=R}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{y}{(R^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Cas particuliers :

- Si le point M est au centre du disque, c'est-à-dire $y = 0$ alors le champ se réduit à $E = \sigma/2\epsilon_0$.
- Si maintenant le disque est infini c'est-à-dire$R \to \infty$, à ce moment là la position du point ne change rien au champ, il est partout le même et égale à $E = \sigma/2\epsilon_0$.

Dans ces deux cas, le champ est indépendant des variables $x\ et\ y$.

2. Calcul du potentiel à partir du champ

Nous avons vu que le champ électrostatique dérive d'un potentiel, ces deux grandeurs sont lié par la relation :

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ ou encore $\vec{E}.\vec{dl} = -dV$

Nous avons calculé un champ porté par l'axe YY' de composantes $\vec{E}(0, E_y, 0)$, ce qui nous amène à :

$$\vec{E} = \vec{E}(0, E_y, 0) = -\overrightarrow{grad}\,V = -(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z})$$

D'où $E_y = -\frac{dV}{dy} \to dV = -E_y\,dy$

Et $V = \int E\,dy = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[(R^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - y\right] + cste$

La constante est déterminée par une considération physique, en supposant que le potentiel est nul à l'infini.

$$V = 0 \text{ à } l'infini \quad \to cste = 0$$

1.1.1.8 Energie interne d'une distribution de charges électriques ponctuelles

a. Energie potentielle électrostatique

Définition : L'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique (sans changement de vitesse) cette particule depuis l'infini à sa position actuelle.

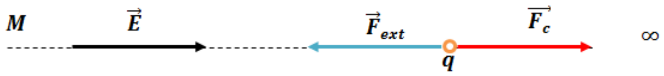


Fig. 14: Travail d'une force électrostatique dans un champ électrique

Soit l'espace où règne un champ électrostatique $\vec{E}$. pour déplacer la charge q depuis l'infini à la position M, on doit fournir un travail par le biais de la force extérieur $\vec{F}_{ext}$, qu'on applique pour vaincre la force de Coulomb (le déplacement doit se faire très lentement pour ne pas induire de changement de vitesse), on a alors :

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_C$$

Et le travail à fournir est donné par :

$$W(M) = \int_{\infty}^{M} dW = \int_{\infty}^{M} \vec{F}_{ext}.\overrightarrow{dl} = -\int_{\infty}^{M} -\vec{F}_C.\overrightarrow{dl}$$

$$W(M) = -q\int_{\infty}^{M} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = q\int_{\infty}^{M} dV = q[V]_{\infty}^{M} = V(M) - V(\infty)$$

Comme $V(\infty) \to 0$ alors : $W(M) = q\,V(M)$.

Ce travail fourni est exactement l'énergie potentielle électrostatique de la charge q au point M. Si la charge est libre, cette énergie est vite restitué sous forme d'énergie cinétique.

b. Energie interne d'un ensemble de charges ponctuelles

Nous venons de voir que pour assembler deux charges de même signes, il faut fournir un travail, qui n'est autre que l'énergie potentielle électrostatique de la première charge dans le champ de la deuxième et vis-versa. On l'appelle **énergie interne** donnée par :

$$U = k\frac{q_1q_2}{d} = \frac{1}{2}\left[q_1\left(\frac{kq_2}{d}\right) + q_2(\frac{kq_1}{d})\right] = \frac{1}{2}(W_1 + W_2)$$

Le $(\frac{1}{2})$ pour ne pas comptabiliser la même énergie deux fois.

Cette énergie peut être positive ou négative, selon que les deux charges sont de mêmes signes ou de signes opposées. Selon que le travail est fourni ou restitué.

Généralisation

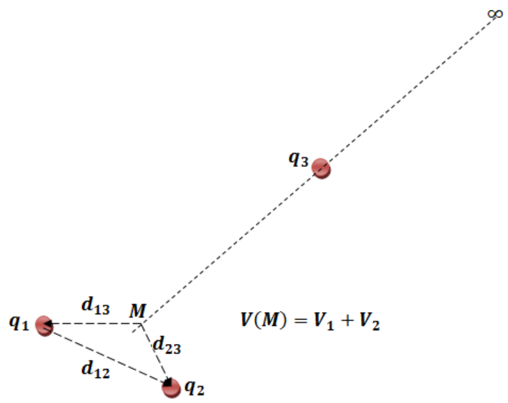


Fig. 15:Energie interne d'une distribution de charges

Si maintenant on amène une 3ème charge q_3 depuis l'infini jusqu'au voisinage des deux premières charges $q_1\ et\ q_2$ supposées fixes, il faut fournir un travail supplémentaire à celui déjà fourni pour mettre q_1 au voisinage de q_2 :

$$W_3 = q_3(V_1 + V_2) = q_3V_1 + q_3V_2 = k\frac{q_1q_3}{d_{13}} + k\frac{q_2q_3}{d_{23}}$$

Et l'énergie interne électrostatique de ce système de trois charges est alors :

$$W_e = E_e = k(\frac{q_1q_2}{d_{12}} + \frac{q_1q_3}{d_{13}} + \frac{q_2q_3}{d_{23}})$$

Système de N charges ponctuelles

Pour un système de N charges ponctuelles, on aura alors :

$$W_e = \sum_{couple} q_i V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i}^{N} \sum_{j>i} \frac{q_i q_j}{d_{ij}}$$

Qu'on peut aussi écrire :

$$W_e = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i}^{N} \sum_{j\neq i} \frac{q_i q_j}{d_{ij}}\right] = \frac{1}{2} \sum_{i}^{N} \sum_{j\neq i} \frac{k q_i q_j}{d_{ij}}$$

Où le facteur $1/2$ apparait pour éviter de compter de compter les couple (i, j) deux fois.